This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

Library of
Charles Nelson Haskins

Digitized by Google

Digitized by Google

UF 825
M1 314

Digitized by Google

TRAITÉ

DE

BALISTIQUE EXTÉRIEURE

PAR

N. MAYEVSKI,

GÉNÉRAL-MAJOR DE LA SUITE DE SA MAJESTÉ L'EMPEREUR, MEMBRE DU COMITÉ DE L'ARTILLERIE, PROFESSEUR DE BALISTIQUE À L'ACADÉMIE D'ARTILLERIE, DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE L'UNIVERSITÉ IMPÉRIALE DE MOSCOU, ANCIEN ÉLÈVE DE CETTE UNIVERSITÉ ET DE L'ACADÉMIE D'ARTILLERIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1872

(Tous droits réservés).

Digitized by Google

S^{t}-Pétersbourg. — Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
Vass.-Ostr., 9^{e} ligne, № 12.

Digitized by Google

AVANT-PROPOS.

Des géomètres illustres et des praticiens habiles se sont depuis longtemps occupés de la recherche des lois du mouvement des projectiles. Galilée démontra que la courbe décrite par les projectiles serait une parabole sans la résistance de l'air. Newton, Euler, Legendre et d'autres mathématiciens se sont occupés de la solution de la question balistique, en supposant la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse. Jean Bernouilly réduisit aux quadratures la question balistique dans l'hypothèse de la résistance de l'air proportionnelle à la n^{me} puissance de la vitesse; puis il fut démontré que cette réduction est encore possible, lorsque la résistance est exprimée par un binome, dont le premier terme est indépendant de la vitesse et le second proportionnel à la n^{me} puissance de la vitesse. On considérait le mouvement du projectile comme celui d'un point matériel soumis à l'action de la force de la pesanteur et de la résistance de l'air en sens contraire à celui du mouvement, ce qui est juste pour les projectiles sphériques, dont le centre de gravité coïncide avec le centre de figure et qui ne sont pas doués au départ d'un mouvement de rotation.

Poisson étudia le mouvement d'un projectile sphérique doué d'une rotation dans le cas où son centre de gravité coïncide avec son centre de figure et dans celui d'une faible excentricité. Ostrogradski commença, mais n'acheva pas ses recherches

Digitized by Google

dans le cas d'une valeur quelconque de l'excentricité des projectiles sphériques. Les deux géomètres considéraient la résistance comme étant composée de deux parties: l'une, normale aux éléments de la surface, qui constitue la résistance proprement dite; l'autre, perpendiculaire à ces éléments, qui constitue le frottement, en admettant la première partie de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse. Ils n'ont pas pris en considération l'augmentation de la pression de l'air sur certaines parties de la surface du projectile et la diminution de la pression sur d'autres parties — augmentation et diminution qui sont dues, comme l'ont démontré depuis les expériences de Magnus, aux mouvements simultanés de translation et de rotation, quand le mouvement de rotation a lieu autour d'un axe éloigné de la direction du mouvement de translation. En ne tenant pas compte de cet effet de l'air, Poisson avait conclu à la déviation en sens contraire de la rotation de l'hémisphère antérieure du projectile; ce qui est en opposition directe avec ce qui se passe dans le tir. Ostrogradski n'a fait que former les équations différentielles du mouvement d'un projectile sphérique hétérogène, mais n'a pas entrepris leur intégration.

Comme l'ont démontré les expériences, la résistance de l'air au mouvement des corps, dans le cas des vitesses employées dans le tir, croît plus rapidement que le carré de la vitesse; c'est pourquoi les recherches sur le mouvement des projectiles sphériques dans l'hypothèse que la résistance de l'air soit proportionnelle au carré de la vitesse, ne pouvaient conduire à des formules qui pussent représenter, dans tous les cas, les résultats du tir avec une précision suffisante.

Le général Didion a, le premier, imprimé en 1847 un traité complet de balistique extérieure, basé sur une expression binome de la résistance de l'air, dont le premier terme est proportionnel au carré de la vitesse et le second à une puissance supérieure de la vitesse, nommément à la troisième. Ce traité, excellent par son plan et par son exécution, a été pris par nous

Digitized by Google

pour point de départ, lorsque nous avons été appelé en 1858 à professer la balistique à l'Académie d'artillerie et nous a beaucoup aidé dans la rédaction de notre traité.

L'édition russe de notre traité, publiée en 1870, aux frais de l'État, est divisée en douze chapitres.

Le premier chapitre traite des moyens de mesurer les vitesses des projectiles et les durées de leurs trajets. La description des appareils employés à la mesure de la vitesse des projectiles avant l'application de l'électricité à ce but a été puisée dans le traité de M. Didion. La description du chronographe électrique et de la clepsydre de M. Le-Boulengé a été faite d'après les mémoires de l'auteur; nous n'y avons ajouté que la détermination du degré de précision des vitesses mesurées par le chronographe et des durées des trajets des projectiles mesurées par la clepsydre. Les valeurs des vitesses initiales de nos projectiles, insérées dans les tableaux annexés à ce chapitre, résultent de nos expériences au polygone de Volkovo, près St-Pétersbourg.

Le deuxième chapitre comprend les lois du mouvement des projectiles dans le vide. L'énoncé de ces lois est emprunté au traité de M. Didion; nous n'avons fait qu'y ajouter l'application des formules du mouvement parabolique à la solution de divers problèmes du tir à l'aide des tables de tir.

Le troisième chapitre traite de la résistance de l'air au mouvement des corps, et en particulier à celui des projectiles. Les hypothèses faites dans les derniers temps sur le mouvement moléculaire des gaz sont encore trop peu établies pour pouvoir conduire à une solution assez précise de la question de la résistance de l'air au mouvement des projectiles. Toutes les recherches faites à ce sujet n'exprimant pas avec une approximation suffisante les résultats des expériences directes, nous nous sommes bornés au calcul de la résistance basé sur la considération du choc d'un corps doué d'une vitesse de translation connue contre l'air supposé en repos — calcul qui a pour lui la simpli-

Digitized by Google

cité et qui donne le moyen de connaître la relation entre la résistance de l'air sur les surfaces de révolution et les angles que font leurs axes de figure avec la direction du mouvement. Les bases du calcul de la résistance oblique sur les surfaces de révolution ont été puisées dans les *Études sur la trajectoire que décrivent les projectiles oblongs* par le comte de St.-Robert. 1860.

La description des expériences sur la résistance de l'air au mouvement des corps animés de faibles vitesses, ainsi que des expériences faites en 1840 sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles a été tirée du traité de M. Didion. Les résultats des expériences faites par M. Bashforth en Angleterre sur les projectiles oblongs ont été déduits des données insérées dans les *Proceedings of the Royal Artillery Institution*, Woolwich. 1868. Les expériences de St-Pétersbourg sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles sphériques et oblongs ont été faites par nous en 1868 et 1869 et leurs résultats sont pour la première fois publiés dans notre traité. Afin que les expressions de la résistance représentent, avec une approximation suffisante, les résultats de nos expériences et ceux des expériences anglaises, faites avec des appareils perfectionnés, et que ces expressions permettent en même temps une intégration facile, quoique par approximation, des équations différentielles du mouvement, nous avons admis *pour les projectiles sphériques*, dans les limites des vitesses de $530^{m:s}$ à $376,^{m:s}$ la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, et nous avons exprimé, à partir de la vitesse de $376^{m:s}$ jusqu'aux petites vitesses, la résistance de l'air par un binome dont le premier terme est proportionnel à la deuxième puissance de la vitesse et le second à la quatrième puissance de la vitesse; *pour les projectiles oblongs*, quand leur axe de figure coïncide avec la direction du mouvement, nous avons admis, dans les limites des vitesses de $510^{m:s}$ à $360^{m:s}$, la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse; dans les limites des vitesses de $360^{m:s}$ à $280^{m:s}$ nous l'avons admise proportionnelle à la sixième puissance de la

Digitized by Google

vitesse, et nous avons exprimé, à partir de la vitesse de $280^{m:s}$ jusqu'aux petites vitesses, la résistance de l'air par un binome dont le premier terme est proportionnel à la deuxième puissance de la vitesse et le second à la quatrième puissance de la vitesse et nous avons pu remarquer que cette dernière expression pouvait même être employée à partir de la vitesse de $325^{m:s}$ jusqu'aux petites vitesses; ce qui simplifie la solution des problèmes du tir de toutes nos bouches à feu actuelles de place, de siége et de campagne, qui impriment aux projectiles, avec les charges en usage, des vitesses initiales moindres que $325^{m:s}$.

Si l'on veut exprimer la résistance de l'air par un seul terme proportionnel à une certaine puissance entière de la vitesse, depuis les plus grandes jusqu'aux plus petites vitesses, on trouve, d'après les résultats des expériences russes et anglaises, que la valeur la plus probable de cette puissance est égale à 3 pour les projectiles sphériques et à 4 pour les projectiles oblongs.

N'ayant pas de solution assez exacte de la relation entre la résistance de l'air sur les projectiles oblongs et l'angle que fait leur axe de figure avec la direction du mouvement, nous avons adopté, pour exprimer cette relation, les formules déduites dans l'hypothèse que la résistance de l'air normale à chaque élément de la surface soumis à la résistance est due au choc de cet élément contre l'air supposé en repos.

Le quatrième chapitre comprend les recherches sur le mouvement dans l'air des projectiles sphériques qui n'exécutent pas de rotation. Les équations différentielles du mouvement y sont déduites sans faire d'hypothèse particulière sur la résistance de l'air, et on a exposé la méthode pour trouver, d'après la trajectoire donnée, la vitesse du projectile à chaque point de la trajectoire et la résistance de l'air correspondante. Cet exposé est emprunté au mémoire du comte de St-Robert: *Du mouvement des projectiles dans les milieux résistants.* 1859. Les propriétés de la trajectoire dans l'air des projectiles sphériques qui n'ont pas de rotation sont examinées, conformément au mémoire

Digitized by Google

mentionné, sans faire d'hypothèse particulière sur la résistance de l'air, dans la seule supposition que la résistance de l'air croît avec la vitesse, devient infinie pour une vitesse infinie et est moindre que le poids du projectile pour une vitesse infiniment petite. La réduction des équations du mouvement aux quadratures est faite dans la supposition de la résistance proportionnelle à la n^{me} puissance de la vitesse, et les formules ainsi trouvées ont servi à établir les conditions de la similitude des trajectoires des projectiles sphériques qui n'ont pas de rotation. Les équations finies exactes du mouvement ne s'obtiennent que dans la supposition de la résistance de l'air proportionnelle à la première puissance de la vitesse. La méthode approximative de l'intégration des équations différentielles du mouvement pour toutes les expressions de la résistance déduites des résultats de nos expériences — cette méthode est basée sur la substitution, proposée par M. Didion, du rapport variable de l'élément de l'arc de la trajectoire à sa projection horizontale par une certaine valeur moyenne de ce rapport, et la marche à suivre dans l'intégration de ces équations est puisée dans le mémoire du comte de St-Robert: *Du mouvement des projectiles dans les milieux résistants.* 1859. Dans l'annexe à notre traité se trouvent réunies les tables des fonctions par lesquelles les équations approximatives du mouvement dans l'air diffèrent de celles du mouvement dans le vide; entre ces tables celles des fonctions e^z, $F_1(z)$ et $F(z)$ sont extraites du traité de M. Didion, et les autres tables, qui se rapportent aux expressions de la résistance non traitées par M. Didion, ont été calculées sous notre surveillance.

Dans le cinquième chapitre est exposée la solution des problèmes du tir avec des projectiles sphériques n'ayant pas de rotation. Pour résoudre les problèmes du tir sous de petits angles de projection, à fortes charges, nous sommes obligés de calculer la trajectoire par parties, à cause des expressions différentes de la résistance de l'air adoptées pour les grandes et les

Digitized by Google

moyennes vitesses; mais les calculs sont beaucoup abrégés par la supposition que les distances verticales des points de la trajectoire à sa tangente au point de départ sont, pour ce cas, sensiblement indépendantes des angles de projection. L'énoncé de cette supposition et le calcul des limites des erreurs qui en résultent sont empruntés au mémoire du comte de St-Robert: *Del tiro.* 1857.

Dans le sixième chapitre sont discutées les déviations des projectiles sphériques sur les bases émises par M. Didion dans son traité. Pour obtenir les équations du mouvement des projectiles sphériques excentriques, nous avons essayé d'exprimer, pour une vitesse angulaire donnée la force déviatrice due aux mouvements simultanés de translation et de rotation en fonction de la vitessse de translation, en nous basant sur les résultats fournis par le tir en Prusse du canon de 12^{l} avec des obus excentriques, à la charge de $0^{k}.95$. N'ayant pas de résultats du tir à différentes charges, imprimant aux projectiles des vitesses angulaires différentes, nous n'avons pu exprimer cette force déviatrice en fonction de la vitesse de rotation et de celle de translation.

Le septième chapitre traite du mouvement des projectiles oblongs dans l'air. Les recherches sur ce sujet sont jusqu'à présent peu nombreuses. Nous ne mentionnerons que celles de M. Gautier, professeur au lycée d'Alger, et celles du comte de St-Robert.

Le mémoire de M. Gautier, inséré dans les *Annales scientifiques de l'école normale supérieure*, 1868, se distingue au point de vue analytique; mais, pour simplifier les intégrations, l'auteur fait sur la résistance de l'air des hypothèses qui ne sont pas justifiées et qui le conduisent à des conclusions ne concordant pas avec la réalité. Dans le n° 21 de l'année 1869 (22 novembre) des *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, M. Gautier fait une communication sur son nouveau mémoire, où il est parvenu, dit-il, à surmonter les difficultés rencontrées dans son premier travail;

Digitized by Google

mais, en tant que nous sachions, ce nouveau mémoire n'est pas encore édité.

Le comte de St-Robert, dans ses *Études sur la trajectoire que décrivent les projectiles oblongs*, 1859 et 1860, déduit, par un procédé géométrique, la vitesse angulaire de l'axe de figure du projectile autour de la tangente à la trajectoire, en supposant cette tangente immobile et le couple de la résistance de l'air constant, et indique les formules pour le calcul de la trajectoire en la divisant en parties correspondant à de petits intervalles de temps, pendant lesquels on peut admettre que l'axe du projectile se meut dans l'espace parallèlement à lui-même, et ne considérer pendant ces intervalles que le seul mouvement de translation, en tournant, après chaque intervalle de temps, l'axe de figure du projectile autour de la tangente d'un angle correspondant à l'intervalle considéré. Le comte de St-Robert n'a pas appliqué ses recherches au calcul d'un exemple particulier de la trajectoire. Nous avons calculé *) la trajectoire d'un projectile oblong d'après la marche indiquée par M. de St-Robert et nous avons été induits en erreur en trouvant que l'axe de figure du projectile faisait plusieurs révolutions entières autour de la tangente pendant le trajet du projectile. Nous avons relevé cette erreur en prenant en considération, pour former les équations différentielles du mouvement de rotation de l'axe de figure, l'abaissement de la tangente et la variation du couple de la résistance de l'air durant tout le trajet du projectile. Ces équations font voir que, dans le cas de vitesses un peu considérables, l'axe de figure exécute un mouvement d'oscillation autour de la tangente et que l'amplitude de ces oscillations est toujours moindre que π.

Nous exposons dans le chapitre en question nos recherches à ce sujet.

*) De l'influence du mouvement de rotation sur la trajectoire des projectiles oblongs dans l'air par N. Mayevski; mémoire inséré dans le tome V de la Revue de Technologie militaire de M. Terssen.

Digitized by Google

Le huitième chapitre comprend la solution de divers problèmes sur le tir des projectiles oblongs.

Dans le neuvième chapitre sont traitées les déviations des projectiles oblongs.

Dans le dixième chapitre sont déduites les conditions de la similitude des trajectoires décrites dans l'air par des projectiles semblables sphériques n'ayant pas de rotation, par des projectiles semblables sphériques excentriques et par des projectiles semblables oblongs, en supposant la résistance de l'air proportionnelle à la n^{me} puissance de la vitesse.

Le onzième chapitre traite de la pénétration des projectiles dans les milieux solides et du percement des cuirasses en fer. Les lois de la pénétration des projectiles sphériques sont énoncées suivant le traité de M. Didion. La relation entre la résistance des milieux solides, la vitesse du mouvement et l'angle que fait l'axe de figure d'un projectile oblong avec la direction du mouvement n'étant pas connue, nous ne donnons pas de théorie pour déterminer les lois du mouvement des projectiles oblongs dans les milieux solides, et nous nous bornons à l'explication de la forme du vide produit par les projectiles oblongs. La solution des problèmes sur le tir contre les cuirasses est basée sur les résultats des expériences anglaises décrites dans le compte rendu par M. le capitaine Noble.

La méthode des moindres carrés et son application à l'analyse des résultats du tir sont exposées dans le douzième chapitre. L'énoncé des principes de la théorie des probabilités est emprunté à l'*Essai d'une analyse élémentaire de la théorie des probabilités* par M. Tchebycheff, aux *Leçons autographiées sur la théorie des probabilités* par M. Davidoff et au mémoire de M. Tchebycheff: *Sur les valeurs moyennes*, 1866. Pour la rédaction de la méthode des moindres carrés, nous avons profité des mémoires: *Méthode des moindres carrés* par Gauss, traduction de M. Bertrand, *Ueber die Methode der kleinsten Quadrate* von Encke, *Ausgleichung der Beobachtungs-Fehler* von Dinger et

Digitized by Google

du *Calcul des probabilités* par M. Liagre. Le principe de la moyenne arithmétique pour un très grand nombre d'observations est déduit des théorèmes exposés dans le mémoire de M. Tchebycheff: *Sur les valeurs moyennes*, 1866. L'application à l'analyse des résultats du tir est en grande partie empruntée au *Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles* par M. Didion, 1858. Les formules de l'interpolation par la méthode des moindres carrés sont données par M. Tchebycheff; nous les avons appliquées à la détermination de la projection de la trajectoire sur le plan vertical du tir, d'après les résultats du tir.

Pour faciliter l'édition de notre traité de balistique extérieure en français, nous avons omis:

1°. Le chapitre qui traite des moyens de mesurer la vitesse des projectiles et la durée de leur trajet, en renvoyant le lecteur au traité de balistique de M. Didion et aux mémoires spéciaux sur les appareils électro-balistiques.

2°. Le chapitre qui concerne les lois du mouvement des projectiles dans le vide et l'application des formules du mouvement parabolique à la solution de divers problèmes du tir, à l'aide des tables de tir.

3°. Dans le chapitre relatif à la résistance de l'air, la description des expériences sur la résistance de l'air au mouvement des corps sous de faibles vitesses, que l'on trouve dans le traité de M. Didion.

4°. Les chapitres qui traitent des déviations des projectiles sphériques et oblongs, en renvoyant le lecteur au traité de balistique de M. Didion.

5°. Le chapitre examinant la similitude des trajectoires que décrivent dans l'air les projectiles sphériques et oblongs, en renvoyant le lecteur aux mémoires de M. de St-Robert et de M. de Brettes.

6°. Le chapitre relatif aux recherches sur la pénétration des projectiles sphériques et oblongs dans les milieux solides et

Digitized by Google

sur le percement des bordages des navires cuirassés, en renvoyant le lecteur au traité de M. Didion et au compte-rendu par M. Noble sur le percement des plaques.

7°. Le chapitre qui comprend la méthode des moindres carrés et son application à l'analyse des résultats du tir, en renvoyant le lecteur aux ouvrages spéciaux et pour l'application au tir au mémoire de M. Didion. Nous ne conservons de ce chapitre, sous forme d'appendice, que les formules d'interpolation par la méthode des moindres carrés données par M. Tchébycheff.

Les chapitres qui contiennent nos recherches sur le mouvement des projectiles oblongs dans l'air et leur application à la solution des problèmes du tir ne sont pas une traduction des chapitres VII et VIII de l'édition russe de notre traité; nous y avons fait de notables changements. Nous commençons par déduire la vitesse angulaire de l'axe de figure d'un projectile oblong autour de la tangente — supposée immobile et la résistance de l'air en sens contraire de l'axe de figure supposée constante — en intégrant les équations différentielles d'Euler du mouvement de rotation d'un corps solide, et puis nous formons les équations différentielles du mouvement de rotation de l'axe de figure d'un projectile oblong considérant que durant tout son trajet la tangente s'abaisse et que la résistance de l'air varie. Ces équations renferment des termes qui — dépendant du cosinus de l'angle ν que fait le plan vertical passant par la tangente avec le plan passant par la même tangente et l'axe de figure — changent de signe. Dans l'état actuel de l'analyse, l'intégration même approximative de pareilles équations, entre des limites quelconques, présente des difficultés insurmontables, et il devient indispensable de les intégrer, même approximativement, par parties entre des limites où les expressions trigonométriques ne changent pas de signe. Cette intégration, qui se réduit à une intégration d'équations différentielles linéaires du premier ordre, fait voir que, quand la vitesse du projectile est un peu considé-

Digitized by Google

rable, l'axe de figure exécute un mouvement d'oscillation autour de la tangente, et permet d'étudier les propriétés de ce mouvement.

Ensuite nous posons les équations différentielles du mouvement de translation d'un projectile oblong, en prenant pour axes des coordonnées l'abscisse des x horizontale, dans le plan vertical du tir, l'ordonnée des y verticale et l'ordonnée des z perpendiculaire au plan des xy. Ces équations renfermant certaines expressions trigonométriques qui changent de signe, nous nous bornons, pour une première approximation, dans les équations différentielles du mouvement selon l'axe des x et celui des y aux termes qui dépendent de la composante tangentielle de la résistance, ce qui permet d'obtenir, par intégration, une première approximation de la projection du mouvement du projectile sur le plan vertical du tir. En négligeant, pour une première approximation, dans l'équation différentielle du mouvement selon l'axe des z, le terme affecté de $\cos\nu$, nous intégrons cette équation par parties, en nous servant des résultats obtenus de l'analyse du mouvement d'oscillation de l'axe de figure, et nous en déduisons une première approximation de la projection horizontale du mouvement du projectile. Nous appliquons ces calculs à deux cas particuliers bien différents: l'un à un tir direct avec une vitesse initiale considérable et l'autre à un tir courbe avec une petite vitesse initiale, et nous déterminons les valeurs des corrections fournies par les termes négligés dans les équations différentielles du mouvement. Ces applications font voir la faible influence des termes négligés sur les résultats.

Le calcul par parties de la projection horizontale du mouvement étant trop long pour les besoins de la pratique, nous donnons des formules simplifiées de ce mouvement, en remplaçant les valeurs variables des expressions de l'angle que fait l'axe de figure avec la tangente et de celui que fait le plan vertical passant par la tangente avec le plan qui passe par la même tangente et l'axe de figure — en les remplaçant par leurs valeurs moyennes dans deux demi-oscillations moyennes de l'axe

Digitized by Google

de figure: l'une ascendante et l'autre descendante, et en intégrant, après cette substitution, l'équation du mouvement selon l'axe des z, à partir de l'origine du mouvement jusqu'à la durée qui correspond à la portée totale.

En nous basant sur l'analyse du mouvement des projectiles oblongs, nous formons l'image du mouvement d'un projectile oblong dans l'air.

La solution des divers problèmes sur le tir des projectiles oblongs n'est pas plus compliquée que celle des problèmes du tir des projectiles sphériques. Les résultats numériques que l'on en obtient présentent une concordance suffisante avec les résultats directs du tir.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Avant-Propos.

Préliminaires.

Pag.

1. Définition et objet 1

Chapitre I.

RÉSISTANCE DE L'AIR.

2. Notions préliminaires sur la résistance des milieux. — 3. Courant du fluide qui accompagne le corps en mouvement. — 4. Influence de la compressibilité de l'air. — 5. Variation de pression résultant de la rotation des corps durant leur mouvement de translation 2

§ I.

CALCUL DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR.

6. Base du calcul de la résistance de l'air. — 7. Résistance de l'air sur un plan . . . . .
8. Résistance de l'air sur une surface de révolution dont l'axe de figure coïncide avec la direction du mouvement. — 9. Application à une sphère. — 10. Application à un cône 8
11. Résistance de l'air sur une surface de révolution dont l'axe de figure fait un angle donné avec la direction du mouvement. Couple de la résistance. — Centre de résistance 10
12, 13. Application à un tronc de cône. — 14. Application à un cylindre. — 15. Application à un plan perpendiculaire à l'axe de figure de la surface de révolution 16
16. Application à une demi-sphère 20
17. Résistance de l'air sur un projectile oblong dont l'axe de figure fait un angle donné avec la direction du mouvement. — 18. Couple de la résistance. Centre de résistance 26

Digitized by Google

§ II.

EXPÉRIENCES SUR LA RÉSISTANCE DE L'AIR AU MOUVEMENT DES PROJECTILES.

Pag.

19. Moyen de déterminer les valeurs de la résistance de l'air correspondantes à différentes vitesses des projectiles 30
20. Expériences de Robins. — 21. Expériences de Hutton. — 22. Expériences de Metz de 1839 et 1840 33
23. Expériences de Metz de 1856, 1857 et 1858 35
24. Expériences de S^t-Pétersbourg de 1868 et 1869 sur les projectiles sphériques et oblongs, et expériences de M. Bashforth sur les projectiles oblongs 37
25, 26. Expressions monomes de la résistance de l'air sur les projectiles sphériques et oblongs dont l'axe de figure coïncide sensiblement avec la direction du mouvement 40
27, 28. Expressions de la résistance de l'air qui représentent, avec une approximation suffisante, les résultats des expériences russes et anglaises sur les projectiles sphériques et oblongs dont l'axe de figure coïncide sensiblement avec la direction du mouvement, et qui permettent en même temps d'intégrer facilement, quoique par approximation, les équations différentielles du mouvement des projectiles 41
29. Résistance de l'air sur les projectiles oblongs, lorsque leur axe de figure ne coïncide pas avec la direction du mouvement 43
30. Accélération de la résistance de l'air 44
31. Poids d'un mètre cube d'air 46

Chapitre II.

MOUVEMENT DANS L'AIR DES PROJECTILES SPHÉRIQUES QUI N'EXÉCUTENT PAS DE ROTATION.

§ I.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT.

32. Équations différentielles du mouvement 48
33. Déterminer la loi de la résistance d'après la trajectoire que décrit le projectile 51

§ II.

DISCUSSION DE LA TRAJECTOIRE DANS L'AIR D'UN PROJECTILE SPHÉRIQUE QUI N'A PAS DE ROTATION.

34. Propriétés de la résistance de l'air prises pour bases dans la discussion de la trajectoire. — 35. Variation de la vitesse. — 36. Limite de l'inclinaison de la trajectoire dans la branche descendante. — Limite de la vitesse. — Tableau des limites des vitesses que peuvent acquérir nos projectiles sphériques par leur chute dans l'air 52
37. Durée du trajet. — 38. Longueur de l'arc. — 39. Asymptote de la branche descendante. — 40. Rayon de courbure 59

Digitized by Google

Pag.

41. La vitesse et le rayon de courbure, pour des inclinaisons de la trajectoire égales, mais de signes contraires, sont plus grands dans la branche ascendante que dans la branche descendante. — 42. L'angle de chute sur un terrain situé au même niveau que la bouche à feu est plus grand que l'angle de projection. — 43. La vitesse au point de chute, celui-ci étant situé au même niveau que la bouche à feu, est plus petite que la vitesse au point de départ. — 44. L'amplitude de la branche ascendante est plus grande que celle de la branche descendante 64

§ III.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT.

45. Cas où il est facile d'intégrer l'équation différentielle du mouvement.— 46. Intégration des équations différentielles du mouvement dans le cas où la résistance de l'air est exprimée par un monome proportionnel à la n^{me} puissance de la vitesse. — 47. Conditions de la similitude des trajectoires décrites dans l'air par les projectiles sphériques qui n'ont pas de mouvement de rotation 67

48. Équations du mouvement dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle à la première puissance de la vitesse. — 49. Relation entre la résistance, les ordonnées et les angles d'inclinaison, pour une même valeur de l'abscisse, quelle que soit la loi de la résistance 72

50. Méthode d'approximation pour intégrer les équations différentielles du monvement 74

51. Application au cas où la résistance est exprimée par un binome dont le premier terme est proportionnel au carré de la vitesse et le second à la quatrième puissance de la vitesse 77

52. Application au cas où la résistance est exprimée par un terme proportionnel au carré de la vitesse 81

53. Application au cas où la résistance est exprimée par un terme proportionnel à la sixième puissance de la vitesse. 82

54. Application au cas où la résistance est exprimée par un terme proportionnel au cube de la vitesse. — 55. Application au cas où la résistance est exprimée par un terme proportionnel à la quatrième puissance de la vitesse 83

56. Relation entre les fonctions par lesquelles les équations du mouvement dans l'air diffèrent de celles du mouvement dans le vide 85

57. Usage des tables des fonctions e^z, $F_1(z)$, $F(z)$, $\mathfrak{P}(z)$, $\mathfrak{J}(z)$, $\mathfrak{V}(z)$, $\mathfrak{T}(z)$. — 58. Usage des tables des fonctions $\mathfrak{P}(z, V_0^2)$, $\mathfrak{J}(z, V_0^2)$.— 59. Usage des tables des fonctions $\mathfrak{V}(z, V_0^2)$, $\mathfrak{T}(z, V_0^2)$. — 60. Usage des tables des fonctions $z.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$, $z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$. 86

61. Détermination de la valeur de la constante α introduite pour intégrer, par approximation, les équations différentielles du mouvement 96

62. Choix des points de division d'une trajectoire en plusieurs parties . . . 98

Digitized by Google

Chapitre III.

SOLUTION DES PROBLÈMES SUR LE TIR DES PROJECTILES SPHÉRIQUES QUI N'ONT PAS DE MOUVEMENT DE ROTATION.

I. Tir courbe à fortes charges.

Pag.

63. Calcul de la trajectoire par parties. — Moyen de tenir approximativement compte de la diminution de la densité de l'air avec l'accroissement de la hauteur au-dessus du sol. — 64. Application au calcul de la trajectoire d'un boulet sphérique tiré du canon de 24^{l}, avec une vitesse initiale de $522^{m:s}$, sous l'angle de projection de 30° 102

II. Tir courbe à faibles charges.

65. Solution des problèmes sur le jet des projectiles à de faibles charges. — 66. Déterminer la portée dans le cas où le point de chute est à la hauteur de la bouche à feu. Limite supérieure de la portée. — 67. Limite inférieure de la portée. — 68. Méthode d'Euler pour déterminer la portée du tir courbe. — 69. La limite inférieure et la limite supérieure de la portée diffèrent peu l'une de l'autre. — 70. Déterminer la portée dans le cas où le point de chute n'est pas à hauteur de la bouche à feu 109

71. Déterminer la vitesse initiale d'un projectile, tiré sous un angle de projection donné, qui doit toucher un point donné. — 72. Déterminer l'angle de projection sous lequel un projectile, tiré avec une vitesse donnée, doit toucher un point donné. — 73. Déterminer l'angle et la vitesse de chute, la durée du trajet et la hauteur totale du jet 11

74. Angle de plus grande portée. — 75. Calcul de l'angle de plus grande portée. Application à un boulet sphérique de 24^{l} tiré avec une vitesse initiale de $522^{m:s}$ et à un obus de 80^{l} projeté avec une vitesse initiale de $115^{m:s}$ 118

III. Tir direct.

§ I.

TIR DIRECT À VITESSES INITIALES DÉPASSANT $376^{m:s}$.

76. Exposé. — 77. Les distances verticales des points de la trajectoire à sa tangente au point de départ sont indépendantes des angles de projection, lorsque le mouvement a lieu dans le vide et dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la première puissance de la vitesse. — 78. Limites entre lesquelles sont comprises ces distances verticales des points de deux trajectoires correspondantes à deux angles différents de projection, dans l'hypothèse d'une loi quelconque de la résistance. — 79. Tant que les angles de projection ne sont pas grands, on peut admettre l'indépendance de ces distances verticales et des angles de projection pour toutes les expressions de la résistance 124

Digitized by Google

Pag.

80. Calculer par parties la trajectoire sous un certain angle de projection et déterminer, d'après les résultats obtenus, les angles de projection, les angles et les vitesses de chute et les durées qui correspondent à différentes portées. — 81. Application au calcul de la table de tir du canon de $273^{m.m}$ avec un boulet sphérique animé d'une vitesse initiale de $438^{m:s}$. — 82. Degré de précision des résultats obtenus 130

83. Dans les cas ordinaires du tir direct l'angle de projection rapporté à la ligne qui va de la bouche à feu au point à battre, est sensiblement indépendant de l'élévation de ce point 136

84. Cas où la vitesse de chute n'est pas inférieure à $376^{m:s}$. — 85. Déterminer la vitesse initiale d'après celle que le projectile possède à une petite distance de la bouche à feu. — 86. Pour des durées de trajets qui ne dépassent pas $0^s,15$, la vitesse du projectile au point milieu du trajet est sensiblement égale au rapport de la longueur du trajet à sa durée 137

§ II.

TIR DIRECT À VITESSES INITIALES INFÉRIEURES À $376^{m:s}$.

87. Exposé. — 88. Déterminer la portée connaissant l'angle de projection et la vitesse initiale. — 89. Déterminer la vitesse initiale d'un projectile, tiré sous un angle de projection donné, qui doit toucher un point donné. — 90. Déterminer l'angle de projection sous lequel un projectile, tiré avec une vitesse initiale donnée, doit toucher un point donné. — 91. Déterminer l'angle et la vitesse de chute et la durée du trajet. — 92. Déterminer la vitesse initiale d'après celle que le projectile possède à une petite distance de la bouche à feu. — 93. Déterminer l'angle de projection rapporté à la ligne qui va de la bouche à feu au but, lorsque l'élévation du but et l'angle de projection ne sont pas considérables 139

94. Relation entre les hauteurs des hausses, les angles de projection et les angles d'élévation du but. — 95. Relation entre les déplacements latéraux de la hausse et les déviations latérales des projectiles. — 96. Erreur due au pointage. — 97. Erreur due à l'inclinaison des tourillons 143

IV. Tir plongeant.

98. Exposé. — 99. Déterminer la vitesse initiale et l'angle de projection d'un projectile qui doit passer par deux points donnés. — 100. Déterminer la vitesse initiale et l'angle de projection d'un projectile qui doit passer par un point donné sous une inclinaison donnée. 147

101. Limite de la hauteur à laquelle on peut raser la crête d'un parapet sous une inclinaison donnée. — 102. Limite de la hauteur à laquelle on peut, en rasant la crête d'un parapet, toucher un point donné du terre-plein 151

Digitized by Google

Chapitre IV.

MOUVEMENT DES PROJECTILES OBLONGS DANS L'AIR.

§ I.

MOUVEMENT DE ROTATION DES PROJECTILES OBLONGS.

Pag.

103. Équations du mouvement de rotation d'un corps solide. — 104. Projections de l'axe du couple de la résistance de l'air sur les axes principaux d'un projectile oblong. — 105. Expression du couple de la résistance de l'air, quand l'angle que fait l'axe de figure du projectile avec la tangente n'est pas grand. — 106. Équations différentielles du mouvement de rotation d'un projectile oblong, la tangente à la trajectoire étant supposée immobile 154

107. La vitesse angulaire autour de l'axe de figure du projectile est constante pendant toute la durée du mouvement. — 108. Vitesse angulaire $\frac{dv}{dt}$ autour de la tangente supposée immobile en fonction de l'angle δ que fait l'axe de figure avec la tangente. — 109. Vitesse angulaire $\frac{d\delta}{dt}$ autour de l'axe du couple de la résistance en fonction de l'angle δ, la projection de la résistance de l'air sur l'axe de figure du projectile étant supposée constante 159

110. Angle δ que fait l'axe de figure avec la tangente en fonction du temps. — 111. Vitesse angulaire $\frac{d\delta}{dt}$ autour de l'axe du couple de la résistance en fonction du temps. — 112. Vitesse angulaire $\frac{dv}{dt}$ autour de la tangente en fonction du temps. — 113. Angle v que fait le plan vertical passant par la tangente avec le plan passant par la même tangente et l'axe de figure en fonction du temps. — 114. Équations polaires de la courbe que décrirait le pôle de l'axe de figure sur un plan perpendiculaire à la tangente, si elle était immobile et si la projection de la résistance de l'air sur l'axe de figure était constante 162

115. Limite de l'accroissement de l'angle δ par suite de l'action du couple de la résistance de l'air. — 116. Si la tangente à la trajectoire était immobile et la résistance de l'air constante, l'axe de figure du projectile décrirait sensiblement autour de la tangente un cône circulaire avec une vitesse angulaire moyenne constante. — Expression de cette vitesse angulaire $\frac{dv}{dt}$ constante 167

117. Équations différentielles du mouvement de rotation de l'axe de figure d'un projectile oblong, quand on prend en considération l'abaissement de la tangente à la trajectoire et la variation de la résistance de l'air durant le trajet du projectile 171

118. Intégration, par approximation, des équations différentielles du mouvement de rotation de l'axe de figure du projectile dans le cas du tir direct, pour lequel les angles δ sont toujours petits. — Propriétés du mouvement d'oscillation de l'axe de figure autour de la tangente 174

Digitized by Google

Pag

119. Oscillation moyenne de l'axe de figure du projectile 191

120. Recherche du mouvement d'oscillation de l'axe de figure d'un obus de 4^l tiré sous l'angle de projection de 10° avec une vitesse initiale de $305^{m:s}$. 194

121. Intégration, par approximation, des équations différentielles du mouvement de rotation de l'axe de figure du projectile, quand le tir a lieu sous de grands angles de projection. — 122. Cas du tir courbe, quand $\frac{q}{2} > 1$. — 123. Oscillation moyenne de l'axe de figure. — 124. Cas du tir courbe, quand $\frac{q}{2} \leqq 1$. 196

§ II.

CALCUL DE LA TRAJECTOIRE D'UN PROJECTILE OBLONG DANS L'AIR.

125. Équations différentielles du mouvement de translation d'un projectile oblong dans l'air 206

126. Intégration, par approximation, des équations différentielles du mouvement de traslation dans le cas du tir direct. — 127. Calcul de la trajectoire de l'obus de 4^l, tiré sous l'angle de projection de 10° avec une vitesse initiale de $305^{m:s}$. — Valeurs des corrections fournies par les termes négligés dans les équations différentielles du mouvement . . 212

128. Formules simplifiées du mouvement de translation d'un projectile oblong dans le cas du tir direct 222

129. Intégration, par approximation, des équations différentielles du mouvement de translation dans le cas du tir courbe, quand $\frac{q}{2} > 1$. — 130. Formules simplifiées de ce mouvement 226

131. Intégration, par approximation, des équations différentielles du mouvement de translation dans le cas du tir courbe, quand $\frac{q}{2} \leqq 1$. — Corrections fournies par les termes négligés. — 132. Calcul de la trajectoire d'un obus de 4^l, tiré sous l'angle de projection de 45°, avec une vitesse initiale de $50^{m:s}$. — 133. Formules simplifiées de ce mouvement 229

§ III.

IMAGE DE LA TRAJECTOIRE DES PROJECTILES OBLONGS DANS L'AIR.

134. Image du mouvement de rotation de l'axe de figure d'un projectile oblong. — 135. Image du mouvement de translation d'un projectile oblong 236

Digitized by Google

Chapitre V.

Solution des problèmes sur le tir des projectiles oblongs.

§ I.

TIR DIRECT.

Pag.

136. Tir direct à vitesses initiales dépassant $360^{m:s}$. — Calculer par parties la projection verticale de la trajectoire sous un certain angle de tir, et déterminer, d'après les résultats obtenus, les angles de projection, les angles et les vitesses de chute et les durées qui correspondent à différentes portées. — Calculer les dérivations correspondantes à diverses portées. 241

137. Cas où la vitesse de chute n'est pas inférieure à $360^{m:s}$. — 138. Déterminer la vitesse initiale d'après celle que le projectile possède à une petite distance de la bouche à feu 249

139. Tir direct à vitesses initiales comprises entre $360^{m:s}$ et $280^{m:s}$. — 140. Cas où la vitesse de chute n'est pas inférieure à $280^{m:s}$, la vitesse initiale ne dépassant pas $360^{m:s}$. — 141. Déterminer la vitesse initiale d'après celle que le projectile possède à une petite distance de la bouche à feu 251

142. Tir direct à vitesses initiales moindres que $280^{m:s}$. Possibilité d'appliquer les formules qui se rapportent à ce cas au tir avec des vitesses initiales jusqu'à $325^{m:s}$. — 143. Déterminer la vitesse initiale d'après celle que le projectile possède à une petite distance de la bouche à feu. 253

144. Comparaison des résultats fournis par les formules avec ceux du tir. . 256

§ II.

TIR COURBE.

145. Tir courbe à faibles charges. — 146. Déterminer la portée connaissant l'angle de projection et la vitesse initiale. — 147. Déterminer la vitesse initiale d'un projectile, tiré sous un angle de projection donné, qui doit passer par un point donné. — 148. Déterminer l'angle de projection sous lequel un projectile, tiré avec une vitesse initiale donnée, doit toucher un point donné. — 149. Déterminer l'angle et la vitesse de chute, la durée du trajet et la hauteur totale du jet. — 150. Déterminer la dérivation. — 151. Comparaison des résultats fournis par les formules avec ceux du tir. 259

152. Tir à fortes charges sous de grands angles de projection 263

§ III.

TIR PLONGEANT.

153. Exposé. — 154. Déterminer la vitesse initiale et l'angle de projection d'un projectile qui doit passer par deux points donnés. — 155. Déterminer la vitesse initiale et l'angle de projection d'un projectile qui doit passer par un point donné sous une inclinaison donnée. — 156. Déterminer la dérivation correspondante à la distance donnée 264

Digitized by Google

Pag.

157. Limite de la hauteur à laquelle on peut raser la crête d'un parapet sous une inclinaison donnée. — 158. Limite de la hauteur à laquelle on peut, en rasant la crête d'un parapet, toucher un point donné du terre-plein 265

Appendice.

FORMULES D'INTERPOLATION PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

Exposé 267

§ I.

Série qui exprime la fonction cherchée, quand il s'agit de trouver les valeurs les plus probables des coefficients a, b, c,... de l'expression $U=a+bx+cx^2+\ldots\ldots$, et quand on connaît des observations les valeurs de $u=u_1, u_2, \ldots u_n$ correspondantes aux valeurs *équidistantes* de $x=h, 2h, \ldots nh$ 268

Exemple: Calculer l'équation de la trajectoire d'un projectile sphérique, d'après les ordonnées observées à des distances équidistantes . . 271

§ II.

Formules pour le calcul des termes de la suite qui exprime la fonction cherchée, quand il s'agit de trouver les valeurs les plus probables des coefficients a, b, c,... de l'expression $U=F(x).[a+bx+cx^2+\ldots]$, dans laquelle $F(x)$ est une certaine fonction de la variable x, et quand on connaît des observations les valeurs de $u=u_1, u_2, \ldots u_n$ correspondantes à diverses valeurs de $x=x_1, x_2, \ldots x_n$ 276

Exemple: Calculer la projection de la trajectoire d'un projectile oblong sur le plan vertical du tir d'après les angles de projection obtenus dans le tir à différentes distances 278

Annexe.

Tables pour faciliter le calcul des formules balistiques.

Digitized by Google

Digitized by Google

ERRATA.

Page.	Ligne.	Au lieu de:	Lisez:
9	17	$-\frac{x^2}{R^2}\,dx$	$-\frac{x^3}{R^2}\,dx$
10	4	$(h^2+R)^2$	(h^2+R^2)
15	14	$\int^{\pi}$	$\int_0^{\pi}$
21	27	$GEGF$	$CEGF$
23	16	$(1-\tan g^2\,\delta.\cos^2 L)$	$(1-\tan g^2\,\delta.\cos^2 L)$
24	4	$\frac{1}{4}r^3$	$\frac{1}{4}r^2$
25	11	$\left(\frac{s}{2}.\frac{1}{\sec^3\delta+\varepsilon^2}\right)_{s=0}^{s=\infty}$	$\left(\frac{s}{2}.\frac{1}{\sec^2\delta+\varepsilon^2}\right)_{s=0}^{s=\infty}$
27	17	$\frac{X}{Y}\rho_A$	$\frac{Y}{X}\rho_A$
28	7	$\frac{X^2}{X_0^3}$	$\frac{X^2}{X_0^2}$
32	3	$\rho=\frac{V+V'}{2}$	$v=\frac{V+V'}{2}$
49	23	$\frac{v^2}{\gamma}\,g\cos\theta$	$\frac{v^2}{\gamma}=g\cos\theta$
53	23	$\frac{d^2v}{dt^2}$	$\frac{d^2v}{dt^2}$
55	9	$\cos\theta_0.\tan g\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_0}{2}\right)$	$\cos\theta.\tan g\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_0}{2}\right)$
60	7	$\frac{1.3\ldots(n-}{2.4\ldots n}\log\tan g\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$	$\frac{1.3\ldots(n-1)}{2.4\ldots\ n}\log\tan g\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$
63	14	$\frac{d\gamma}{d\theta}+$	$\frac{d\gamma}{d\vartheta}=$
65	3	$\int_0^{-\theta}$	$\int_0^{-\theta_1}$
72	6	$\frac{nV'^n}{k'^n}$	$\frac{n{V'_1}^n}{k'^n}$
82	2	$\frac{ge}{{v_1}^2}$	$\frac{gc}{{v_1}^2}$
	17	$(+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}$	$(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}$
83	17	$\frac{(\alpha v_1)^3}{2gc^2}$	$\frac{v^3}{2gc^2}$
84	10	$\frac{2gc^3}{3\alpha^2{v_1}^3}$	$\frac{2gc^2}{3\alpha^2{v_1}^3}$
85	8	$\left(1+\frac{\alpha^3{V_1}^2x}{c^3}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\left(1+\frac{\alpha^3{V_1}^2x}{c^3}\right)^{\frac{3}{2}}$
90	25	$\equiv$	$=$
	26	$\left(1=\frac{57}{200}\right)$	$\left(1-\frac{57}{200}\right)$
	29	0.3907	0,3907
91	3	03	0,3
92	3	03	0,3
93	15	03907	0,3907
107	18	*un*	*une*
114	13	$\frac{\alpha x}{c}$	$\frac{\alpha a}{c}$

Digitized by Google

Page.	Ligne.	Au lieu de:	Lisez:
115	1	$\frac{\alpha x}{c}$	$\frac{\alpha a}{c}$
	1	multipliam	multipliant
	9	$\frac{ga^3}{2V^2\cos^2\varphi}$	$\frac{ga^2}{2V^2\cos^2\varphi}$
	12	$ga\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha a}{e}, \frac{\alpha^2 V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right)$	$ga\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha a}{c}, \frac{\alpha^2 V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right)$
	12	$ga^2\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha a}{e}, \frac{\alpha^2 V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right)$	$qa^2\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha a}{c}, \frac{\alpha^2 V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right)$
133	27	$\sin\varphi'''$	$\sin\varphi_3$
141	22	$\frac{a}{e}$	$\frac{a}{c}$
149	3	$\frac{ga'}{2V_1^3}$	$\frac{ga'}{2V_1^2}$
150	15	$\mathfrak{P}\left(\frac{a}{e}, V_0^2\right)$	$\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)$
	19	$F_1\left(\frac{a}{e}\right)$	$F_1\left(\frac{a}{c}\right)$
	19	$\mathfrak{P}\left(\frac{a}{e}, V_0^2\right)$	$\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)$
159	2	$\cos(x_1,)x$	$\cos(x_1, x)$
162	19	$\frac{2hR\rho_A B}{A^3 p_0^2}$	$\frac{2hR\rho_A B}{A^2 p_0^2}$
164	12 et 14	$\frac{hR\rho_A \sin\delta_0}{A^2 p_0^2}$	$\frac{hR\rho_A B\sin\delta_0}{A^2 p_0^2}$
165	16 et 17		
171	3	δv	dv
176	10	$(v)_m$	$2\pi\mu V(v)_m$
179	3	$[f(v)_{m_1}$	$[f(v)]_{m_1}$
180	12	$\frac{dv}{di}$	$\frac{dv}{dt}$
184	19	$\frac{(\alpha V_1)^{n-1}}{2gc^{n-1}}$	$\frac{(\alpha V_1)^{n+1}}{2gc^{n-1}}$
214	13	$\sin\delta$	$\sin\nu$
215	21	$\sin\delta$	$\sin\nu$
225	11	$\left(1+\frac{\alpha V_1}{2c}t\right)^2$	$\left(1+\frac{\alpha V_1}{2c}t\right)^2$
229	4	$]^{\overline{n-1}}$	$]^{\frac{2}{n-1}}$
230	16	$\frac{\alpha\beta V_1}{2c}t$	$\frac{\alpha\beta V_1}{2c}t$
235	18	$\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arc\,tang} e^{-\frac{1-\frac{q}{2}}{2}\frac{gt}{\alpha(v)_m}}$	$\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arc\,tang} e^{-\frac{1+\frac{q}{2}}{2}\frac{gt}{\alpha(v)_m}}$
245	5	$V''\cos\varphi'' = \frac{V'\cos\varphi'}{\mathfrak{V}(s)}$,	$V''\cos\varphi''' = \frac{V'\cos\varphi''}{\mathfrak{V}(s)}$;
253	6	$\frac{2av^4}{c_5}$	$\frac{2av^4}{c^5}$
255	5	$\frac{\alpha a}{a}$	$\frac{\alpha a}{c}$
269	4	$(n^2-9)h^2$	$(n^2-9)h^3$

Digitized by Google

Complément à l'errata.

Page.	*Ligne.*	*Au lieu de:*	*Lisez:*
186	11 au numérateur et au dénominateur	$1 + \frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha \cos\varphi}$	$1 + (n-1)\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha \cos\varphi}$
	12	2	$2(n-1)$
	12	$2(2n-3)$	$2(n-1)(n-3)$
	14, 15, 16, 18	$2\frac{n+1}{n-1}$	$2(n+1)$
	14	$-2\frac{2n^3-3n^2-4n+1}{(n-1)^2}$	$+2(n+1)(n-1)$
	15	$-2\frac{4n^3-5n^2-6n+3}{(n-1)^2}$	$+2(n+1)(n-3)$
	16	$-2\frac{6n^3-7n^2-8n+5}{(n-1)^2}$	$+2(n+1)(n-5)$
	18	$-2\frac{(2i-2)n^3-(2i-1)n^2-2in+(2i-3)}{(n-1)^2}$	$+2(n+1)[n-(2i-3)]$
	19	Ces expressions font voir que, pour les degrés de la résistance $n \geqq 2$, on a	Ces expressions font voir que
188	13, 15	$4(n-1)$	4
	17, 19	$8(n-1)$	$8(n+1)$
191	30		
192	2, 6, 9, 11		
193	3, 6, 9		
199	4, 6, 9, 12, 14, 22, 28		
200	4, 9, 10, 17, 18, 19	$\frac{n+1}{n-1}$	$(n+1)$
223	14, 15, 17, 20		
224	3, 4, 5		
228	13, 15, 16, 19, 22		
229	1, 2		
259	colonne des dérivations du canon de $22^{9\,m.m}$	13; 2,6; 0,2	18; 3,6; 0,3 *)

*) Corrigez conformément à ces nombres, sur la figure 26, la courbe des dérivations de l'obus de 229^{mm}.

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ DE BALISTIQUE EXTÉRIEURE.

PRÉLIMINAIRES.

1. *Définition et objet.* La Balistique (du grec βάλλω, je lance) est la science du mouvement des corps pesants lancés dans l'espace suivant une direction quelconque. Elle s'applique particulièrement à la recherche du mouvement des projectiles tirés des bouches à feu.

On distingue *la balistique intérieure*, qui a pour objet l'étude du mouvement du projectile dans l'âme de la bouche à feu, tant qu'il est soumis à l'action des gaz de la poudre, de *la balistique extérieure*, qui a pour objet la recherche du mouvement du projectile lorsque celui-ci est sorti de la bouche à feu, et soumis à l'action de la pesanteur et de la résistance du milieu dans lequel il se meut.

Digitized by Google

CHAPITRE I.

RÉSISTANCE DE L'AIR.

2. *Notions préliminaires sur la résistance des milieux.* Malgré les nombreuses recherches et expériences entreprises dans le but de déterminer la loi de la résistance des milieux au mouvement des corps solides, les notions que nous avons sur cette résistance sont encore bien incomplètes, à cause de la grande difficulté que présente la question.

On admet ordinairement qu'un corps, doué du seul mouvement de translation, dans un milieu quelconque, éprouve une résistance proportionnelle à la projection de la surface du corps sur un plan perpendiculaire à la direction du mouvement, et l'on distingue deux sortes de résistances.

La première consiste dans la force nécessaire pour vaincre la cohésion des molécules du milieu et leur frottement contre le corps en mouvement; cette résistance est communément considérée comme indépendante de la vitesse du corps.

La seconde naît du mouvement imprimé par le corps aux molécules du milieu. Cette résistance dépend de la vitesse du corps en mouvement.

Suivant la nature du milieu, l'une ou l'autre de ces résistances est prédominante. Dans les milieux solides, la résistance totale dépend essentiellement des forces de cohésion du milieu, tandis que dans l'air la résistance due à ces forces et au frottement est presque insensible, au moins pour les vitesses qui ne sont pas très faibles.

Digitized by Google

3. *Courant du fluide qui accompagne le corps en mouvement.* Un corps qui n'a que le seul mouvement de translation, et entièrement plongé dans un fluide indéfini, pousse devant lui un certain nombre de molécules fluides et les force à s'écarter de sa surface antérieure avec une certaine vitesse qui doit croître avec la vitesse du corps. Les molécules du fluide, placées sur la route du corps, se meuvent dans certaines directions, formant des filets qui contournent le corps et remplissent l'espace vide qui tend à se former à l'arrière du corps, d'où résulte sur la route suivie par le corps un courant du fluide qui l'accompagne.

Dubuat a déterminé la valeur de ce courant, pour de faibles vitesses des corps en mouvement, sur la considération suivante. Pour que les oscillations des pendules dans différents milieux fluides soient tautochrones, il faut que les distances de leurs centres d'oscillation à leurs axes de suspension soient proportionnelles aux accélérations de la pesanteur dans ces milieux. On juge des différentes accélérations de la pesanteur auxquelles sont soumis les corps dans divers fluides par le poids qu'ils conservent dans ces fluides. Appelons a la distance du centre d'oscillation à l'axe de suspension d'un pendule qui fait dans le vide un nombre connu d'oscillations dans un temps donné; l la distance du centre d'oscillation à l'axe de suspension d'un autre pendule qui fait dans le fluide le même nombre d'oscillations dans un même temps que le premier; P le poids dans le vide du corps qui sert de pendule, Π le poids du fluide déplacé par le corps ou le poids du volume de fluide égal au volume du corps; $P-\Pi$ exprimera le poids du corps dans le fluide et $\frac{P}{P-\Pi}$ sera le rapport des accélérations dans le vide et dans le fluide. Si le corps dans ses oscillations dans le fluide n'entraînait pas avec lui une partie du fluide, on aurait $l=a\frac{P-\Pi}{P}$. Mais, d'après les observations faites par Dubuat sur la durée des oscillations de différents corps dans l'eau, ainsi que dans l'air, la distance l était constamment moindre que celle qui résulte de la formule. Dubuat en conclut qu'un corps entraîne dans ses oscillations une partie du fluide. Pour déterminer le volume du fluide

Digitized by Google

qui accompagne le corps, appelons $\Delta\Pi$ le poids de ce volume dans le vide; la masse en mouvement étant composée de la masse du corps et de la masse du fluide entraîné, son poids dans le vide sera $P+\Delta\Pi$ et dans le fluide il sera $P-\Pi$, et on aura

$$l = a\,\frac{P-\Pi}{P+\Delta\Pi};$$

on en tire

$$\frac{\Delta\Pi}{\Pi} = \frac{a}{l}\cdot\frac{P-\Pi}{\Pi} - \frac{P}{\Pi},$$

où $\frac{\Delta\Pi}{\Pi}$ exprime le rapport du poids du fluide qui accompagne le corps au poids du volume du fluide égal au volume du corps, ou le rapport du volume du fluide qui accompagne le corps au volume du corps.

En faisant osciller dans l'eau, ainsi que dans l'air, des sphères de différentes dimensions, Dubuat a trouvé que le volume du fluide entraîné est d'environ 0,6 du volume des sphères.

Sous de grandes vitesses le volume du fluide qui accompagne le corps est plus considérable que sous de petites; c'est ainsi que dans le jet des obus sphériques, lancés des mortiers sous l'angle de 45°, avec des vitesses qui donnent des portées d'environ 600 mètres, on aperçoit quelquefois à leur partie postérieure une masse d'air noirâtre, dont la longueur est d'au moins deux ou trois fois le diamètre de l'obus.

Dans la recherche du mouvement des projectiles dans l'air, on peut, à cause de leur grande densité par rapport à celle de l'air, négliger le poids de l'air déplacé par le projectile, ainsi que celui qui l'accompagne, devant le poids du projectile.

4. *Influence de la compressibilité de l'air.* Quand un corps se meut dans un fluide gazeux, comme l'air, qui est très compressible, la densité de l'air est plus forte en avant du mobile et plus faible en arrière que celle qui correspond à l'état de repos. Cette circonstance, avec d'autres causes, fait sensiblement croître la résistance sur les corps qui se meuvent avec des vitesses considérables, comme celles des projectiles tirés des bouches à feu.

Digitized by Google

5. *Variation de pression résultant de la rotation des corps durant leur mouvement de translation.* Les phénomènes qui ont lieu dans l'air lors du mouvement d'un corps doué d'une rotation sont encore plus compliqués. Il se produit dans ce cas, comme l'ont démontré les expériences de Magnus *), une augmentation de pression sur certaines parties de la surface du corps et une diminution sur d'autres, suivant que ces parties opèrent un mouvement de rotation dans un sens contraire au mouvement de translation ou dans le même sens que ce dernier. Cette différence de pression est la cause des déviations considérables des projectiles sphériques excentriques doués d'un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire à la direction de leur mouvement de translation.

Dans le mouvement des projectiles oblongs doués d'une grande vitesse de translation et en même temps d'une grande vitesse de rotation autour de leur axe de figure, cet axe ne s'éloigne pas considérablement de la direction de la vitesse de leur centre de gravité, et dans le mouvement des projectiles oblongs tirés avec de faibles vitesses, leur vitesse de rotation n'est pas bien grande. Par suite, dans l'un et dans l'autre cas, la différence des pressions de l'air sur les côtés opposés du projectile ne peut être bien grande; nous en ferons abstraction, ainsi que du frottement de l'air contre la surface du projectile, et, dans le calcul de la résistance de l'air sur les projectiles oblongs doués d'un mouvement de rotation autour de leur axe de figure, nous nous bornerons à considérer (comme pour les projectiles qui n'ont pas de rotation) la résistance qui s'exerce normalement sur chaque élément de la surface, soumis à l'action de la résistance.

§ I.

CALCUL DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR.

6. *Base du calcul de la résistance de l'air.* Les hypothèses faites dans le dernier temps sur le mouvement moléculaire des gaz

*) Sur la déviation des projectiles par G. Magnus, traduction de M. Rieffel. 1863.

Digitized by Google

sont encore trop peu développées pour pouvoir conduire à une solution assez exacte de la question de la résistance. Nous nous bornerons au procédé ordinaire du calcul de la résistance de l'air, basé sur la considération du choc d'un corps doué d'une vitesse de translation connue contre l'air supposé en repos. Ce calcul a pour lui la simplicité, et donne le moyen de connaître la relation entre la résistance de l'air sur les surfaces de révolution et les angles que font leurs axes de figure avec la direction du mouvement, ce que l'on ne peut pas déduire des résultats des expériences faites jusqu'à ce jour sur la résistance de l'air.

7. *Résistance de l'air sur un plan.* Appelons P le poids du plan; S sa surface; v la vitesse avec laquelle il frappe l'air supposé en repos; Π le poids de l'unité de volume d'air, et g l'accélération de la gravité.

Nous supposerons d'abord que le plan est perpendiculaire à la direction du mouvement. Le plan parcourt dans l'élément de temps dt le chemin vdt et déplace un volume d'air $Svdt$; la masse de l'air mise en mouvement dans l'élément de temps aura pour valeur $\frac{\Pi}{g} Svdt$. Pendant le choc du plan contre l'air il se développe à leurs points de contact des forces intérieures qui tendent à diminuer la vitesse du plan et à communiquer une certaine vitesse à l'air, de sorte qu'après un certain temps, très court, le plan et l'air qu'il met en mouvement doivent avoir une vitesse commune, qu'ils doivent conserver après le choc, si l'on envisage le plan et l'air comme des corps non élastiques. Comme pendant le choc il ne se développe que des forces intérieures, la somme des quantités de mouvement du plan et de l'air, qu'il met en mouvement, doit être la même lorsque le plan et l'air ont acquis une vitesse commune, qu'à l'origine du choc. La quantité du mouvement du plan avant le choc est $\frac{P}{g} v$; la quantité du mouvement de l'air avant le choc est nulle, puisque avant ce choc l'air est supposé en repos; si l'on représente par dv la diminution de la vitesse du plan pendant l'élément de temps dt, on aura $v—dv$ pour la vitesse du plan à la fin du temps dt, et comme on suppose qu'après cet élément

Digitized by Google

de temps le plan et l'air qu'il met en mouvement acquièrent une vitesse commune, on aura pour la somme des quantités de mouvement du mobile et de l'air, quand ils ont acquis une vitesse commune, l'expression $\left(\frac{P}{g}+\frac{\Pi}{g}Svdt\right)(v-dv)$. En l'égalant à la quantité de mouvement avant le choc, nous aurons

$$\frac{P}{g}v=\left(\frac{P}{g}+\frac{\Pi}{g}Svdt\right)(v-dv),$$

d'où l'on déduit la force de la résistance de l'air sur le plan S perpendiculaire à la direction du mouvement

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}=\frac{\Pi}{g}Sv^2.$$

Si le plan S n'est pas perpendiculaire à la direction du mouvement, en appelant ε l'angle que fait la normale au plan avec la direction du mouvement, on peut décomposer la vitesse v suivant le mouvement en deux autres: l'une $v\cos\varepsilon$ perpendiculaire au plan S, dont dépend la résistance, et l'autre $v\sin\varepsilon$ parallèle au plan S, avec laquelle l'air glisse sur le plan; on peut admettre que la résistance en est indépendante. En mettant dans l'expression de la résistance sur un plan perpendiculaire à la direction du mouvement, au lieu de v, la quantité $v\cos\varepsilon$, nous aurons pour la résistance normale sur le plan S oblique à la direction du mouvement

$$\frac{\Pi}{g}Sv^2\cos^2\varepsilon.$$

Si l'on considérait le plan et l'air comme des corps élastiques, on aurait, d'après la théorie du choc des corps élastiques, pour la résistance sur un plan, les expressions ci-dessus doublées.

Comme, dans le calcul de la résistance, nous n'avons pas pris en considération plusieurs circonstances qui accompagnent le mouvement d'un plan dans l'air, nous devons, pour obtenir des valeurs réelles de la résistance, multiplier les valeurs obtenues par un coefficient déduit des expériences. En appelant ρ la résistance normale de l'air

Digitized by Google

sur le plan S, et k le coefficient déduit des expériences, on aura dans le cas *d'un plan perpendiculaire à la direction du mouvement*

$$\rho = k\frac{\Pi}{g} S.\, v^2,$$

et dans le cas *d'un plan oblique à la direction du mouvement*

$$\rho = k\frac{\Pi}{g} S.\, v^2 \cos^2 \varepsilon.$$

On voit par ce qui précède qu'on peut, dans le calcul de la résistance de l'air sur un corps quelconque, admettre la résistance élémentaire sur chaque élément de surface, soumis à l'action de la résistance, proportionnelle au produit de cet élément sur le carré de la projection normale de la vitesse.

8. *Résistance de l'air sur une surface de révolution dont l'axe de figure coïncide avec la direction du mouvement.* Soit ADB (fig. 1) la courbe génératrice de la surface de révolution qui se meut dans la direction de son axe de figure AO. Les éléments de la surface pour lesquels l'angle ε que fait la normale extérieure à l'élément avec la direction du mouvement est moindre que l'angle droit, sont seuls soumis à l'action de la résistance de l'air, de sorte que la partie antérieure de la surface, soumise à la résistance de l'air, est séparée de la partie postérieure, non soumise à la résistance, par la circonférence DD' de contact de la surface de révolution avec un cylindre circonscrit dont la génératrice est parallèle à la direction du mouvement. Prenons l'axe de figure OA pour l'axe des x. La surface élémentaire $mm'm''$, que nous nommerons $d\sigma$, éprouve dans la direction Nm qui lui est perpendiculaire une résistance ($n°$ 7) égale à $k\frac{\Pi}{g} d\sigma . v^2 \cos^2 \varepsilon$; décomposons-la en deux: l'une $k\frac{\Pi}{g} d\sigma . v^2 \cos^3 \varepsilon$ suivant la direction parallèle à l'axe de figure et l'autre $k\frac{\Pi}{g} d\sigma\, v^2 \cos^2 \varepsilon \sin \varepsilon$ suivant la direction perpendiculaire à l'axe de figure; la dernière sera détruite par la résistance égale et contraire sur la surface élémentaire $nn'n''$ qui se trouve dans la même section méridienne que la surface élémentaire $mm'm''$ et qui fait le même angle avec la direction du mouvement; par conséquent on n'a qu'à considérer la première

Digitized by Google

composante de la résistance $k\frac{\Pi}{g}d\sigma\, v^2 \cos^3 \varepsilon$. Si l'on étend cette expression sur toute la zone produite par la révolution de l'élément de l'arc *mm'*, dont la surface est $2\pi y ds$, on aura pour la résistance de l'air sur cette zone l'expression $2\pi k\frac{\Pi}{g} v^2 y \cos^3 \varepsilon\, ds$, ou, remarquant que $\cos \varepsilon = \frac{dy}{ds}$, cette expression deviendra $2\pi k\frac{\Pi}{g} v^2 y \frac{dy^3}{ds^2}$. L'intégrale de cette expression, étendue sur toute la partie antérieure de la surface, exprimera la résistance de l'air sur toute la surface de révolution.

9. *Résistance de l'air sur une sphère ou sur une demi-sphère qui se meut la partie convexe en avant et dont l'axe de figure coïncide avec la direction du mouvement.* Prenons le centre de la sphère pour origine des coordonnées et appelons R le rayon de la sphère. L'équation du cercle générateur est

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

On en tire

$$xdx + ydy = o;\ dy = -\frac{x}{y}dx;$$

$$dy^2 = \frac{x^2}{y^2}dx^2;\ dy^3 = -\frac{x^3}{y^3}dx^3;\ ds^2 = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)dx^2 = \frac{R^2}{y^2}dx^2;$$

$$y\frac{dy^3}{ds^2} = -\frac{x^2}{R^2}dx,$$

et

$$\rho = 2\pi k\frac{\Pi}{g} v^2 \frac{1}{R^2}\int_o^R x^3 dx,$$

ou

$$\rho = 0{,}5\, k\frac{\Pi}{g}\pi R^2 v^2.$$

10. *Résistance de l'air sur un cône qui se meut ayant son sommet en avant et dont l'axe de figure coïncide avec la direction du mouvement.* Prenons l'origine des coordonnées au centre de la base du cône. Appelons R le rayon de la base; h la hauteur du cône; λ l'angle que fait sa génératrice avec son axe de figure. L'équation de la droite génératrice est

$$y = (h - x)\operatorname{tang} \lambda = \frac{R}{h}(h - x).$$

Digitized by Google

On en tire

$$dy = -\frac{R}{h}dx;\ dy^2 = \frac{R^2}{h^2}dx^2;$$

$$dy^2 = -\frac{R^2}{h^2}dx^2;\ ds^2 = \frac{h^2+R^2}{h^2}dx^2;$$

$$y\frac{dy^2}{ds^2} = -\frac{R^4}{h^2(h^2+R)^2}(h-x)\,dx,$$

et

$$\rho = 2\pi k\frac{\Pi}{g}v^2\frac{R^4}{h^2(h^2+R^2)}\int_0^h (h-x)\,dx,$$

ou

$$\rho = k\frac{\Pi}{g}\pi R^2\frac{R^2}{h^2+R^2}v^2 = k\frac{\Pi}{g}\pi R^2\sin^2\lambda.v^2.$$

11. *Résistance de l'air sur une surface de révolution dont l'axe de figure fait un angle donné* δ *avec la direction du mouvement.* Prenons (fig. 2) pour l'axe OX l'axe de figure de la surface de révolution et pour le plan des XY un plan passant par l'axe de figure parallèlement à la direction de la vitesse v. Soit $d\sigma$ l'élément $mm'm''$ de la surface; ε l'angle NCv que fait la normale extérieure de la surface avec la direction de la vitesse; δ l'angle que fait l'axe de figure de la surface avec la direction de la vitesse. La résistance $d\rho$ de l'air sur l'élément $d\sigma$ de la surface sera exprimée par

$$d\rho = k\frac{\Pi}{g}v^2\cos^2\varepsilon\,d\sigma.$$

Les éléments de la surface pour lesquels on a $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ sont seuls soumis à l'action de la résistance de l'air. Par conséquent, l'équation

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

ou, ce qui est tout un, l'équation

$$\cos\varepsilon = 0,$$

jointe à celle de la surface, détermine une courbe qui divise cette surface en deux parties telles que la valeur de cos ε sera positive pour

Digitized by Google

tous les points de l'une et négative pour ceux de l'autre. La première sera la partie antérieure du corps qui est soumis à la résistance de l'air, la seconde sera la partie postérieure qui n'éprouve pas de résistance. Cette courbe de séparation entre la partie antérieure et la partie postérieure est, en d'autres termes, la ligne de contact de la surface dont il s'agit avec un cylindre circonscrit dont la génératrice est parallèle à la direction de la vitesse.

Nous définirons la position de chaque point m de la surface de révolution par sa latitude λ, égale à l'angle Nms que fait la normale en ce point avec le plan des YZ, et par sa longitude L, égale à l'angle dièdre vAm que fait le plan des XY avec le plan méridien passant par le point m, angle mesuré par l'angle plan Mos ou YOS.

L'élément de surface $d\sigma = mm'm''$ est un rectangle, dont le côté $\overline{mm'} = \overline{om} \times \text{angle}\,(mom') = \overline{Op} \times \text{angle}\,(SoS')$ et dont le côté $\overline{mm''} = \overline{Cm} \times \text{angle}\,(mCm'')$. L'angle $(SOS') = dL$ et l'angle $(mCm'') = d\lambda$. En désignant par y l'ordonnée OP du point M situé sur la courbe de la section méridienne principale et qui a pour abscisse x la ligne MP, égale à l'abscisse mp du point m, et par γ le rayon de courbure Cm de la surface au point m, on aura le côté $\overline{mm'} = y dL$ et le côte $\overline{mm''} = \gamma d\lambda$, de manière que

$$d\sigma = \gamma \,.\, y \,.\, d\lambda \,.\, dL$$

et

$$d\rho = k \frac{\Pi}{g} v^2 \,\gamma \,.\, y \,.\, \cos^2 \varepsilon \,.\, d\lambda \,.\, dL.$$

Cherchons les expressions des composantes parallèles aux axes OX, OY, OZ de cette résistance normale élémentaire.

L'angle que fait la normale extérieure Nm avec l'axe OX étant $\frac{\pi}{2} - \lambda$, la composante $d\rho_x$ de la résistance $d\rho$ parallèle à l'axe OX est

$$d\rho_x = d\rho \,.\, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = k \frac{\Pi}{g} v^2 \gamma y \cos^2 \varepsilon \sin \lambda \,.\, d\lambda \,.\, dL.$$

Pour avoir les composantes $d\rho_y$ et $d\rho_z$ de la résistance $d\rho$ parallèles aux axes OY et OZ, projetons d'abord la résistance $d\rho$ sur le plan des YZ; cette projection $d\rho_{yz}$ aura pour valeur

Digitized by Google

$$d\varrho_{yz} = d\varrho \cdot \cos\lambda = k\frac{\Pi}{g} \cdot v^2 \gamma y \cos^2\varepsilon \cos\lambda \, d\lambda \cdot dL,$$

et les projections de $d\varrho_{yz}$ sur les axes OY et OZ seront exprimées par

$$d\varrho_y = d\varrho_{yz} \cdot \cos L = k\frac{\Pi}{g} v^2 \gamma y \cos^2\varepsilon \cos\lambda \cos L d\lambda \cdot dL,$$

et

$$d\varrho_z = d\varrho_{yz} \cdot \sin L = k\frac{\Pi}{g} v^2 \gamma y \cos^2\varepsilon \cos\lambda \sin L d\lambda \cdot dL.$$

A cause de la symétrie de la surface de révolution par rapport au plan des XY, à chacune des composantes $d\varrho_x$, $d\varrho_y$, $d\varrho_z$ qui agissent sur l'élément $d\sigma = mm'm''$ de la surface, correspond une autre composante égale qui agit sur l'élément symétrique situé de l'autre côté du plan des XY. Par suite, toutes les composantes $d\varrho_z$ se détruiront deux à deux. La force $d\varrho_x$ qui agit sur l'élément $d\sigma = mm'm''$ se composera avec la force $d\varrho_x$ qui agit sur l'élément symétrique situé de l'autre côté du plan des XY, et donnera la force résultante élémentaire $2\,d\varrho_x$ parallèle à l'axe OX, située dans le plan des XY à une distance de l'axe OX égale à $\overline{Oq} = \overline{Op} \cdot \cos(YOS) = \overline{OP} \cdot \cos(YOS) = y \cdot \cos L$. Transportant la force élémentaire $2d\varrho_x$ à l'origine des coordonnées O, nous aurons, outre la force $2d\varrho_x$, appliquée à l'origine des coordonnées, le couple de forces $(2d\varrho_x, -2d\varrho_x)$ situé dans le plan des XY et ayant pour moment

$$2d\varrho_x \cdot y \cos L.$$

Procédant de même avec les deux forces élémentaires $d\varrho_y$ qui agissent sur les deux éléments symétriques, nous obtiendrons la force élémentaire $2d\varrho_y$ appliquée à l'origine des coordonnées, et le couple $(2d\varrho_y, -2d\varrho_y)$ situé dans le plan des XY, ayant pour moment

$$2d\varrho_y \cdot x$$

et agissant dans le sens contraire au couple $(2d\varrho_x, -2d\varrho_x)$.

Composant toutes les forces élémentaires $2d\varrho_x$ en une seule force ϱ_A suivant l'axe OX et agissant dans le sens contraire à cet axe, composant toutes les forces élémentaires $2d\varrho_y$ en une seule force ϱ_B suivant l'axe OY et agissant dans le sens contraire à cet axe, et com-

Digitized by Google

posant tous les couples élémentaires $(2d\rho_x, -2d\rho_x)$ et $(2d\rho_y, -2d\rho_y)$ en un seul couple K situé dans le plan des XY et dont l'axe est conséquemment dirigé suivant l'axe OZ, nous obtiendrons:

$$\rho_A = 2k\frac{\Pi}{g}v^2 \iint \gamma y \cos^2 \varepsilon \sin \lambda \,.\, d\lambda \,.\, dL,$$

$$\rho_B = 2k\frac{\Pi}{g}v^2 \iint \gamma y \cos^2 \varepsilon \cos \lambda \,.\, \cos L \,.\, d\lambda \,.\, dL,$$

$$K = 2 \iint (d\rho_x \,.\, y \cos L - d\rho_y \,.\, x)$$

$$= 2k\frac{\Pi}{g}v^2 \iint \gamma y \,(y \sin \lambda - x \cos \lambda) \cos^2 \varepsilon \,.\, \cos L \,.\, d\lambda \,.\, dL.$$

ou, en posant

$$\rho_A = k\frac{\Pi}{g}v^2 \, X,$$

$$\rho_B = k\frac{\Pi}{g}v^2 \, Y,$$

$$K = k\frac{\Pi}{g}v^2 \, Q,$$

nous aurons à déterminer:

$$X = 2 \iint \gamma y \cos^2 \varepsilon \sin \lambda \,.\, d\lambda \,.\, dL.$$

$$Y = 2 \iint \gamma y \cos^2 \varepsilon \cos \lambda \cos L \, d\lambda \,.\, dL,$$

$$Q = 2 \iint \gamma y \,(y \sin \lambda - x \cos \lambda) \cos^2 \varepsilon \,.\, \cos L \,.\, d\lambda \,.\, dL.$$

Si nous appelons x_0 la distance du plan YZ au point où se rencontre la direction de la résultante de la résistance avec l'axe de figure, point que nous nommerons *centre de résistance* de l'air, nous aurons

$$x_0 = \frac{Q}{Y}.$$

Les intégrales précédentes ne doivent s'étendre qu'à la partie antérieure de la surface, où l'on a

$$\varepsilon < \frac{\pi}{2}$$

Digitized by Google

et dont le contour est déterminé sur cette surface par l'équation

$$\cos \varepsilon = 0.$$

On déduit cos ε du triangle sphérique Avm, dans lequel le côté $mv = \varepsilon$, le côté $Am = \frac{\pi}{2} - \lambda$, le côté $Av = \delta$, l'angle $vAm = L$; et l'on a.

$$\cos \varepsilon = \cos \delta \sin \lambda + \sin \delta \cos \lambda \cos L.$$

L'équation

$$\cos \delta \sin \lambda + \sin \delta \cos \lambda \cos L = 0$$

donne la relation entre la latitude et la longitude des points de la courbe qui sépare la partie antérieure de la surface de sa partie postérieure.

Pour déterminer la latitude du point où la courbe ci-dessus coupe le plan des XY, il faut faire dans la dernière équation

$$L = \pi,$$

par suite cette équation devient

$$\cos \delta \sin \lambda - \sin \delta \cos \lambda = 0,$$

d'où

$$\lambda = \delta,$$

comme on devait s'y attendre, car le point dont il s'agit est le point B du méridien principal, où la tangente à la surface est parallèle à la direction de la vitesse, tandis que la latitude $\lambda = N'By$ de ce point est égale à $\delta = xBv$, puisque la normale $N'B$ est perpendiculaire à la tangente Bv, et By est perpendiculaire à Bx.

Pour tous les points du méridien dont la latitude λ est moindre que δ, il faudra prendre les intégrales depuis $L = 0$ jusqu'à la valeur de L en fonction de λ donnée par l'équation

$$\cos \delta \sin \lambda + \sin \delta \cos \lambda \cos L = 0,$$

c'est-à-dire jusqu'à

$$L = \pi - \varphi,$$

Digitized by Google

en désignant par φ l'angle dont le cosinus

$$\cos \varphi = \frac{\text{tang } \lambda}{\text{tang } \delta}.$$

Pour tous les points du méridien dont la latitude λ est égale ou supérieure à δ, il faudra prendre les intégrales depuis $L=0$ jusqu'à $L=\pi$; car, pour toutes les valeurs de $\lambda \gtreqless \delta$, les parallèles de la surface de révolution sont compris en totalité dans la partie antérieure qui éprouve la résistance.

D'après cela, en désignant par λ_0 et λ_1 les latitudes des extrémités de l'arc de la courbe dont la révolution engendre la surface qu'on considère, nous aurons:

1) Dans le cas où $\delta \gtreqless \lambda_0 < \lambda_1$:

$$X = 2\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \gamma y \sin\lambda d\lambda \int_0^{\pi} \cos^2 \varepsilon \, dL,$$

$$Y = 2\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \gamma y \cos\lambda d\lambda \int_0^{\pi} \cos^2 \varepsilon \cos L dL,$$

$$Q = 2\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \gamma y \, (y \sin\lambda - x\cos\lambda) \, d\lambda \int^{\pi} \cos^2 \varepsilon \cos L dL;$$

2) Dans le cas où $\delta > \lambda_1 > \lambda_0$:

$$X = 2\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \gamma y \sin\lambda d\lambda \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \varepsilon \, dL,$$

$$Y = 2\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \gamma y \cos\lambda d\lambda \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \varepsilon \cos L dL,$$

$$Q = 2\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \gamma y \, (y \sin\lambda - x\cos\lambda) \, d\lambda \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \varepsilon \cos L dL;$$

Digitized by Google

3) Enfin, dans le cas où $\lambda_0 < \delta < \lambda_1$:

$$X = 2\int_{\delta}^{\lambda_1} \gamma y \sin\lambda d\lambda \int_{o}^{\pi} \cos^2\varepsilon\, dL + 2\int_{\lambda_0}^{\delta} \gamma y \sin\lambda d\lambda \int_{o}^{\pi-\varphi} \cos^2\varepsilon\, dL,$$

$$Y = 2\int_{\delta}^{\lambda_1} \gamma y \cos\lambda d\lambda \int_{o}^{\pi} \cos^2\varepsilon \cos L dL + 2\int_{\lambda_0}^{\delta} \gamma y \cos\lambda d\lambda \int_{o}^{\pi-\varphi} \cos^2\varepsilon \cos L dL,$$

$$Q = 2\int_{\delta}^{\lambda_1} \gamma y (y\sin\lambda - x\cos\lambda) d\lambda \int_{o}^{\pi} \cos^2\varepsilon \cos L dL$$

$$+ 2\int_{\lambda_0}^{\delta} \gamma y (y\sin\lambda - x\cos\lambda) d\lambda \int_{o}^{\pi-\varphi} \cos^2\varepsilon \cos L dL,$$

où φ désigne l'angle dont le cosinus

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\operatorname{tang}\delta}.$$

12. *Résistance de l'air sur la surface latérale d'un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles, qui se meut ayant sa petite base en avant et dont l'axe de figure fait un angle δ avec la direction du mouvement.* La latitude λ de tous les points du cône étant constante et égale à l'angle que fait la génératrice avec l'axe du cône, on peut prendre le trapèze $ABCD$ (fig. 3), formé par deux génératrices consécutives, pour l'élément de la surface du tronc de cône.

Représentant par R le rayon de la grande base du tronc de cône, par r le rayon de sa petite base, par h sa hauteur et remarquant que l'angle $AOB = CoD = dL$, on aura

$$\sin\lambda = \frac{R-r}{\sqrt{h^2+(R-r)^2}},\quad \cos\lambda = \frac{h}{\sqrt{h^2+(R-r)^2}},\quad \operatorname{tang}\lambda = \frac{R-r}{h},$$

$$d\sigma = \tfrac{1}{2}(R+r)\sqrt{h^2+(R-r)^2}.\, dL.$$

La résistance normale sur l'élément $d\sigma$ de la surface étant proportionnelle à

$$d\sigma \,.\cos^2\varepsilon$$

Digitized by Google

et ayant d'après le n° 11

$$\cos\varepsilon = \cos\delta \sin\lambda + \sin\delta \cos\lambda \cos L$$
$$= \frac{(R-r)\cos\delta + h \sin\delta \cos L}{\sqrt{h^2+(R-r)^2}},$$

on obtient

$$d\sigma \cdot \cos^2\varepsilon = \frac{R+r}{2\sqrt{h^2+(R-r)^2}}\Big[(R-r)^2\cos^2\delta +$$
$$+ 2h(R-r)\sin\delta\cos\delta\cos L + h^2\sin^2\delta\cos^2 L\Big]\, dL.$$

La projection de la résistance élémentaire sur l'axe OX est proportionnelle à

$$d\sigma \cdot \cos^2\varepsilon \cdot \sin\lambda = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{R^2-r^2}{h^2+(R-r)^2}\Big[(R-r)^2\cos^2\delta +$$
$$+ 2h(R-r)\sin\delta\cos\delta\cos L + h^2\sin^2\delta\cos^2 L\Big]\, dL,$$

et la projection de la résistance élémentaire sur l'axe OY est proportionnelle à

$$d\sigma \cdot \cos^2\varepsilon \cdot \cos\lambda \cdot \cos L = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(R+r)h}{h^2+(R-r)^2}\Big[(R-r)^2\cos^2\delta\cos L +$$
$$+ 2h(R-r)\sin\delta\cos\delta\cos^2 L + h^2\sin^2\delta\cos^2 L\Big]\, dL.$$

Par suite il résulte:

1) *Dans le cas où* $\delta < \lambda$,

$$X = \frac{R^2-r^2}{h^2+(R-r)^2}\left[(R-r)^2\cos^2\delta\int_0^\pi dL +\right.$$
$$\left. + 2h(R-r)\sin\delta\cos\delta\int_0^\pi \cos L dL + h^2\sin^2\delta\int_0^\pi \cos^2 L dL\right],$$

$$Y = \frac{(R+r)h}{h^2+(R-r)^2}\left[(R-r)^2\cos^2\delta\int_0^\pi \cos L dL +\right.$$
$$\left. + 2h(R-r)\sin\delta\cos\delta\int_0^\pi \cos^2 L dL + h^2\sin^2\delta\int_0^\pi \cos^3 L dL\right].$$

Digitized by Google

En effectuant l'intégration, on obtient:

$$X = \frac{\pi}{2}\frac{R^2-r^2}{h^2+(R-r)^2}\left[h^2\sin^2\delta + 2\,(R-r)^2\cos^2\delta\right],$$

$$Y = \pi\frac{h^2(R^2-r^2)}{h^2+(R-r)^2}\,.\,\sin\delta\,.\,\cos\delta.$$

2) *Dans le cas où* $\delta > \lambda$,

$$X = \frac{R^2-r^2}{h^2+(R-r)^2}\left[(R-r)^2\cos^2\delta\int_0^{\pi-\varphi} dL + \right.$$

$$\left. + 2h(R-r)\sin\delta\cos\delta\int_0^{\pi-\varphi}\cos L\,dL + h^2\sin^2\delta\int_0^{\pi-\varphi}\cos^2 L\,dL\right],$$

$$Y = \frac{(R+r)\,h}{h^2+(R-r)^2}\left[(R-r)^2\cos^2\delta\int_0^{\pi-\varphi}\cos L\,dL + \right.$$

$$\left. + 2h(R-r)\sin\delta\cos\delta\int_0^{\pi-\varphi}\cos^2 L\,dL + h^2\sin^2\delta\int_0^{\pi-\varphi}\cos^3 L\,dL\right],$$

En effectuant l'intégration, on obtient:

$$X = \frac{1}{2}\frac{R^2-r^2}{h^2+(R-r)^2}\left[(\pi-\varphi)\left(h^2\sin^2\delta + 2\,(R-r)^2\cos^2\delta\right) + \right.$$

$$\left. + 3h(R-r)\sin\delta\cos\delta\sin\varphi\right],$$

$$Y = \frac{1}{\delta}\frac{h\,(R+r)}{h^2+(R-r)^2}\left[3h\,(R-r)\,(\pi-\varphi)\,\sin\delta\cos\delta\right.$$

$$\left. + \left(2h^2\sin^2\delta + (R-r)^2\cos^2\delta\right)\sin\varphi\right],$$

où (*n*° 11)

$$\cos\varphi = \frac{\text{tang}\,\lambda}{\text{tang}\,\delta} = \frac{R-r}{h\,.\,\text{tang}\,\delta},$$

et par conséquent

$$\varphi = \text{arc cos}\left(\frac{R-r}{h\,.\,\text{tang}\,\delta}\right).$$

Digitized by Google

Pour trouver le centre de résistance de l'air, remarquons que la résultante de la résistance sur chaque trapèze élémentaire, formé par deux génératrices consécutives du cône, doit être perpendiculaire à la génératrice et passer par le centre de gravité de ce trapèze. D'après cela, la distance x_0 du centre de résistance à la grande base du tronc du cône est

$$x_0 = \frac{h^2(R+2r) - 2(R^3 - r^3)}{3h(R+r)}.$$

Si $\delta = o$, les formules déduites pour le cas de $\delta < \lambda$ donnent

$$X = \pi \frac{(R^2 - r^2)(R-r)^2}{h^2 + (R-r)^2},$$

$$Y = o.$$

Si $\delta = \frac{\pi}{2}$, les formules déduites pour le cas de $\delta > \lambda$ donnent

$$X = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{h^2(R^2 - r^2)}{h^2 + (R-r)^2},$$

$$Y = \frac{2}{3} \cdot \frac{h^3(R+r)}{h^2 + (R-r)^2}.$$

Pour le cas d'un cône complet, il n'y a qu'à poser dans les formules précédentes $r = o$.

13. *Résistance de l'air sur la surface latérale d'un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles, qui se meut ayant sa grande base en avant et dont l'axe de figure fait un angle δ avec la direction du mouvement.* Dans le cas de $\delta \leq \lambda$ la base plane antérieure du tronc de cône est seule soumise à la résistance de l'air; par conséquent on a:

$$X = o,$$

$$Y = o.$$

Dans le cas de $\delta > \lambda$, en agissant comme dans le n° précédent, on trouve:

$$X = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 - r^2}{h^2 + (R-r)^2} \Big[(\pi - \varphi) \left(h^2 \sin^2 \delta + 2(R-r)^2 \cos^2 \delta \right) - 3h(R-r) \sin \delta \cos \delta \sin \varphi \Big],$$

Digitized by Google

$$Y = \frac{1}{3}\frac{h(R+r)}{h^2+(R-r)^2}\left[\left(2h^2\sin^2\delta+(R-r)^2\cos^2\delta\right)\sin\varphi - 3h(R-r)(\pi-\varphi)\sin\delta\cos\delta\right],$$

où

$$\varphi = \text{arc cos}\left(-\frac{R-r}{h\ \text{tang}\ \delta}\right).$$

La distance x_0 du centre de la résistance à la petite base du tronc de cône est

$$x = \frac{h^2(2R+r)+2(R^3-r^3)}{3h(R+r)}.$$

14. *Résistance de l'air sur la surface latérale d'un cylindre circulaire, dont l'axe de figure fait un angle* δ *avec la direction du mouvement.* Pour le cylindre $\lambda = o$, $\cos\varphi = \frac{\text{tang}\,\lambda}{\text{tang}\,\delta} = o$, par conséquent $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Posant $R = r$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dans les formules du n° 12, qui se rapportent au cas de $\delta > \lambda$, nous aurons comme expression de la résistance sur la surface latérale du cylindre:

$$X = o,$$
$$Y = \frac{4}{3}hR.\sin^2\delta,$$
$$x_0 = \frac{1}{2}h.$$

15. *Résistance de l'air sur le plan* πr^2 *perpendiculaire à l'axe de figure qui fait un angle* δ *avec la direction du mouvement.* Admettant, comme précédemment, que la résistance de l'air sur un plan est proportionnelle au produit de la surface de ce plan par le carré de la projection normale de la vitesse, on a:

$$X = \pi r^2.\cos^2\delta,$$
$$Y = o.$$

16. *Résistance de l'air sur la surface d'une demi-sphère, dont l'axe de figure fait un angle* δ *avec la direction du mouvement.* Soit $BACG$ (fig. 4) la demi-sphère que l'on considère; soit δ l'angle (vOX) que fait la direction de la vitesse v avec l'axe de figure.

Digitized by Google

Imaginant un cylindre dont la génératrice soit parallèle à la direction de la vitesse et qui enveloppe la sphère, et traçant le grand cercle *DFEG* perpendiculairement à la direction de la vitesse v, on voit que la partie *DvCGF* de la demi-sphère est la seule soumise à l'action de la résistance de l'air.

Au lieu de chercher directement les valeurs de la résistance suivant les axes *OX* et *OY*, il est plus facile de déterminer d'abord les résistances suivant l'axe OX_1 parallèle à la direction de la vitesse, et suivant l'axe OY_1 perpendiculaire à la direction de la vitesse et situé dans le plan qui passe par l'axe de figure *OX* et par la direction de la vitesse *Ov*.

En déterminant les résistances, il ne faut considérer que la partie *DvCGF* de la surface, car c'est la seule soumise à l'action de la résistance de l'air, ou bien, pour plus de facilité, il faut calculer séparément les résistances suivant les axes OX_1 et OY_1 sur la surface de la demi-sphère *DvEG* et sur la surface *CEGF*, prendre la différence de ces résistances suivant chacun des axes et ensuite passer aux résistances suivant les axes *OX* et *OY*.

Représentons la résistance sur la demi-sphère *BACG*, ou, ce qui est tout un, sur la partie *DvCG*, suivant les axes *OX* et *OY* par

$$k\frac{\Pi}{g}v^2 X \text{ et } k\frac{\Pi}{g}v^2 Y,$$

et suivant les axes OX_1 et OY_1 par

$$k\frac{\Pi}{g}v^2 X_1 \text{ et } k\frac{\Pi}{g}v^2 Y_1;$$

représentons les résistances sur la demi-sphère *DvEG* suivant les axes OX_1 et OY_1 par

$$k\frac{\Pi}{g}v^2 X'_1 \text{ et } k\frac{\Pi}{g}v^2 Y'_1;$$

représentons les résistances sur la partie *GEGF* suivant les axes OX_1 et OY_1 par

$$k\frac{\Pi}{g}v^2 X''_1 \text{ et } k\frac{\Pi}{g}v^2 Y''_1,$$

et désignons par r le rayon de la sphère.

Digitized by Google

L'élément de la surface $mm'm'' = d\sigma$ est égal à $om \times$ angle $(mom') \times \overline{Om} \times$ angle (mOm''). Mais $\overline{Om} = r$, $\overline{om} = \overline{Om} \times \sin(mOv) = \overline{Om} \times \cos(Nms) = r \cos\lambda$, l'angle $(mom') = dL$ et l'angle $(mOm'') = d\lambda$.

Par suite

$$d\sigma = r^2 dL . \cos\lambda d\lambda.$$

La résistance normale sur l'élément $d\sigma$ de la surface est proportionnelle à

$$d\sigma . \cos^2\varepsilon,$$

et comme $\varepsilon = (NOv) = \frac{\pi}{2} - \lambda$,

on a

$$d\sigma . \cos^2\varepsilon = r^2 dL . \sin^2\lambda . \cos\lambda . d\lambda.$$

La projection de la résistance élémentaire sur l'axe OX_1 est proportionnelle à

$$d\sigma . \cos^2\varepsilon . \sin\lambda = r^2 dL . \sin^3\lambda . \cos\lambda . d\lambda,$$

et la projection de la résistance élémentaire sur l'axe OY_1 est proportionnelle à

$$d\sigma . \cos^2\varepsilon . \cos\lambda . \cos L = r^2 \cos L dL . \sin^2\lambda . \cos^2\lambda . d\lambda.$$

Pour obtenir les valeurs de X'_1 et de Y'_1, il faut, après avoir multiplié par 2 les deux expressions précédentes, les intégrer depuis $L = 0$ jusqu'à $L = \pi$ et depuis $\lambda = 0$ jusqu'à $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Pour avoir les valeurs de X''_1 et de Y''_1, il faut, après avoir multiplié par 2 les mêmes expressions, les intégrer depuis $L = 0$ jusqu'à $L = \frac{\pi}{2}$ et depuis $\lambda = 0$ jusqu'à $\lambda = HS = \lambda_1$. L'arc $HS = \lambda_1$ se déduit du triangle sphérique rectangle GHS par la formule

$$\text{tang } \overline{HS} = \sin \overline{GS} . \text{tang } (HGS)$$

ou

$$\text{tang } \lambda_1 = \cos L . \text{tang } \delta.$$

Digitized by Google

Par suite

$$X_1' = 2r^2 \int_0^{\pi} dL \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\lambda \,.\, \cos\lambda \,.\, d\lambda = \tfrac{1}{2}\pi r^2,$$

$$Y_1' = 2r^2 \int_0^{\pi} \cos L dL \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\lambda \,.\, \cos^2\lambda d\lambda = 0,$$

$$X_1'' = 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dL \int_0^{\lambda_1} \sin^3\lambda \cos\lambda d\lambda,$$

$$Y_1'' = 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos L dL \int_0^{\lambda_1} \sin^2\lambda \cos^2\lambda d\lambda,$$

où λ_1 est déterminé par la condition

$$\text{tang}\,\lambda_1 = \cos L \,.\, \text{tang}\,\delta,$$

et par conséquent

$$\sin\lambda_1 = \frac{\text{tang}\,\delta \,.\, \cos L}{\sqrt{1 + \text{tang}^2\delta \,.\, \cos^2 L}}, \quad \cos\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2\delta \,.\, \cos^2 L}},$$

$$d\lambda_1 = -\frac{\text{tang}\,\delta \,.\, \sin L}{1 + \text{tang}^2\delta \,.\, \cos^2 L} \,.\, dL.$$

On sait que

$$\int_0^{\lambda_1} \sin^3\lambda \,.\, \cos\lambda d\lambda = \frac{\sin^4\lambda_1}{4} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\text{tang}^4\delta \,.\, \cos^4 L}{(1 + \text{tang}^2\delta \,.\, \cos^2 L)^2},$$

$$\int_0^{\lambda_1} \sin^2\lambda \cos^2\lambda d\lambda = \tfrac{1}{4}\int_0^{\lambda_1} \sin^2 2\lambda d\lambda - \tfrac{1}{8}\int_0^{\lambda_1} (1 - \cos 4\lambda)\, d\lambda$$

$$= \tfrac{1}{8}\lambda_1 - \tfrac{1}{32}\sin 4\lambda_1 = \tfrac{1}{8}\lambda_1 - \tfrac{1}{16}\sin 2\lambda_1 \,.\, \cos 2\lambda_1$$

$$= \tfrac{1}{8}\lambda_1 - \tfrac{1}{8}\sin\lambda_1 \cos\lambda_1 (\cos^2\lambda_1 - \sin^2\lambda_1)$$

$$= \tfrac{1}{8}\lambda_1 - \tfrac{1}{8} \cdot \frac{(1 - \text{tang}^2\delta \,.\, \cos^2 L) \,.\, \text{tang}\,\delta \,.\, \cos L}{(1 + \text{tang}^2\delta \,.\, \cos^2 L)^2}.$$

Digitized by Google

Substituant les valeurs de ces deux intégrales dans les expressions de X_1'' et Y_1'', nous aurons

$$X_1'' = \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{tang}^4 \delta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 L dL}{(1 + \operatorname{tang}^2 \delta . \cos^2 L)^2},$$

$$Y_1'' = \tfrac{1}{4} r^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda_1 \cos L dL - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \operatorname{tang}^2 \delta \cos^2 L) \operatorname{tang} \delta \cos^2 L}{(1 + \operatorname{tang}^2 \delta \cos^2 L)^2} dL \right]$$

$$= \tfrac{1}{4} r^2 \left[(\lambda_1 \sin L)_{L=0}^{L=\frac{\pi}{2}} - \int_{L=0}^{L=\frac{\pi}{2}} \sin L d\lambda_1 + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tang}^2 \delta \cos^2 L - 1) \operatorname{tang} \delta \cos^2 L}{(1 + \operatorname{tang}^2 \delta \cos^2 L)^2} dL \right]$$

$$= \tfrac{1}{4} r^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang} \delta . \sin^2 L}{1 + \operatorname{tang}^2 \delta \cos^2 L} dL + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \operatorname{tang}^2 \delta \cos^2 L - 2) \operatorname{tang} \delta . \cos^2 L}{(1 + \operatorname{tang}^2 \delta . \cos^2 L)^2} dL \right]$$

$$= \tfrac{1}{4} r^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang} \delta \sin^2 L}{1 + \operatorname{tang}^2 \delta \cos^2 L} dL + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang} \delta \cos^2 L}{1 + \operatorname{tang}^2 \delta \cos^2 L} dL - \right.$$

$$\left. - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang} \delta . \cos^2 L}{(1 + \operatorname{tang}^2 \delta . \cos^2 L)^2} dL \right]$$

ou

Digitized by Google

$$Y_1'' = \tfrac{1}{4} r^3 \operatorname{tang} \delta \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dL}{1 + \operatorname{tang}^2 \delta \,.\, \cos^2 L} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 L dL}{(1 + \operatorname{tang}^2 \delta \,.\, \cos^2 L)^2} \right].$$

. Posant

$$\operatorname{tang} L = s,$$

nous aurons

$$X_1'' = \tfrac{1}{2} r^3 \operatorname{tang}^4 \delta \int_0^{\infty} \frac{ds}{(\sec^2 \delta + s^2)^2 (1 + s^2)},$$

$$Y_1'' = \tfrac{1}{4} r^3 \operatorname{tang} \delta \left[\int_0^{\infty} \frac{ds}{\sec^2 \delta + s^2} - 2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{(\sec^2 \delta + s^2)^2} \right].$$

On sait que

$$\int_0^{\infty} \frac{ds}{\sec^2 \delta + s^2} = \frac{\pi}{2} \,.\, \cos \delta,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{ds}{(\sec^2 \delta + s^2)^2} = \frac{1}{\sec^2 \delta} \int_0^{\infty} \frac{(\sec^2 \delta + s^2 - s^2) ds}{(\sec^2 \delta + s^2)^2}$$

$$= \frac{1}{\sec^2 \delta} \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sec^2 \delta + s^2} - \frac{1}{\sec^2 \delta} \int_0^{\infty} \frac{s}{2} \cdot \frac{2s ds}{(\sec^2 \delta + s^2)^2}$$

$$= \cos^2 \delta \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sec^2 \delta + s^2} + \cos^2 \delta \left[\left(\frac{s}{2} \cdot \frac{1}{\sec^2 \delta + s^2} \right)_{\substack{s=\infty \\ s=0}} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sec^2 \delta + s^2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \cos^3 \delta - \cos^2 \delta \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{\pi}{2} \cos \delta = \frac{\pi}{4} \cos^3 \delta ;$$

$$\frac{1}{(\sec^2 \delta + s^2)^2 (1 + s^2)} = \frac{A}{(\sec^2 \delta + s^2)^2} + \frac{B}{\sec^2 \delta + s^2} + \frac{C}{1 + s^2}$$

$$= - \frac{\cot^2 \delta}{(\sec^2 \delta + s^2)^2} - \frac{\cot^4 \delta}{\sec^2 \delta + s^2} + \frac{\cot^4 \delta}{1 + s^2},$$

Digitized by Google

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(\sec^2\delta + z^2)^2\,(1+z^2)} = -\cot^2\delta \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \cos^3\delta - \cot^4\delta \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\delta + \cot^4\delta \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}\cot^4\delta\left(2 - 3\cos\delta + \cos^3\delta\right).$$

Substituant ces intégrales dans les expressions de X_1'' et Y_1'' nous aurons :

$$X_1'' = \tfrac{1}{8}\pi r^2\,(2 - 3\cos\delta + \cos^3\delta),$$

$$Y_1'' = \tfrac{1}{8}\pi r^2 \cdot \sin^3\delta.$$

Les valeurs de X_1 et Y_1 seront :

$$X_1 = X_1' - X_1'' = \tfrac{1}{8}\pi r^2\,(2 + 3\cos\delta - \cos^3\delta),$$

$$Y_1 = Y_1' - Y_1'' = -\tfrac{1}{8}\pi r^2 \cdot \sin^3\delta.$$

Passant des valeurs de X_1 et Y_1 aux valeurs X et Y, à l'aide des formules :

$$X = X_1 \cdot \cos\delta - Y_1 \cdot \sin\delta,$$

$$Y = X_1 \cdot \sin\delta + Y_1 \cdot \cos\delta,$$

nous aurons pour la demi-sphère :

$$X = \tfrac{1}{8}\pi r^2\,(1 + \cos\delta)^2,$$

$$Y = \tfrac{1}{4}\pi r^2\,(1 + \cos\delta)\sin\delta.$$

La direction de la résistance normale sur chaque élément de la surface de la demi-sphère passant par son centre, le centre de résistance de l'air sur la surface d'une demi-sphère coïncide avec le centre de la demi-sphère.

17. *Résistance de l'air sur un projectile oblong dont l'axe de figure fait un angle donné* δ *avec la direction du mouvement.* Décomposons la surface d'un projectile oblong donné en surfaces pour lesquelles nous avons trouvé les expressions de X et de Y et calculons les valeurs de X et de Y sous différents angles δ, pour chacune de ces surfaces. Les sommes de ces valeurs, prises séparément pour

Digitized by Google

chaque angle δ, donneront les valeurs de X et de Y pour toute la surface du projectile sous différents angles δ, et nous aurons

$$\rho_A = k\frac{\Pi}{g} X.v^2$$

et

$$\rho_B = k\frac{\Pi}{g} Y.v^2.$$

Si nous représentons par R le rayon de la partie cylindrique du projectile oblong, par X_0 la valeur de X pour $\delta = o$, et si nous appelons λ le coefficient constant $k\frac{\Pi}{g}\frac{X_0}{\pi R^2}$ qui peut être déduit des résultats des expériences, nous aurons pour un projectile oblong la résistance suivant l'axe de figure et agissant dans le sens contraire à l'axe

$$\rho_A = \lambda\frac{X}{X_0}\pi R^2 v^2$$

et la résistance perpendiculaire à l'axe de figure, dans le plan passant par cet axe parallèlement à la direction du mouvement

$$\rho_B = \lambda\frac{Y}{X_0}\pi R^2 v^2,$$

ou

$$\rho_B = \frac{X}{Y}\rho_A.$$

On a tracé sur la figure 5 les courbes des valeurs de $\frac{X}{X_0}$ et de $\frac{Y}{X_0}$ pour les projectiles semblables à notre obus oblong de 4[1], à chemise épaisse en plomb, en prenant pour abscisses les angles δ et pour ordonnées les valeurs de $\frac{X}{X_0}$ et celles de $\frac{X}{Y_0}$. La courbe de $\frac{X}{X_0}$ fait voir que les valeurs de $\frac{X}{X_0}$ sont sensiblement égales à l'unité depuis $\delta = o$ jusqu'à $\delta = 40°$, et même sous l'angle $\delta = 80°$, la valeur de $\frac{X}{X_0} = 0{,}75$. On peut en conclure qu'il est permis de prendre les valeurs de la résistance de l'air que l'on obtiendrait sur les projectiles oblongs, avec diverses vitesses, dans le cas de $\delta = o$, pour les valeurs de la résistance suivant l'axe de figure sous tous les angles δ, qui dans la

Digitized by Google

plupart des cas de tir sont bien au-dessous de 40° et sont moindres que 80° même pour un tir courbe sous 45° avec les plus petites charges.

La résultante de la résistance de l'air sur un projectile oblong est

$$\rho = \sqrt{\rho_A^2 + \rho_B^2},$$

ou

$$\rho = \lambda \sqrt{\frac{X^2}{X_0^2} + \frac{Y^2}{X_0^2}} \cdot \pi R^2 \cdot v^2.$$

On tirera les angles (ρ, A') que fait la résultante de la résistance avec la direction contraire à l'axe de figure, de l'expression

$$\text{tang } (\rho, A') = \frac{Y}{X}.$$

Ces angles peuvent être plus grands ou plus petits que les angles δ formés par l'axe de figure avec la direction du mouvement. Ainsi pour un cylindre dont la hauteur est $2^1/_2$ fois son diamètre, les angles (ρ, A') sont plus petits que les angles δ pour toutes les valeurs de δ de 0 à $25°^1/_4$; pour les projectiles formés d'un cylindre surmonté d'une demi-sphère dont la hauteur est $2^1/_2$ fois leur diamètre, les angles (ρ, A') sont plus grands que les angles δ pour toutes les valeurs de δ de 0 à $85°^3/_4$. Pour les projectiles semblables à notre obus oblong de 4^1, à chemise épaisse de plomb, la courbe des angles (ρ, A') est construite sur la figure 5 en prenant pour abscisses les angles δ et pour ordonnées les angles (ρ, A'); pour ces projectiles les angles (ρ, A') sont plus grands que les angles δ pour toutes les valeurs de δ de 0 à 83°.

On aura les angles (ρ, T') que fait la résultante de la résistance avec la direction contraire à celle du mouvement, en retranchant les angles δ des angles (ρ, A'). La courbe des angles (ρ, T') pour les projectiles semblables à notre obus oblong de 4^1, à chemise en plomb, est construite sur la figure 5, en prenant pour abscisses les angles δ et pour ordonnées les angles (ρ, T'). Pour ces projectiles la direction contraire à celle du mouvement est comprise entre la direction contraire à l'axe de figure et la direction de la résultante de la résistance de l'air, pour tous les angles δ de 0 à 83°. La résultante de la ré-

Digitized by Google

sistance s'éloigne de la direction contraire à celle du mouvement avec l'accroissement de l'angle δ de 0 jusqu'à environ 30° et elle s'en rapproche avec les accroissements ultérieurs de l'angle δ jusqu'à $\delta = 83°$.

18. *Couple K de la résistance de l'air sur un projectile oblong dont l'axe de figure fait un angle* δ *avec la direction du mouvement. — Centre de résistance.* Si l'on représente par ∂ la distance du centre de résistance de l'air au centre de gravité du projectile — distance exprimée en rayons R du projectile — on aura, pour le couple de la résistance, l'expression

$$K = \partial . R . \rho_B = \lambda \frac{Y}{X_0} . \partial . \pi R^3 . v^2 = k . \frac{\Pi}{g} . \partial . R . Yv^2.$$

Décomposons la surface du projectile donné en surfaces pour lesquelles on a déterminé, dans les n^{os} précédents, les expressions des distances des centres de résistance à leurs bases; calculons les distances des centres de résistance de ces surfaces au centre de gravité du projectile; multiplions-les par les valeurs de Y correspondantes à ces surfaces pour un angle donné δ; faisons la somme algébrique de ces produits et divisons-la par la valeur de Y correspondante au projectile entier pour l'angle donné δ. Le quotient exprimera la distance $\partial . R$ du centre de la résistance de l'air sur le projectile à son centre de gravité pour l'angle donné δ. On a construit sur la figure 5 la courbe de ∂ pour les projectiles semblables à notre obus oblong de 4^1, à chemise en plomb, en prenant pour abscisses les angles δ et pour ordonnées les valeurs de ∂.

Pour des angles δ très petits, le centre de résistance du projectile entier est fort près du centre de résistance de la partie antérieure conique ou ogivale du projectile. En effet la résistance perpendiculaire à l'axe de figure sur la partie cylindrique est proportionnelle (*n*° 14) à

$$\sin^2 \delta,$$

tandis que celle sur la partie conique, pour des angles δ très petits, est proportionnelle (*n*° 12) à

$$\sin \delta \cos \delta.$$

Digitized by Google

Le rapport de ces deux résistances est proportionnel à

$$\frac{\sin\delta\cos\delta}{\sin^2\delta} = \cot\delta,$$

c'est-à-dire à une quantité fort grande toutes les fois que δ est très petit. Il résulte de là que le centre de résistance du projectile entier est pour les très petites valeurs de δ, fort près du centre de résistance de la partie antérieure conique ou ogivale du projectile. Par suite, au commencement de la trajectoire, quand l'angle que fait l'axe de figure du projectile avec la direction de la vitesse ou, ce qui est tout un, avec la tangente à la trajectoire, est encore très petit, le centre de résistance se trouve en avant du centre de gravité. A mesure qu'augmente l'inclinaison de l'axe de figure sur la trajectoire, le centre de résistance s'approche du centre de gravité, et peut même l'atteindre et passer de l'autre côté pour certaines formes de projectiles. Dans les projectiles semblables à notre obus oblong de 4^1, à chemise en plomb, le centre de résistance, comme on le voit sur la figure 5, est, pour l'angle $\delta = 90°$, situé encore un peu en avant du centre de gravité.

Le centre de résistance de l'air étant situé, dans tous les cas du tir, en avant du centre de gravité, et la résistance de l'air étant opposée au mouvement, le couple de la résistance de l'air tend à éloigner l'axe de figure du projectile de la tangente à la trajectoire.

§ II.

EXPÉRIENCES SUR LA RÉSISTANCE DE L'AIR AU MOUVEMENT DES PROJECTILES.

19. *Moyen de déterminer les valeurs de la résistance de l'air correspondantes à différentes vitesses des projectiles.* Pour déterminer la valeur de la résistance correspondante à une certaine vitesse d'un projectile d'artillerie, on mesure la vitesse en deux points de sa trajectoire qui ne soient pas bien éloignés l'un de l'autre. Soit P le poids du projectile; $2R$ son diamètre; l la distance entre les deux

Digitized by Google

points; V la vitesse du projectile au premier point, c'est-à-dire à l'origine de la distance l; V' la vitesse du projectile au second point, c'est-à-dire à la fin de la distance l; g l'accélération de la gravité. Nous aurons pour l'accroissement de la force vive du projectile

$$-\frac{P}{2g}(V^2-V'^2).$$

Les forces qui agissent sur le projectile sont la pesanteur et la résistance de l'air.

Les deux points où l'on mesure les deux vitesses du projectile étant choisis approximativement au même niveau, on peut négliger le travail de la pesanteur sur le chemin l.

Les vitesses V et V', à l'origine et à la fin du chemin assez court l, ne différant pas beaucoup l'une de l'autre, la résistance varie peu sur ce trajet, de manière qu'en nommant ρ la résistance moyenne de l'air agissant en sens contraire du mouvement, le travail de cette résistance sera sensiblement égal à

$$-\rho . l,$$

et nous aurons

$$-\frac{P}{2g}(V^2-V'^2)=-\rho . l,$$

d'où

$$\rho=\frac{P}{2g}\cdot\frac{V^2-V'^2}{l}.$$

La résistance de l'air étant proportionnelle à sa densité, qui varie suivant l'état de l'atmosphère, il faut ramener les résistances observées à différentes époques à une même densité d'air Π_1 *). Si l'on appelle Π la densité de l'air au moment de l'expérience, on aura pour la résistance de l'air à la densité Π_1,

$$\rho=\frac{P}{2g}\cdot\frac{\Pi_1}{\Pi}\cdot\frac{V^2-V'^2}{l}$$

*) Nous prendrons $\Pi_1 = 1^k$, 206 qui est le poids d'un mètre cube d'air à la pression barométrique de 0^m,75, à la température 15° du thermomètre centigrade, quand l'air est à moité saturé de vapeur.

Digitized by Google

et cette résistance peut être considérée comme se rapportant à la vitesse moyenne

$$\rho = \frac{V + V'}{2}.$$

En mesurant les vitesses d'un projectile en deux points de sa trajectoire et en tirant avec des charges différentes, nous obtiendrons les valeurs de la résistance de l'air correspondantes à diverses vitesses.

Pour pouvoir comparer les résultats obtenus avec des projectiles de différents calibres, nous rapporterons les valeurs de la résistance à l'unité de la surface de la plus grande section transversale du projectile; et pour augmenter, dans la recherche des expressions de la résistance, l'importance des résultats qui se rapportent aux moyennes et aux faibles vitesses avec lesquelles les projectiles se meuvent sur la plus grande partie de leur trajet, si celui-ci n'est pas trop court, nous prendrons les rapports des valeurs de la résistance aux carrés des vitesses correspondantes. En posant

$$\rho' = \frac{\rho}{\pi R^2 v^2},$$

nous aurons

$$\rho' = \frac{P}{\pi R^2 g} \cdot \frac{\Pi_1}{\Pi} \cdot \frac{V - V'}{l.v}.$$

Les valeurs de ρ' ainsi obtenues pour diverses vitesses serviront à déterminer les expressions de la résistance de l'air. Si, au lieu de supposer la résistance constante sur le trajet l, on recalculait les valeurs de ρ' d'après les vitesses observées au moyen des expressions trouvées de la résistance, on obtiendrait des valeurs qui ne différeraient des premières, dans le cas le plus défavorable, que d'un millième de leur grandeur, et on aurait une preuve qu'on peut calculer, sans erreur sensible, les coefficients ρ', en admettant une résistance constante sur le trajet assez court du projectile entre les deux points où l'on a mesuré les deux vitesses.

On peut mesurer, au moyen des appareils électro-balistiques, les vitesses d'un même projectile en deux points de sa trajectoire. Au moyen du pendule balistique on ne peut déterminer la vitesse d'un

Digitized by Google

même projectile qu'à une seule distance de la bouche à feu; par suite, lorsqu'on emploie le pendule balistique pour les expériences sur la résistance de l'air, on est obligé de tirer contre le pendule de deux distances différentes avec des projectiles et des charges de poids et de diamètres égaux, et de prendre les vitesses moyennes déduites à chacune de ces distances pour les vitesses d'un même projectile en deux points de sa trajectoire.

20. *Expériences de Robins.* Les expériences exécutées par Robins en Angleterre, et décrites dans ses principes d'artillerie de 1742, consistaient dans la mesure de la vitesse des balles sphériques tirées d'un fusil contre un pendule, à différentes distances, avec des charges différentes. Les résultats de ces expériences ont fait voir que la résistance de l'air croît plus rapidement que le carré de la vitesse, et ont conduit Euler à exprimer la résistance de l'air par un binome, dont le premier terme est proportionnel à la seconde puissance de la vitesse et le second à la quatrième puissance de cette vitesse *).

21. *Expériences de Hutton.* Les expériences de Hutton ont été exécutées à Wolwich de 1787 à 1791. Hutton a tiré des canons de 1^l, 3^l et 6^l contre un pendule balistique à des distances qui ont varié de 10^m à 130^m, et il a observé des vitesses qui ont varié depuis $100^{m:s}$ jusqu'au-delà de $600^{m:s}$. Il résulte des valeurs de la résistance qu'il a obtenues, que la résistance, étant approximativement proportionnelle aux carrés des diamètres des projectiles, croit plus rapidement que le carré de la vitesse, depuis les faibles vitesses jusqu'à celle d'environ $440^{m:s}$, et qu'elle croît approximativement comme le carré de la vitesse depuis celle de $440^{m:s}$ jusqu'à celle de $600^{m:s}$. Le général Didion remarque que l'accroissement moins rapide de la résistance à de très grandes vitesses pouvait avoir été obtenu à l'occasion d'un nombre de coups trop restreint et du rejet des résultats qui paraissaient douteux à Hutton.

22. *Expériences de Metz de 1839 et 1840.* Ces expériences ont été faites par une commission composée de Mm. Piobert, Morin et

*) Nouveaux principes d'artillerie de Robins, commentés par Euler, traduits par Lombard. 1783. Page 365.

Digitized by Google

Didion avec des boulets sphériques de 24, de 12, de 8 et des obus sphériques de 22^c, au moyen d'un pendule balistique sur lequel on tirait, dans une même séance, de deux des distances suivantes: 15, 40, 65, 90 et 115 mètres, de manière que l'on déterminait la vitesse des projectiles en des points distants l'un de l'autre de 25, 50, 75 et 100 mètres. Les vitesses variaient dans les limites de 200 à 650 mètres. On tirait à chaque distance, avec la même charge, de 3 à 6 coups et on prenait la vitesse moyenne déduite de ces coups.

On a réuni les expériences des canons de 12 et de 24, comme les plus nombreuses, et on les a partagées en trois groupes, d'après les valeurs croissantes des vitesses v. On a obtenu ainsi les valeurs moyennes suivantes de v et de ρ' pour chaque groupe:

Vitesses v.....	$337^{m:s}{,}22$,	$428^{m:s}{,}81$,	$535^{m:s}{,}15$
Coefficients ρ'	0,0479,	0,0535,	0,0616.

Si l'on construit ces résultats en prenant les vitesses pour abscisses et les valeurs de ρ' pour ordonnées, on obtient trois points situés sensiblement sur une même droite; le dernier point est un peu au-dessus de la droite tracée par les deux autres.

Le général Didion a exprimé ces résultats par l'équation d'une droite

$$\rho' = 0{,}027\left(1 + \frac{v}{435}\right)$$

et le comte de Saint-Robert, de l'artillerie sarde, par l'équation d'une courbe parabolique *)

$$\rho' = 0{,}0387\left[1 + \left(\frac{v}{696}\right)^2\right],$$

où le mètre et le kilogramme sont pris pour unités.

Ainsi, d'après les résultats des expériences de Metz, faites en 1839 et 1840, la résistance de l'air sur les projectiles sphériques, à la densité de l'air Π, peut être exprimée:

---

*) Comte de Saint-Robert. Du mouvement des projectiles dans les milieux résistants. 1859.

Digitized by Google

d'après M. Didion par la formule

$$\rho = \mathfrak{A}\pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right),$$

où $\mathfrak{A} = 0{,}027$ et $r = 435$, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités;

et d'après le comte de Saint-Robert par la formule

$$\rho = \mathfrak{A}\pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^2 \left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right),$$

où $\mathfrak{A} = 0{,}0387$ et $r = 696$, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités.

Les expériences sur la résistance de l'air au moyen du pendule balistique ne permettant de mesurer la vitesse d'un même projectile qu'en un seul point de sa trajectoire, il fallait, comme nous l'avons remarqué (*n*° 20), prendre comme appartenant au même projectile en deux points de son trajet les vitesses moyennes déduites du tir avec des projectiles différents. Cette circonstance ne pouvait pas être sans influence sur les résultats des expériences, et les expressions de la résistance qu'on en a déduites, lorsqu'on les applique à la résolution des questions de la balistique, donnent des résultats conformes à ceux que l'on obtient dans le tir immédiat, lorsque les distances du tir ne sont pas grandes; les portées avec de fortes charges et sous de grands angles de projection, calculées d'après ces expressions de la résistance, sont de beaucoup au-dessous de la réalité.

23. *Expériences de Metz de 1856, 1857 et 1858.* Les doutes soulevés par les résultats des expériences au moyen du pendule balistique ont engagé le comité d'artillerie de France à proposer de faire de nouvelles expériences au moyen de deux pendules électro-balistiques de M. Navez qui permettent de mesurer les vitesses d'un même projectile en deux points de sa trajectoire. Le tir a eu lieu avec des projectiles sphériques de canons de 8^l et de 24^l et d'obusier de 22^c, et les vitesses ont varié de $190^{m:s}$ à $560^{m:s}$. Avec chaque charge, il n'a pas été tiré moins de 20 coups; on a calculé pour chacune des vitesses moyennes obtenues à chaque coup la valeur du coefficient ρ',

Digitized by Google

et on a déduit la valeur moyenne de ρ' correspondante à la vitesse moyenne de tous les coups tirés avec les charges de même poids. L'intervalle entre les deux points de la trajectoire auxquels correspondaient les vitesses mesurées était compris dans les limites de 50 à 100 mètres; la différence des vitesses pour un même trajet l croissant avec la vitesse du projectile, on a choisi les plus petits intervalles pour le tir avec de fortes charges, et les plus grands pour le tir avec de faibles charges.

Les résultats obtenus et ramenés à la densité de l'air Π_1 sont résumés dans la tableau suivant:

Bouches à feu.	Vitesses v	Valeurs de ρ'	Bouches à feu.	Vitesses v	Valeurs de ρ'
Ob. de 22^c	193$^{m:s}$, 6	0,0212	Ob. de 22^c	369$^{m:s}$, 7	0,0569
Can. de 8^l	202 , 2	0,0246	Can. de 24^l	385 , 1	0,0604
Can. de 24^l	205 , 8	0,0228	Can. de 8^l	396 , 2	0,0628
Can. de 24^l	215 , 8	0,0291	Can. de 24^l	419 , 4	0,0622
Ob. de 22^c	281 , 0	0,0363	Can. de 24^l	458 , 2	0,0640
Can. de 24^l	285 , 5	0,0350	Can. de 24^l	471 , 8	0,0651
Can. de 24^l	318 , 3	0,0454	Can. de 24^l	513 , 6	0,0687
Ob. de 22^c	341 , 9	0,0483	Can. de 24^l	554 , 7	0,0702

Ces résultats sont construits sur la figure 6, en prenant les vitesses pour abscisses et les valeurs de ρ' pour ordonnées. Ils font voir que la résistance qui correspond à la vitesse de 320$^{m:s}$ est sensiblement égale à la résistance obtenue par les expériences antérieures de Metz; mais avec la diminution des vitesses les résistances décroissent, et avec l'accroissement des vitesses jusqu'à celle de 400$^{m:s}$ les résistances croissent plus rapidement que cela ne résulte des expressions de la résistance obtenues des expériences antérieures de Metz. A partir de la vitesse de 400$^{m:s}$ jusqu'aux plus grandes, les résistances croissent moins rapidement que cela n'a lieu depuis les faibles vitesses jusqu'à celle de 400$^{m:s}$.

La commission qui a fait ces expériences, sous la présidence du colonel Virlet, a exprimé la relation entre les valeurs obtenues de ρ' et les vitesses correspondantes par une droite (fig. 6) dont l'équation est

$$\rho' = 0{,}000142 \, . \, v.$$

Digitized by Google

Ainsi, d'après les résultats des expériences de Metz de 1856, 1857 et 1858, la résistance de l'air sur les projectiles sphériques, à la densité de l'air Π, peut être exprimée par la formule

$$\rho = \mathfrak{A}. \pi R^2 . \frac{\Pi}{\Pi_1} . v^3,$$

où $\mathfrak{A}$=0,000142, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités.

24. *Expériences de S^t-Pétersbourg de 1868 et 1869.* Quelques irrégularités observées dans la marche des premiers appareils électro-balistiques de M. Navez employés dans les expériences de Metz ont motivé la répétition en 1868, dans notre artillerie, des expériences sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles sphériques, et en 1869 on a exécuté, d'après la décision de l'adjoint du Grand-Maître de l'artillerie, des expériences sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles oblongs. Les résistances ont été déterminées d'après les vitesses du projectile en deux points de sa trajectoire, et ces vitesses ont été appréciées au moyen de deux chronographes de M. Le-Boulengé. Les durées mesurées par les chronographes pour obtenir les vitesses étaient dans les limites de 0",10 à 0",15.

Les expériences sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles sphériques ont été faites avec des canons de 6^1 et de 24^1 et un canon à bombes de 120^1, dans les limites des vitesses de $527^{m:s}$ à $227^{m:s}$. Les résistances obtenues à de plus faibles vitesses étaient trop variées pour qu'on pût en profiter. Avec chaque charge, il n'a pas été tiré moins de 8 coups; on a calculé pour chacune des vitesses moyennes obtenues à chaque coup la valeur de ρ', et on a déduit la valeur moyenne de ρ' correspondante à la vitesse moyenne de tous les coups tirés avec la charge de même poids. L'intervalle entre les deux points de la trajectoire auxquels correspondaient les vitesses mesurées était compris entre les limites de 50 à 150 mètres; les plus petits intervalles étaient choisis pour le tir avec de fortes charges et correspondaient aux plus grandes pertes de vitesse, qui atteignaient la valeur de $40^{m:s}$; les plus grands intervalles étaient choisis pour le tir avec de faibles charges et correspondaient aux plus petites pertes de vitesse, qui atteignaient la valeur de $10^{m:s}$.

Digitized by Google

Les expériences sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles oblongs ont été faites avec des canons rayés de 4^1 *), 12^1, 24^1 et celui de $203^{mm.}$. Les projectiles étaient en fonte, modèles en usage, à chemise épaisse de plomb. Les vitesses ont varié de $409^{m:s}$ à $172^{m:s}$. Avec chaque charge on n'a pas tiré moins de 8 coups. L'intervalle entre les deux points de la trajectoire auxquels correspondaient les vitesses mesurées était compris entre les limites de 150 à 234 mètres; sur un trajet pareil l'axe de figure des projectiles s'éloigne peu de l'inclinaison de la trajectoire, de manière que l'on peut considérer les résistances déduites des expériences comme se rapportant au cas où l'axe de figure des projectiles oblongs coïncide avec la direction du mouvement. En tirant avec de fortes charges la perte de vitesse atteignait $30^{m:s}$; la plus petite perte de vitesse obtenue avec la plus faible charge du canon de plus fort calibre de $203^{mm.}$ était de $2^{m:s}5$ pour l'intervalle de 234 mètres entre les points auxquels correspondaient les vitesses mesurées. Le tir des canons de $229^{mm.}$ et de $279^{mm.}$ a été défendu, parce que le second projectile tiré dans ces expériences avec le canon de $229^{mm.}$ est allé se loger, après plusieurs ricochets, au cimetière qui se trouve aux environs de la plaine d'épreuves. Aussi pour compléter les données se rapportant aux projectiles de forts calibres nous avons profité des tableaux des vitesses décroissantes **) déduites par M. Bashforth de ses expériences faites en 1868 au moyen de son chronographe; ces tableaux comprennent les vitesses de $518^{m:s}$ à $283^{m:s}$ qui correspondent aux trajets de 305 en 305 mètres des projectiles oblongs de $178^{mm.}$, $203^{mm.}$ et $229^{mm.}$, et qui sont obtenues pour le cas où le mouvement des projectiles peut être considéré comme rectiligne. Nous avons calculé d'après les résultats insérés dans ces tableaux les valeurs de la résistance correspondantes à différentes vitesses.

Le résultats obtenus et réduits pour nos expériences à la densité de l'air $\Pi_1 = 1^k$, 206 sont résumés dans les deux tableaux suivants.

---

*) On a tiré avec deux canons de 4^1: l'un en usage actuellement dans l'artillerie de campagne et l'autre lourd, qui permet le tir à fortes charges.

**) Proceedings of the Royal Artillery Institution, Wolwich. 1868.

Digitized by Google

Projectiles sphériques.

Bouches à feu.	Vitesses v	Valeurs de ρ'	Bouches à feu.	Vitesses v	Veleurs de ρ'
Can. de 6[l]	227[m:s]	0,0295	Can. de 24[l]	380[m:s]	0,0554
Can. de 24[l]	234	0,0267	Can. de 6[l]	384	0,0602
C. à bombes de 120[l]	262	0,0361	C. à bombes de 120[l]	408	0,0587
Can. de 6[l]	278	0,0424	Can. de 6[l]	415	0,0625
Can. de 24[l]	287	0,0411	Can. de 24[l]	457	0,0598
C. à bombes de 120[l]	330	0,0491	C. à bombes de 120[l]	463	0,0611
Can. de 24[l]	341	0,0519	Can. de 6[l]	475	0,0625
Can. de 6[l]	342	0,0582	Can. de 24[l]	527	0,0619

Projectiles oblongs.

Bouches à feu.	Vitesses v	Valeurs de ρ'	Bouches à feu.	Vitesses v	Valeurs de ρ'
C. de 4[l]	172[m:s]	0,0151	C. de 203[mm]	329[m:s]	0,0338
C. 203[mm]	207	0,0137	C. de 203[mm] angl.	332	0,0327
C. de 4[l]	239	0,0148	C. de 229[mm] angl.	334	0,0332
C. de 12[l]	247	0,0170	C. de 4[l]	337	0,0341
C. de 24[l]	266	0,0160	C. de 178[mm] angl.	340	0,0334
C. de 203[mm]	282	0,0163	C. de 203[mm] angl.	345	0,0354
C. de 203[mm] angl.	287	0,0184	C. de 229[mm] angl.	355	0,0364
C. de 229[mm] angl.	291	0,0247	C. de 178[mm] angl.	358	0,0382
C. de 203[mm] angl.	300	0,0230	C. de 203[mm]	360	0,0384
C. de 178[mm] angl.	302	0,0218	C. de 203[mm] angl.	360	0,0393
C. de 12[l]	304	0,0221	C. de 4[l]	401	0,0450
C. de 4[l]	307	0,0158	C. de 203[mm]	409	0,0430
C. de 229[mm] angl.	316	0,0305	C. de 203[mm] angl.	419	0,0433
C. de 4[l]	317	0,0259	C. de 229[mm] angl.	420	0,0427
C. de 203[mm]	319	0,0174	C. de 203[mm] angl.	460	0,0449
C. de 203[mm] angl.	320	0,0277	C. de 203[mm] angl.	508	0,0440
C. de 24[l]	320	0,0299	C. de 178[mm] angl.	512	0,0443
C. de 178[mm] angl.	322	0,0270			

Ces résultats sont construits sur les figures 7 et 8, les vitesses étant prises pour abscisses et les valeurs de ρ' pour ordonnées. Il en résulte:

1°. Les valeurs des calibres n'ayant pas une influence sensible sur les valeurs de ρ', la résistance de l'air sur les projectiles, dans les limites des calibres en usage, peut être considérée comme proportionnelle aux surfaces des sections transversales des projectiles.

Digitized by Google

2°. Les valeurs de ρ', depuis les plus faibles vitesses obtenues dans le tir, croissent avec les vitesses, et par conséquent les résistances croissent plus rapidement que les carrés des vitesses; l'accroissement le plus rapide des résistances est compris pour les obus oblongs dans les limites des vitesses de $280^{m:s}$ à $360^{m:s}$. Depuis les vitesses de $360^{m:s}$ pour les projectiles oblongs, et depuis celles de 380 mètres pour les projectiles sphériques jusqu'aux plus grandes vitesses, les valeurs de ρ' restent sensiblement constantes, et par conséquent les résistances croissent sensiblement comme les carrés des vitesses.

25. *Expressions monomes de la résistance de l'air.* Si l'on voulait exprimer ρ' en fonction de la vitesse par un seul terme proportionnel à une certaine puissance de la vitesse, on obtiendrait 0,86 comme valeur la plus probable de cette puissance pour les projectiles sphériques, depuis les plus faibles vitesses jusqu'à celle de $527^{m:s}$, et 1,86 pour les projectiles oblongs, depuis les plus faibles vitesses jusqu'à celle de $420^{m:s}$, et en adoptant des nombres entiers pour les valeurs de ces puissances on aurait eu 1 pour celle qui se rapporte aux projectiles sphériques et 2 pour celle qui se rapporte aux projectiles oblongs. En cherchant la valeur la plus probable du coefficient qui doit multiplier la vitesse élevée à la puissance trouvée pour obtenir ρ', on aurait eu:

pour les projectiles sphériques

$$\rho' = 0{,}000140\,.\,v,$$

expression sensiblement la même que celle qui a été obtenue ($n°$ 23) aux expériences de Metz de 1856, 1857 et 1858;

et pour les projectiles oblongs

$$\rho' = 0{,}000000270\,.\,v^2.$$

26. Ainsi si l'on voulait exprimer la résistance de l'air par un seul terme depuis les plus faibles vitesses jusqu'aux plus grandes, on aurait, d'après les résultats des expériences russes et anglaises, à la densité de l'air Π,

Digitized by Google

pour les projectiles sphériques

$$\rho = \mathfrak{A}\,\pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^3,$$

où, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités,

$$\mathfrak{A} = 0{,}00014$$

et *pour les projectiles oblongs*

$$\rho = \mathfrak{A}\,\pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^4,$$

où, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités,

$$\mathfrak{A} = 0{,}00000027.$$

27. *Expressions de la résistance de l'air représentant avec une approximation suffisante les résultats des expériences russes et anglaises.* Pour que les expressions de ρ' représentent avec une approximation suffisante les résultats de nos expériences et ceux de Bashforth, et permettent en même temps d'intégrer facilement, quoique par approximation, les équations différentielles du mouvement des projectiles, nous pouvons:

Pour les projectiles sphériques exprimer ρ' (fig. 7) depuis la vitesse de $530^{m:s}$ jusqu'à celle de $376^{m:s}$ par la droite (A) dont l'équation est

$$\rho' = 0{,}061$$

et de la vitesse de $376^{m:s}$ jusqu'aux faibles vitesses par la courbe (B) dont l'équation est

$$\rho' = 0{,}012\left[1 + \left(\frac{v}{186}\right)^2\right].$$

Pour les projectiles oblongs nous pouvons exprimer ρ' (fig. 8) depuis la vitesse de $510^{m:s}$ jusqu'à celle $360^{m:s}$ par la droite (C) dont l'équation est

$$\rho' = 0{,}044,$$

Digitized by Google

de la vitesse de $360^{m:s}$ jusqu'à celle de $280^{m:s}$ par la courbe (D) dont l'équation est

$$\rho' = 0{,}0000000000026\ v^4,$$

et de la vitesse de $280^{m:s}$ jusqu'aux faibles vitesses par la courbe (E) dont l'équation est

$$\rho' = 0{,}012\left[1 + \left(\frac{v}{488}\right)^2\right].$$

28. Ainsi, d'après les résultats des expériences russes et anglaises, nous pouvons admettre qu'à la densité de l'air Π :

La résistance de l'air sur les projectiles sphériques est exprimée depuis la vitesse de $530^{m:s}$ jusqu'à celle de $376^{m:s}$ par la formule

$$\rho = \mathfrak{A}\pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^2,$$

où, en prenant le mètre et le kilogramme pour unités,

$$\mathfrak{A} = 0{,}061,$$

et de la vitesse de $376^{m:s}$ jusqu'aux faibles vitesses par la formule

$$\rho = \mathfrak{A}\pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^2\left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right],$$

où, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités,

$$\mathfrak{A} = 0{,}012\ ,\ r = 186^{m:s}.$$

La résistance de l'air sur les projectiles oblongs, dont l'axe de figure coïncide avec la direction du mouvement, peut être exprimée depuis la vitesse de $510^{m:s}$ jusqu'à celle de $360^{m:s}$ par la formule

$$\rho = \mathfrak{A}\pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^2,$$

où, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités,

$$\mathfrak{A} = 0{,}044,$$

depuis la vitesse de $360^{m:s}$ jusqu'à celle de $280^{m:s}$ par la formule

$$\rho = \mathfrak{A}\pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^6,$$

Digitized by Google

où, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités,

$$\mathfrak{A} = 0{,}0000000000026,$$

et depuis la vitesse de $280^{m:s}$ jusqu'aux faibles vitesses par la formule

$$\rho = \mathfrak{A}\pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^2 \left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right],$$

où, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités,

$$\mathfrak{A} = 0{,}012\,,\quad r = 488^{m:s}.$$

La distribution des points (ρ', v) autour de la courbe (E) (fig. 8) fait voir qu'on peut prolonger cette courbe, comme l'indique la ligne pointillée, jusqu'à la vitesse de $325^{m:s}$, et qu'on peut, par conséquent, se servir de la dernière expression de la résistance depuis la vitesse de $325^{m:s}$ jusqu'aux faibles vitesses, ce qui simplifie la solution des problèmes du tir de toutes nos bouches à feu actuelles de place, de siége et de campagne qui impriment aux projectiles, avec les charges en usage, des vitesses initiales moindres que $325^{m:s}$.

29. *Résistance de l'air sur les projectiles oblongs, lorsque leur axe de figure ne coïncide pas avec la direction du mouvement.* On ne peut pas étendre les expressions trouvées de la résistance de l'air sur les projectiles oblongs au cas où leur axe de figure fait un angle sensible avec la direction du mouvement. Les recherches expérimentales se rapportant à ce cas, du moins pour les vitesses considérables, présenteraient de grandes difficultés, et c'est à grand' peine qu'une solution de cette question pourrait être trouvée sans certaines hypothèses sur les propriétés des gaz et leur action sur les corps en mouvement.

Nous avons fait voir ($n°$ 17) la relation entre la résistance de l'air sur les projectiles oblongs et l'angle δ que forme leur axe de figure avec la direction du mouvement, dans l'hypothèse que la résistance normale de l'air à chaque élément de la surface soumis à la résistance est due au choc de cet élément contre l'air supposé immobile. N'ayant pas de solution assez exacte de cette question, nous

Digitized by Google

sommes forcés d'admettre la relation obtenue, et en nous basant sur cette relation, nous déduirons la résistance de l'air suivant la direction contraire à l'axe de figure, en multipliant par $\frac{X}{X_0}$ les expressions de la résistance obtenues de données expérimentales pour le cas où l'axe de figure des projectiles oblongs coïncide avec la direction du mouvement, et en multipliant ces expressions par $\frac{Y}{X_0}$ nous aurons la résistance de l'air suivant la direction perpendiculaire à l'axe de figure, comprise dans le plan passant par cet axe et la direction du mouvement. Mais les valeurs de $\frac{X}{X_0}$ (*n*° 17) étant sensiblement égales à l'unité depuis $\delta = o$ jusqu'à $\delta = 40°$ et même sous l'angle de $\delta = 80°$ la valeur de $\frac{X}{X_0}$ étant égale à 0,75, on peut prendre les expressions de la résistance de l'air obtenues des données expérimentales dans le cas où l'axe de figure des projectiles oblongs coïncide avec la direction du mouvement, pour les expressions de la résistance suivant la direction contraire à l'axe de figure sous tous les angles δ, qui dans la plupart des cas de tir sont bien au-dessous de 40° et sont moindres que 80°, même pour un tir courbe sous l'angle de 45° avec les plus petites charges.

En appliquant les expressions de la résistance de l'air déduites des résultats de nos expériences à la solution des problèmes de la balistique, nous ferons voir que ces expressions donnent des résultats conformes à ceux que l'on obtient dans le tir immédiat à toutes les distances.

30. *Accélération de la résistance de l'air.* En appelant ρ et ρ_1 les résistances de l'air sur deux projectiles différents, P et P_1 les poids de ces projectiles, S et S_1 les projections de leurs surfaces sur le plan perpendiculaire à la direction du mouvement, R et R_1 leurs rayons, D et D_1 leurs densités, g l'accélération de la gravité, et en ne prenant pas en considération l'influence de la forme du projectile et de la direction de son axe de figure sur la valeur de la résistance, on aura pour une même vitesse des deux projectiles

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{S}{S_1}$$

Digitized by Google

et

$$\frac{\rho \frac{g}{P}}{\rho_1 \frac{g}{P_1}} = \frac{\frac{S}{P}}{\frac{S_1}{P_1}},$$

c'est-à-dire que, pour une même vitesse, la résistance de l'air est proportionnelle à la projection de la surface du projectile sur le plan perpendiculaire à la direction du mouvement et ne dépend pas du poids du projectile, tandis que l'accélération de la résistance de l'air est proportionnelle à la projection de la surface du projectile sur le plan perpendiculaire à la direction du mouvement et est en proportion inverse du poids du projectile.

On a pour les projectiles sphériques

$$S = \pi R^2,\ S_1 = \pi R_1^2,\ P = \tfrac{4}{3}\pi R^3 D,\ P_1 = \tfrac{4}{3}\pi R_1^3 D_1,$$

et par conséquent

$$\frac{\rho \frac{g}{P}}{\rho_1 \frac{g}{P_1}} = \frac{R_1 D_1}{RD},$$

c'est-à-dire que l'accélération de la résistance de l'air sur les projectiles sphériques est en proportion inverse du rayon et de la densité du projectile; on voit par là qu'à vitesses égales la perte de vitesse dans l'unité de temps sera d'autant moindre, et que la portée d'un projectile sphérique, toutes les autres circonstances étant égales, sera d'autant plus grande que son diamètre et sa densité sont plus grands.

Dans le tir direct la projection de la surface des projectiles oblongs sur le plan perpendiculaire à la direction du mouvement ne diffère pas beaucoup, sur tout le trajet, de la surface de la section transversale de leur partie cylindrique, c'est-à-dire S ne diffère pas beaucoup de πR^2, et le poids d'un projectile oblong étant considérablement plus grand que celui d'un projectile sphérique de même section transversale, l'accélération de la résistance sur le premier, à vitesses égales, est beaucoup moindre que sur le second, indépendamment de

Digitized by Google

la forme ogivale de la partie antérieure des projectiles oblongs, qui diminue aussi la résistance. Par suite les projectiles oblongs, à vitesses égales, perdent, dans un même temps, moins de vitesse que les projectiles sphériques non-seulement de même diamètre, mais aussi de même poids. Ainsi, en ne tenant pas compte de la diminution de la résistance due à la forme ogivale de la partie antérieure des projectiles oblongs, l'accélération de la résistance, à vitesses égales, sur un obus oblong de 4^{l} dont le diamètre est de 84^{mm} et le poids $5^{k},7$, est égale à celle éprouvée par un boulet sphérique de 203^{mm} dont le poids est de 29^{kil}. En tenant compte de l'influence de la forme ogivale (par suite de laquelle, pour une vitesse de $400^{m:s}$, la résistance (n^{o} 28) sur un projectile oblong est moindre que sur un projectile sphérique de même diamètre dans le rapport de 44 à 61) on trouve que l'accélération de la résistance sur un obus oblong de 4^{l} est égale à celle sur un boulet sphérique de 279^{mm} dont le poids est de 76^{kil}. On voit par là que le tir des projectiles oblongs doit être bien plus tendu que celui des projectiles sphériques, par suite du plus grand poids qui correspond, dans les projectiles oblongs, à l'unité de surface de leur section transversale et en partie par suite de la forme ogivale de leur partie antérieure.

31. *Poids* Π *d'un mètre cube d'air.* Appelant t la température de l'air d'après le thermomètre centigrade, H la hauteur du mercure du baromètre exprimée en millimètres et réduite à la température 0, F la pression de la vapeur d'eau non saturée que contient l'air à la température t — pression mesurée par la hauteur du mercure exprimée en millimètres — on a

$$\Pi = 1^{k},\ 293\ \frac{H - \frac{3}{8}F}{760\,(1+at)},$$

où $a = 0{,}00367$.

Appelant H' la hauteur du mercure du baromètre à la température t' mesurée par le thermomètre centigrade adapté au baromètre, on aura

$$H = H'\ (1 - 0{,}00018\,.\,t').$$

Digitized by Google

La pression F des vapeurs non saturées que contient l'air à la température t est égale à la pression des vapeurs saturées à la température t_1 à laquelle commence la condensation de la vapeur contenue dans l'air. La température t_1 est mesurée au moyen de l'hygromètre de M. Regnault, qui consiste dans un tube de verre ajusté dans un dé d'argent; le tube est rempli d'éther et contient un thermomètre; par l'insufflation on détermine l'abaissement de la température de l'éther et l'on observe la température t_1 du thermomètre au moment où le refroidissement détermine sur le dé un dépôt de rosée. Connaissant la température t_1, on obtient la pression F à l'aide de la table suivante:

t_1	F	t_1	F	t_1	F	t_1	F	t_1	F
Degrés.	Millim.	Degrés.	Millim.	Degrés.	Millim.	Degrés.	Millim.	Degrés.	Millim.
—30	0,3	—7	2,5	5	6,5	17	14,4	29	29,8
—28	0,4	—6	2,8	6	7,0	18	15,4	30	31,5
—26	0,5	—5	3,0	7	7,5	19	16,3	31	33,4
—24	0,6	—4	3,3	8	8,0	20	17,4	32	35,4
—22	0,7	—3	3,6	9	8,6	21	18,5	33	37,4
—20	0,8	—2	3,9	10	9,2	22	19,7	34	39,6
—18	1,0	—1	4,2	11	9,8	23	20,9	35	41,8
—16	1,2	0	4,6	12	10,5	24	22,2	36	44,2
—14	1,4	1	4,9	13	11,2	25	23,6	37	46,7
—12	1,7	2	5,3	14	11,9	26	25,0	38	49,3
—10	2,0	3	5,7	15	12,7	27	26,5	39	52,0
— 8	2,3	4	6,1	16	13,5	28	28,1	40	54,9

On détermine la densité de l'air dans les expériences qui exigent une grande précision; mais dans le plus grand nombre de cas, lorsqu'on calcule le mouvement des projectiles, on pose dans les expressions de la résistance de l'air $\Pi = \Pi_1 = 1^k, 206$.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

MOUVEMENT DANS L'AIR DES PROJECTILES SPHÉRIQUES QUI N'EXÉCUTENT PAS DE ROTATION.

§ I.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT.

32. *Équations différentielles du mouvement.* Un projectile qui se meut dans l'air est soumis à l'action de deux forces, celle de la pesanteur et celle de la résistance de l'air. En vertu d'un théorème connu que le centre de gravité d'un corps se meut comme si toute la masse y était concentrée, et toutes les forces extérieures appliquées en ce même centre, chacune suivant sa direction, on peut considérer le mouvement de translation d'un projectile comme celui d'un point matériel de masse égale, auquel seraient appliquées les forces de la pesanteur et de la résistance de l'air.

On peut prendre, sans erreur sensible, le poids du projectile dans l'air comme égal à son poids P dans le vide, et l'accélération de la gravité dans l'air comme égale à l'accélération de la gravité g dans le vide.

Quand le projectile est une sphère homogène ou composée de couches concentriques homogènes, et qu'on ne lui a imprimé aucune rotation au sortir de la bouche à feu, la résultante de la résistance de l'air est constamment tangente à la courbe décrite par le centre de gravité et est dirigée dans le sens contraire de la vitesse.

Digitized by Google

Nous ne considérerons ici que ce cas et, en représentant par ρ la résistance de l'air, l'accélération de la résistance sera égale à $\rho \frac{g}{P}$.

La courbe décrite par le projectile est plane. En effet, faisons passer un plan vertical par un élément quelconque de la courbe; les forces (le poids et la résistance), en vertu desquelles le centre de gravité du projectile décrira l'élément suivant, agissent dans ce plan, et il en résulte que cet élément y sera également compris. Appliquant le même raisonnement à tous les éléments consécutifs de la trajectoire, on trouve qu'elle est tout entière dans le même plan vertical, et que, par conséquent, il suffit, pour déterminer le mouvement du centre de gravité du projectile, d'avoir les projections des accélérations sur deux directions.

Soit l'axe des x horizontal et l'axe des y vertical dirigé dans le sens contraire à la pesanteur. Projetons les accélérations sur l'axe des x et sur la normale intérieure à la trajectoire, et appelons v la vitesse du projectile en un point quelconque de la trajectoire, t le temps que met le projectile à parcourir le trajet de l'origine à ce point, γ le rayon de courbure et θ l'angle que fait avec l'axe des x la tangente à la trajectoire en ce point.

On aura pour les projections des accélérations sur l'axe des x et sur la normale intérieure les expressions

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d(v\cos\theta)}{dt} = -\rho\frac{g}{P}\cos\theta,$$

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{v^2}{\gamma} g\cos\theta.$$

Comme la force de la résistance ralentit le mouvement du projectile suivant la tangente à la trajectoire et que la force de la pesanteur, agissant de haut en bas, abaisse le projectile, la trajectoire présente sa concavité à l'horizon et l'angle θ que fait la tangente à la trajectoire avec l'horizon reçoit constamment des accroissements négatifs, de sorte qu'en désignant par ds l'élément de l'arc de la courbe, nous aurons pour le rayon de courbure l'expression

$$\gamma = -\frac{ds}{d\theta} = -v\frac{dt}{d\theta}.$$

Digitized by Google

En la substituant dans l'équation (2), on aura

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v\frac{d\theta}{dt} = -g\cos\theta.$$

Les équations (1) et (3) définissent complètement le mouvement du centre de gravité du projectile.

En représentant par v_1 la projection horizontale de la vitesse, c'est-à-dire en posant

$$v_1 = v\cos\theta,$$

les équations (1) et (3) deviendront

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dv_1}{dt} = -\rho\frac{g}{P}\cos\theta,$$

$$(5)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v_1\frac{d\theta}{dt} = -g\cos^2\theta.$$

Éliminant dt entre elles, nous aurons

$$(6)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dv_1}{d\theta} = \frac{\rho}{P}\frac{v_1}{\cos\theta}.$$

L'équation (5) donne

$$(7)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots dt = -\frac{1}{g}v_1\frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

et comme

$$ds = vdt = \frac{v_1}{\cos\theta}dt,\ dx = v_1 dt,\ dy = v\sin\theta dt = v_1\frac{\sin\theta}{\cos\theta}dt,$$

on a

$$(8)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ds = -\frac{1}{g}v_1^2\frac{d\theta}{\cos^3\theta},$$

$$(9)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots dx = -\frac{1}{g}v_1^2\frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

$$(10)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots dy = -\frac{1}{g}v_1^2\frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^3\theta},$$

$$(11)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \gamma = \frac{v^2}{g\cos\theta}.$$

Pour déterminer toutes les circonstances du mouvement d'un projectile d'après une expression donnée de la résistance ρ de l'air

Digitized by Google

en fonction de la vitesse, il faut premièrement intégrer l'équation différentielle (6) du premier ordre entre les deux variables v_1 et θ, ce qui donnera l'expression de la vitesse horizontale v_1 en fonction de l'angle θ. Puis en mettant l'expression de v_1 en fonction de θ dans les formules (7), (8), (9) et (10), l'intégration de ces formules différentielles du premier ordre à une seule variable donnera les expressions de t, s, x et y en fonction de θ, et en éliminant θ entre l'expression de x et celle de y on obtiendra l'équation de la trajectoire.

L'intégration de l'équation différentielle (6) ne peut être effectuée que pour certaines expressions de la résistance ρ en fonction de la vitesse v.

33. *Déterminer la loi de la résistance d'après la trajectoire que décrit le projectile.* Cette question inverse à la précédente est beaucoup plus simple au point de vue analytique, car sa solution se réduit uniquement à la différentiation.

Soit la trajectoire donnée par une équation de y en fonction de x; on demande à déterminer la vitesse v et la résistance ρ en fonction de x.

Représentons par y', y'', y''' la première, la seconde et la troisième dérivée de y par rapport à x.

Pour trouver la vitesse v, remarquons que

$$\text{tang } \theta = y'.$$

Différentiant cette expression, on a

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = y'' dx.$$

En substituant à dx sa valeur (éq. 9, n° 32) on trouve

$$v_1 = \sqrt{\frac{g}{-y'''}}$$

où $\sqrt{-y''}$ est une quantité réelle, car la trajectoire tournant sa concavité vers l'horizon, la dérivée y'' est toujours négative.

Comme $v = \frac{v_1}{\cos \theta} = v_1 \sqrt{1 + \text{tang}^2 \theta} = v_1 \sqrt{1 + y'^2}$, on tire de la dernière équation

$$v = \sqrt{g} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{-y''}}.$$

Digitized by Google

Pour trouver la résistance ρ, prenons l'équation (6), $n°$ 32

$$\frac{dv_1}{d\theta} = \frac{\rho}{P} \cdot \frac{v_1}{\cos\theta}$$

et substituons dans cette équation la valeur de dv_1 que l'on obtient en différentiant l'expression $v_1 = \sqrt{\frac{g}{-y''}}$; la différentielle de cette expression est

$$dv_1 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{g}\,\frac{y'''}{y''\sqrt{-y''}}\,dx$$

et elle devient après la substitution à dx de son expression (9) $n°$ 32,

$$dv_1 = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{v_1^2}{\cos^2\theta} \cdot \frac{y'''}{y''\sqrt{-y''}}\,d\theta;$$

en mettant cette expression ainsi que celle de $v_1 = \sqrt{\frac{g}{-y''}}$ et celle de $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ dans l'équation (6), $n°$ 100, on aura

$$\rho = \frac{P}{2} \cdot \frac{-y'''\sqrt{1+y'^2}}{y''^2}.$$

§ II.

DISCUSSION DE LA TRAJECTOIRE DANS L'AIR D'UN PROJECTILE SPHÉRIQUE QUI N'A PAS DE ROTATION.

34. *Propriétés de la résistance de l'air prises pour bases dans la discussion de la trajectoire.* La nature de la trajectoire dépend de la loi de la résistance du milieu. On peut cependant discuter la trajectoire dans l'air d'un projectile sphérique qui n'a pas de rotation, sans adopter d'hypothèse spéciale sur la résistance de l'air, en admettant seulement qu'elle croît avec la vitesse, qu'elle devient infinie pour $v = \infty$ et qu'elle est moindre que le poids du projectile pour une vitesse infiniment petite. D'après ces propriétés de la résistance de l'air, en posant

$$\frac{\rho}{P} = f(v),$$

Digitized by Google

on a

$$f'(v) > o, f(\infty) = \infty \text{ et } f(o) < 1.$$

35. *Variation de la vitesse.* La dérivée de la vitesse par rapport au temps $\frac{dv}{dt}$ est égale à la somme des projections sur la tangente des accélérations de la pesanteur et de la résistance de l'air, c'est-à-dire

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dv}{dt} = -g\left[f(v) + \sin\theta\right].$$

Dans la branche ascendante de la trajection où l'angle θ et $\sin\theta$ sont constamment positifs, la dérivée $\frac{dv}{dt}$ est négative, de manière que dans cette branche v et t varient en sens opposé, c'est-à-dire qu'avec l'accroissement du temps t la vitesse v décroît. Partant donc d'un point quelconque situé sur la branche ascendante la vitesse décroît jusqu'au sommet de la trajectoire, à mesure que le temps augmente.

Dans la branche descendante, dans laquelle l'angle θ et $\sin\theta$ sont toujours négatifs, la dérivée $\frac{dv}{dt}$ conserve son signe négatif à partir du sommet de la trajectoire jusqu'au point où la vitesse v prend la valeur v' qui satisfait à l'équation

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f(v') + \sin\theta = o.$$

Par suite, dans la branche descendante, la vitesse continue de décroître depuis le sommet de la trajectoire jusqu'au point mentionné. En ce point l'expression (1), à cause de l'équation (2), se réduit à

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dv}{dt} = o.$$

L'équation (1) donne

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -gf'(v)\frac{dv}{dt} - g\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt},$$

et en mettant au lieu de $\frac{d\theta}{dt}$ sa valeur de l'équation (3), n° 32, on a

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -gf'(v)\frac{dv}{dt} + \frac{g^2\cos^2\theta}{v}.$$

Digitized by Google

Au point où la vitesse v' satisfait à l'équation (2) et par suite à la condition (3): $\frac{dv}{dt} = o$, on aura

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{g^2 \cos^2 \theta}{v},$$

et comme la vitesse v', ainsi que nous allons le démontrer, ne peut être ni nulle, ni négative, la dernière expression est toujours positive.

Par conséquent au point mentionné la vitesse atteint sa valeur minima v'.

Pour démontrer que la vitesse v' ne peut être ni nulle, ni négative, prenons l'équation (6), n° 32

$$\frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = v \,.\, f(v)$$

et mettons-la sous la forme

$$\frac{d(v \cos \theta)}{v \cos \theta} = f(v) \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

En intégrant cette expression de $v = v_0$ jusqu'à v et de $\theta = \theta_0$ jusqu'à θ, on obtient

$$\log \frac{v \cos \theta}{v_0 \cos \theta_0} = \int_{\theta_0}^{\theta} f(v) \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

On sait par le calcul intégral que si dans l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{X} \varphi(x) \,.\, f(x)\, dx$$

les fonctions $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont continues entre les limites de x_0 et X et que la fonction $f(x)$ ne change pas de signe entre ces limites, on a

$$\int_{x_0}^{X} \varphi(x) \,.\, f(x)\, dx = K \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx,$$

où K est une certaine valeur de la fonction $\varphi(x)$ moyenne entre toutes celles qu'elle prend entre les limites de l'intégration, et K a une grandeur finie, différente de zéro, toutes les fois que la fonction $\varphi(x)$ ne devient pas infinie et ne passe pas par zéro dans les limites de l'intégration.

Digitized by Google

En désignant par K une certaine valeur moyenne de la fonction $f(v)$ entre les limites θ_0 et θ, nous aurons

$$\log \frac{v \cos \theta}{v_0 \cos \theta_0} = K \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos \theta},$$

ou

$$\log \frac{v \cos \theta}{v_0 \cos \theta_0} = K \log \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right)} = \log \left[\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right)}\right]^K,$$

d'où l'on tire

$$v = v_0 \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \left[\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right)}\right]^K,$$

ou

$$v = v_0 \left(\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}\right)^{1-K} \left[\frac{\cos \theta_0 . \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos \theta_0 . \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right)}\right]^K,$$

et comme

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}, \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{\cos \theta_0}{1 - \sin \theta_0},$$

on a

$$v = v_0 \left(\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}\right)^{1-K} \left(\frac{1 - \sin \theta_0}{1 - \sin \theta}\right)^K.$$

En prenant pour la limite θ_0 une valeur telle que la vitesse v_0 qui lui correspond soit très voisine de zéro, la valeur de K sera positive et moindre que l'unité.

Si la vitesse v pouvait devenir nulle, l'angle θ devrait atteindre une valeur réelle capable d'annuler le second membre de l'équation précédente; mais K étant plus petit que l'unité, il n'existe pas de telle valeur de θ, et par suite la vitesse v ne peut pas devenir nulle. Elle ne peut pas non plus être négative, car, pour le devenir, elle devrait passer par zéro.

Digitized by Google

Par conséquent la valeur de la vitesse v' qui réduit la dérivée $\frac{dv}{dt}$ à zéro est nécessairement plus grande que zéro.

A partir du point où la vitesse est v', la dérivée $\frac{dv}{dt}$ devient positive, et la vitesse croît avec le temps, jusqu'à ce qu'elle atteigne une nouvelle valeur v'' qui satisfait à l'équation

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f(v'') + \sin\theta'' = o.$$

La valeur v'' n'est pas un maximum proprement dit, puisque, s'il en était ainsi, la vitesse devrait recommencer à décroître à partir de v'', ce qui exigerait que $\frac{d^2v}{dt^2}$ devînt négative; mais $\frac{d^2v}{dt^2}$ conserve constamment une valeur positive, et quand elle s'annule $\left(\text{pour } \theta = -\frac{\pi}{2}\right)$, toutes les autres dérivées de v par rapport à t s'annulent aussi.

Par conséquent v'' est une limite vers laquelle converge la vitesse, dans la branche descendante, à mesure que le temps croît.

Donc: dans la branche descendante de la trajectoire la vitesse a une valeur minima au point où

$$f(v') + \sin\theta' = o,$$

et à partir de ce point la vitesse croît constamment dans le sens du mouvement, en s'approchant de la limite définie par l'équation

$$f(v'') + \sin\theta'' = o.$$

36. *Limite de l'inclinaison de la trajectoire dans la branche descendante. Limite de la vitesse.* L'une des deux forces qui agissent sur le projectile: la résistance, ralentissant le mouvement suivant la tangente, et l'autre: la pesanteur, abaissant constamment cette tangente, l'angle θ diminue, à mesure que le temps croît. Cherchons la limite de l'angle θ dans la branche descendante de la trajectoire. La dérivée de l'angle θ par rapport à t est exprimée par l'équation (3), n° 32, d'où l'on tire

$$dt = -\frac{v}{g} \cdot \frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Digitized by Google

En intégrant cette expression à partir d'un point quelconque pris pour origine, où $\theta = \varphi$ et $t = o$, on a

$$gt = \int_{\theta}^{\varphi} v \frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

La vitesse v entre les limites de $t = o$, jusqu'à $t = \infty$, comme nous l'avons démontré, est finie et ne peut pas devenir nulle; par suite

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots gt = K' \log \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)},$$

où K' est une certaine valeur moyenne entre toutes celles que prend la vitesse v dans les limites de l'intégration.

Cette équation fait voir que pour $t = \infty$, on doit avoir

$$\theta'' = -\frac{\pi}{2}.$$

En mettant cette valeur dans l'équation (4), $n°$ 104, on voit que la limite vers laquelle tend la vitesse dans la branche descendante est définie par l'équation

$$f(v'') - 1 = 0,$$

et l'on devait s'y attendre, car cette équation mise sous la forme $\frac{\rho}{P} - 1 = 0$, ou $\rho = P$ fait voir que la vitesse, après avoir atteint sa valeur minima, tend dans la suite du mouvement vers la valeur où la résistance de l'air est égale au poids du projectile.

La vitesse des projectiles dans la branche descendante à partir de sa valeur minima jusqu'à sa valeur limite est toujours plus petite que $376^{m:s}$. Par conséquent pour déterminer la vitesse limite du projectile il faut prendre ($n°$ 28) l'expression suivante de la résistance de l'air

$$\rho = \mathfrak{A}_0 \pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^2 \left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right),$$

où $\mathfrak{A}_0 = 0{,}012$, $r = 186^{m:s}$.

Digitized by Google

Posant

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}\pi R^2 g},$$

et prenant $\Pi = \Pi_1$, on a

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc}\left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right].$$

La vitesse limite s'obtiendra de l'équation

$$\frac{v''^2}{2gc}\left[1 + \frac{v''^2}{r^2}\right] = 1,$$

et l'on aura

$$v'' = \sqrt{\frac{r^2}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{8gc}{r^2}} - 1\right]}.$$

On a inséré dans le tableau suivant les limites des vitesses que peuvent acquérir nos projectiles sphériques par leur chute dans l'air.

Projectiles sphériques.	Diamètre $2R$	Poids P	Vitesse limite de chute dans l'air v''	Projectiles sphériques	Diamètre $2R$	Poids P	Vitesse limite de chute dans l'air v''
Boulets de 120[l]	0[m],2695	72[k],48	211[m:s]	Obus de 200[l]	0[m],3307	97[k],50	205[m:s]
Boulets de 60[l]	0,1921	26,00	190	Obus de 120[l]	0,2695	51,60	191
Boulets de 36[l]	0,1693	17,73	182	Obus de 80[l]	0,2413	37,38	184
Boulets de 30[l]	0,1590	14,94	178	Obus de 40[l]	0,1921	18,43	169
Boulets de 24[l]	0,1490	12,08	175	Obus de 20[l]	0,1490	8,93	157
Boulets de 18[l]	0,1337	8,72	168	Obus de 10[l]	0,1185	4,50	145
Boulets de 12[l]	0,1185	6,06	161				
Boulets de 6[l]	0,0921	2,87	148				

Digitized by Google

37. *Durée.* Le temps que met le projectile à parcourir le trajet du point où $\theta = \varphi$ et $v = V$, jusqu'au point où l'angle d'inclinaison est θ et la vitesse v est déterminé par l'équation (5), $n°$ 36

$$gt = K' \log \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)},$$

où K' est une certaine valeur finie, moyenne entre toutes celles que prend la vitesse v dans les limites de l'intégration.

Pour trouver le temps que met le projectile à parcourir le trajet du point de départ jusqu'au point où la vitesse atteint sa valeur minima, il faut déterminer la valeur de l'angle θ' qui correspond à la vitesse minima v'.

L'intégration de l'équation différentielle (6), $n°$ 32

$$\frac{dv_1}{d\theta} = \frac{v_1 f(v)}{\cos\theta}$$

donnant v en fonction de θ, on pourra à l'aide de l'équation

$$\frac{dv}{dt} = -g\left[f(v) + \sin\theta\right] = 0$$

trouver la valeur de θ qui correspond à la vitesse minima v'.

On peut intégrer l'équation différentielle (6) $n°$ 100, quand la résistance de l'air est exprimée par un terme proportionnel à une puissance quelconque de la vitesse. Admettons

$$\rho = \mathfrak{A}_0 \pi R^2 v^n,$$

et supposons n un nombre entier.

Posant

$$k^n = \frac{P}{\mathfrak{A}_0 \pi R^2},$$

nous aurons

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^n}{k^n} = \frac{{v_1}^n}{k^n \cos^n\theta}.$$

Digitized by Google

Mettant cette expression dans l'équation (6), $n°$ 32, et intégrant de V jusqu'à v et de φ jusqu'à θ, on a

$$\frac{v^n}{k^n} = \frac{1}{n\left[\frac{k^n}{nV^n\cos^n\varphi} + \int_\theta^\varphi \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}\right]\cos^n\theta},$$

où

dans le cas de n pair

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \frac{\sin\theta}{n}\left[\frac{1}{\cos^n\theta} + \frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{1}{\cos^{n-2}\theta} + \frac{n-3}{n-4}\cdot\frac{1}{\cos^{n-4}\theta} + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-1)}{2.4\ldots(n-2)}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\right] + \frac{1.3\ldots(n-)}{2.4\ldots n}\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right),$$

et dans le cas de n impair

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \frac{\sin\theta}{n}\left[\frac{1}{\cos^n\theta} + \frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{1}{\cos^{n-2}\theta} + \frac{n-3}{n-4}\cdot\frac{1}{\cos^{n-4}\theta} + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-1)}{1.3\ldots(n-2)}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\right].$$

Mettant la valeur trouvée de $\frac{v^n}{k^n}$ au lieu de $f(v)$ dans l'équation

$$f(v) + \sin\theta = 0,$$

on obtient

$$-\int_\theta^\varphi \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} - \frac{1}{n\sin\theta\cos^n\theta} = \frac{k^n}{nV^n\cos^n\varphi},$$

ou, dans le cas de n pair

$$-\frac{1}{n\sin\theta}\left[\left(1-\frac{n-1}{n-2}\cdot\sin^2\theta\right)\frac{1}{\cos^{n-2}\theta} - \frac{n-3}{n-4}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^{n-4}\theta} - \ldots - \frac{3.5\ldots(n-1)}{2.4\ldots(n-2)}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right] - \frac{1.3\ldots(n-1)}{2.4\ldots n}\log\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{k^n}{nV^n\cos^n\varphi} + \frac{\sin\varphi}{n}\left[\frac{1}{\cos^n\varphi} + \frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{1}{\cos^{n-2}\varphi} + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-1)}{2.4\ldots(n-2)}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}\right],$$

Digitized by Google

et dans le cas de n impair

$$-\frac{1}{n\sin\theta}\left[\left(1-\frac{n-1}{n-2}\sin^2\theta\right)\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}-\frac{n-3}{n-4}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^{n-4}\theta}-\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{2.4\ldots(n-1)}{1.3\ldots(n-2)}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right]$$
$$=\frac{k^n}{nV^n\cos^n\varphi}+\frac{\sin\varphi}{n}\left[\frac{1}{\cos^n\varphi}+\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{1}{\cos^{n-2}\varphi}+\ldots+\frac{2.4\ldots(n-1)}{1.3\ldots(n-2)}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\right].$$

Les deux dernières équations ne peuvent être autrement satisfaites que par une valeur négative de θ; et l'on devait s'y attendre, car on sait que le point où la vitesse atteint son minimum est situé dans la branche descendante de la trajectoire. En changeant donc θ en $-\theta$ dans le premier membre de chacune de ces deux équations et puis en posant $\theta=o$ et $\theta=\frac{\pi}{2}$ on voit que, dans le premier cas, le premier membre de chacune de ces équations se réduit à $+\infty$ et dans le second cas à $-\infty$, de manière que l'angle qui satisfait à ces équations et qui correspond à la vitesse minima est nécessairement plus grand que $-\frac{\pi}{2}$, toutes les fois que l'angle de projection est plus petit que $\frac{\pi}{2}$ et est plus grand que $-\frac{\pi}{2}$.

Le temps qui est nécessaire pour que la vitesse devienne un minimum est toujours fini. En effet, l'angle d'inclinaison $-\theta'$ qui correspond au minimum de la vitesse étant toujours plus grand que $-\frac{\pi}{2}$, l'équation (5), $n°$ 36 fait voir que le temps nécessaire, pour que la vitesse devienne un minimum, est toujours fini.

Le temps nécessaire pour que la vitesse atteigne une valeur constante, est infini. En effet, la vitesse atteint une valeur constante, quand $\theta=-\frac{\pi}{2}$, et dans ce cas l'équation (5), $n°$ 36 fait voir que le temps est infini.

38. *Longueur de l'arc.* La longueur de l'arc qui correspond à la vitesse minima v' s'obtient (éq. 8, $n°$ 32) de l'expression

$$gs=\int_{\theta'}^{\varphi}v^2\frac{d\theta}{\cos\theta}=K''\log\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta'}{2}\right)},$$

Digitized by Google

où K'' est une certaine valeur finie moyenne entre toutes celles que prend v^2 dans les limites de l'intégration, et le $\log \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta'}{2}\right)}$ ayant une valeur finie, l'arc qui correspond à la vitesse minima est fini.

L'arc qui correspond à la vitesse limite v'' est donné (éq. 8, $n°$ 32) par l'expression

$$gs = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi} v^2 \frac{d\theta}{\cos\theta} = K''' \log \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang} 0},$$

où K''' est une certaine valeur finie moyenne entre toutes celles que prend v^2 dans les limites de l'intégration, et le $\log \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang} 0}$ étant égal à ∞, l'arc qui correspond à la vitesse limite est infini.

39. *Asymptote de la branche descendante.* On a vu ($n°$ 36) que la tangente extrême de la branche descendante est verticale; démontrons qu'elle est située à une distance finie du point de départ, ou en d'autres termes que la branche descendante de la trajectoire a une asymptote.

La distance au point de départ du point de l'intersection de la tangente extrême avec l'abscisse des x est déterminée (éq. 9, 32) par l'expression

$$gx = -\int_{\varphi}^{-\frac{\pi}{2}} v^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi} v^2 d\theta.$$

La valeur de v^2 étant toujours finie entre les limites de l'intégration, ainsi que celle de l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$, la valeur de x est finie. Donc la branche descendante a une asymptote verticale.

Digitized by Google

40. *Rayon de courbure.* On a pour l'expression du rayon de courbure (éq. 2, $n°$ 32)

$$\gamma = \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{\cos\theta},$$

qui fait voir que le rayon de courbure va en diminuant jusqu'au sommet de la trajectoire, c'est-à-dire tant que v et $\frac{1}{\cos\theta}$ décroissent.

Au-delà du sommet v décroît encore, mais $\frac{1}{\cos\theta}$ croît: on ne peut donc à la simple inspection décider, si γ continue de décroître. Pour le reconnaître prenons la première dérivée de γ par rapport à θ et examinons son signe. On a

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{2v}{g} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{dv}{d\theta} + \frac{v^2}{g} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

L'équation (6), $n°$ 32 donne

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{\cos\theta} v \left[f(v) + \sin\theta \right];$$

en substituant cette valeur dans l'expression de $\frac{d\gamma}{d\theta}$, il vient

$$\frac{d\gamma}{d\theta} + \frac{v^2}{g\cos^2\theta} \left[2f(v) + 3\sin\theta \right].$$

Cette expression fait voir qu'au-delà du sommet la dérivée $\frac{d\gamma}{d\theta}$ est positive et que par suite γ continue de décroître, mais seulement jusqu'au point où θ satisfait à l'équation

$$2f(v) + 3\sin\theta = 0.$$

En ce point la seconde dérivée

$$\frac{d^2\gamma}{d\theta^2} = \frac{\gamma}{\cos^2\theta} \left[\tfrac{2}{3} vf(v) f'(v) + 3\cos^2\theta \right]$$

est positive, et par suite le rayon de courbure atteint en ce point sa valeur minima et va ensuite en croissant jusqu'à l'infini.

Digitized by Google

La valeur de $\frac{dv}{d\theta}$ au point où le rayon de courbure est un minimum, par suite de la condition $2f(v) + 3\sin\theta = 0$, se réduit à

$$\frac{dv}{d\theta} = -\tfrac{1}{2} v \operatorname{tang} \theta.$$

L'angle θ étant négatif dans la branche descendante, cette valeur de $\frac{dv}{d\theta}$ est positive; donc au point où la courbure est maxima, v décroît avec θ, c'est-à-dire que la vitesse n'atteint pas encore son minimum.

Par conséquent le point correspondant à la courbure maxima est plus voisin du sommet que le point où la vitesse est minima.

41. *La vitesse et le rayon de courbure, pour des inclinaisons de la trajectoire égales, mais de signes contraires, sont plus grands dans la branche ascendante que dans la branche descendante.* En effet, l'équation (6), n° 32

$$\frac{d(v\cos\theta)}{d\theta} = vf(v)$$

fait voir que la vitesse horizontale $v\cos\theta$ diminue avec l'angle θ, c'est-à-dire qu'elle va en diminuant du point de départ jusqu'au point de chute; donc pour la même valeur de $\cos\theta$, la vitesse v est plus grande dans la branche ascendante que dans la branche descendante.

On arrive à la même conclusion pour le rayon de courbure, en examinant l'expression

$$\gamma = \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{\cos\theta}.$$

42. *L'angle de chute θ_1 sur un terrain situé au même niveau que la bouche à feu est plus grand que l'angle de projection φ.* Prenons la valeur de y donnée par l'équation (10), n° 32

$$gy = -\int_{\varphi}^{\theta} v^2 \operatorname{tang}\theta \, d\theta.$$

Digitized by Google

L'ordonnée y étant égale à zéro au point de départ et au point de chute, on a

$$o = \int_{\varphi}^{o} v^2 \operatorname{tang} \theta \, d\theta + \int_{o}^{-\theta} v^2 \operatorname{tang} \theta \, d\theta,$$

d'où

$$\int_{o}^{\varphi} v^2 \operatorname{tang} \theta \, d\theta = \int_{o}^{-\theta_1} v^2 \operatorname{tang} \theta \, d\theta,$$

ou, en remarquant que l'angle θ est négatif dans la branche descendante et mettant $-\theta$ au lieu de θ dans l'intégrale $\int_{o}^{-\theta_1} v^2 \operatorname{tang} \theta d\theta$ on aura

$$\int_{o}^{\varphi} v^2 \operatorname{tang} \theta \, d\theta = \int_{o}^{\theta_1} v^2 \operatorname{tang} \theta \, d\theta.$$

La vitesse, pour des inclinaisons égales, mais de signes contraires, étant ($n°$ 41) plus petite dans la branche descendante que dans la branche ascendante, la fonction sous le signe de la seconde intégrale est plus petite que celle sous le signe de la première intégrale; pour que ces deux intégrales soient égales il faut que θ_1 soit plus grand que φ. Donc l'angle de chute est plus grand que l'angle de projection.

43. *La vitesse au point de chute, celui-ci étant situé au même niveau que la bouche à feu, est plus petite que la vitesse au point de départ.* Si dans l'équation (1), $n°$ 35

$$\frac{dv}{dt} = -g\left[f(v) + \sin\theta\right]$$

on met $\frac{ds}{v}$ à la place de dt, et si l'on remarque que $\sin\theta \, . \, ds = dy$, on obtient

$$v dv = -gf(v) ds - g dy.$$

Digitized by Google

Intégrant à partir de $v = V$, $s = o$, $y = o$, on a

$$v^2 = V^2 - 2g\int_o^s f(v)\,ds - 2gy.$$

En nommant V' la vitesse de chute, s' la longueur de l'arc de la trajectoire entre le point de départ et le point de chute, et remarquant qu'au point de chute $y = o$, on aura

$$V'^2 = V^2 - 2g\int_o^{s'} f(v)\,ds,$$

d'où l'on voit que $V' < V$.

Donc la vitesse au point de chute, celui-ci étant situé au même niveau que la bouche à feu, est plus petite que la vitesse au point de départ.

44. *L'amplitude de la branche ascendante est plus grande que celle de la branche descendante.* On a

$$dx = \frac{dy}{\text{tang}\,\theta}.$$

Désignant par x' la projection horizontale ou l'amplitude de la branche ascendante, par x'' celle de la branche descendante et par Y la hauteur totale du jet, on obtient

$$x' = \int_o^Y \frac{dy}{\text{tang}\,\theta}$$

et

$$x'' = \int_Y^o \frac{dy}{\text{tang}\,\theta} = -\int_o^Y \frac{dy}{\text{tang}\,\theta},$$

ou, en remarquant que l'angle θ est négatif dans la branche descendante et mettant $-\theta$ à la place de θ dans l'expression de x'', on a

$$x'' = \int_o^Y \frac{dy}{\text{tang}\,\theta}.$$

Digitized by Google

Les angles θ aux points qui se trouvent dans les mêmes plans horizontaux étant ($n°$ 43) plus grands dans la branche descendante que dans la branche ascendante, la quantité qui se trouve sous le signe intégral dans l'expression de x'' est plus petite que celle de l'expression x'; or les limites des deux intégrales étant les mêmes et la limite supérieure étant plus grande que l'inférieure, on voit que x'' est plus petit que x'.

Donc l'amplitude de la branche ascendante est plus grande que celle de la branche descendante.

§ III.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT.

45. *Cas où il est facile d'intégrer l'équation différentielle du mouvement.* Les expressions de la résistance qui ont pour base certaines hypothèses sur la théorie de la résistance ou les résultats des expériences directes sur la résistance et qui permettent d'intégrer facilement l'équation différentielle du mouvement (6), $n°$ 32 — ces expressions sont peu nombreuses. L'une d'elles, qui comprend le cas le plus général, est la suivante

$$\rho = \pi R^2 (\lambda + \beta v^n).$$

Dans ce cas l'équation (6) $n°$ 32 peut être facilement ramenée à une équation différentielle linéaire du premier ordre.

On sait qu'on peut toujours négliger, dans l'expression de la résistance de l'air, le terme indépendant de la vitesse; c'est pourquoi nous allons nous occuper ici de l'intégration des équations différentielles du mouvement, en supposant la résistance exprimée par un seul terme proportionnel à la n^{me} puissance de la vitesse.

46. *Intégration des équations différentielles du mouvement*

Digitized by Google

dans le cas où la résistance de l'air est exprimée par la formule

$$\rho = \mathfrak{A} \frac{\Pi}{\Pi_1} \pi R^2 v^n \text{ *)}.$$

Posant

$$\frac{P}{\mathfrak{A} \pi R^2} \cdot \frac{\Pi_1}{\Pi} = k^n,$$

on a

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^n}{k^n} = \frac{1}{k^n} \cdot \frac{{v_1}^n}{\cos^n \theta}$$

et l'équation différentielle (6), $n°$ 32 se réduit à

$$\frac{dv_1}{d\theta} = \frac{1}{k^n} \cdot \frac{{v_1}^{n+1}}{\cos^{n+1}\theta},$$

d'où l'on trouve en séparant les variables

$$\frac{dv_1}{{v_1}^{n+1}} = \frac{1}{k^n} \cdot \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}.$$

Appelant φ l'angle de projection, V_1 la projection horizontale $V \cos \varphi$ de la vitesse initiale, et intégrant entre les limites des v_1 à V_1 et de θ à φ, on a

$$v_1 = \frac{V_1}{\left[1 + \frac{n {V_1}^n}{k^n} \int_\theta^\varphi \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}\right]^{\frac{1}{n}}}$$

---

*) On a construit sur les figures 7 et 8 les valeurs de ρ' correspondantes à diverses vitesses, déduites des résultats des expériences sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles, et on a inséré au $n°$ 27 les expressions de ρ' qui représentent ces résultats. En remarquant que

$$\rho = \pi R^2 \rho' \frac{\Pi}{\Pi_1} v^2,$$

on voit qu'il faut prendre dans la formule

$$\rho = \mathfrak{A} \frac{\Pi}{\Pi_1} \pi R^2 v^n,$$

pour le coefficient $\mathfrak{A}$ une valeur moyenne entre toutes celles que prend $\frac{\rho'}{v^{n-2}}$ dans les limites des vitesses qu'on a à considérer.

Digitized by Google

et

$$v = \frac{V}{\left[1 + \frac{nV_1^n}{k^n}\int_\theta^\varphi \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}\right]^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

L'intégrale qui se trouve au dénominateur s'exprime en termes finis, et par suite la vitesse v s'exprime aussi en termes finis, toutes les fois que n est un nombre entier.

Substituant la valeur trouvée de v_1 en fonction de θ dans les formules suivantes ($n°$ 32)

$$ds = -\frac{1}{g} v_1^2 \frac{d\theta}{\cos^3\theta},$$

$$dx = -\frac{1}{g} v_1^2 \frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

$$dy = -\frac{1}{g} v_1^2 \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^3\theta},$$

$$dt = -\frac{1}{g} v_1 \frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

on obtient les expressions

$$s = \frac{V_1^2}{g}\int_\theta^\varphi \frac{\frac{d\theta}{\cos^3\theta}}{\left[1 + \frac{nV_1^n}{k^n}\int_\theta^\varphi \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}\right]^{\frac{2}{n}}},$$

$$x = \frac{V_1^2}{g}\int_\theta^\varphi \frac{\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\left[1 + \frac{nV_1^n}{k^n}\int_\theta^\varphi \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}\right]^{\frac{2}{n}}},$$

$$y = \frac{V_1^2}{g}\int_\theta^\varphi \frac{\frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^3\theta}}{\left[1 + \frac{nV_1^n}{k^n}\int_\theta^\varphi \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}\right]^{\frac{2}{n}}},$$

Digitized by Google

$$t = \frac{V_1}{g} \int_{\theta}^{\varphi} \frac{\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\left[1 + \frac{nV_1^n}{k^n} \int_{\theta}^{\varphi} \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}\right]^{\frac{1}{n}}},$$

Entre ces formules on obtient sous forme finie:

1° celle qui donne s, quand $n = 2$. Dans ce cas, en posant

$$\xi(\theta) = \int \frac{d\theta}{\cos^3\theta}, \text{ *)}$$

on a

$$s = \frac{V_1^2}{g} \int_{\theta}^{\varphi} \frac{d\xi(\theta)}{1 + \frac{2V_1^2}{k^2}\xi(\varphi) - \frac{2V_1^2}{k^2}\xi(\theta)}$$

et

$$s = \frac{k^2}{2g} \log\left[1 + \frac{2V_1^2}{k^2}\left(\xi(\varphi) - \xi(\theta)\right)\right]$$

et 2° celle qui donne t, quand $n = 1$. Dans ce cas

$$t = \frac{V_1}{g} \int_{\theta}^{\varphi} \frac{d \operatorname{tang}\theta}{1 + \frac{V_1}{k} \operatorname{tang}\varphi - \frac{V_1}{k} \operatorname{tang}\theta}$$

et

$$t = \frac{k}{g} \log\left[1 + \frac{V_1}{k}(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta)\right].$$

Les expressions de x et de y en fonction de θ ne pouvant être obtenues sous forme finie dans aucun des cas particuliers, de manière qu'il devient indispensable de calculer leurs valeurs approximativement; nous chercherons les expressions exactes de v, t, θ et y en fonction de x pour le cas de $n = 1$, et pour les cas de $n > 1$, où

---

*) $\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos\theta} + \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right] + \text{const.}$

Digitized by Google

l'on ne peut obtenir les expressions exactes de ces valeurs, ainsi que pour les expressions de la résistance qui diffèrent des précédentes, nous exposerons une méthode approximative d'intégration des équations différentielles du mouvement. Quant aux formules de ce numéro, nous en profiterons pour déduire les conditions de la similitude des trajectoires décrites dans l'air par les projectiles sphériques qui n'ont pas de rotation.

47. *Conditions de la similitude des trajectoires décrites dans l'air par les projectiles sphériques qui n'ont pas de mouvement de rotation.* Deux projectiles sphériques qui se meuvent sans rotation dans l'air et éprouvent des résistances proportionnelles aux densités de l'air, aux sections des grands cercles des projectiles et aux n^{mes} puissances de leurs vitesses, décrivent des trajectoires semblables: 1° si les deux projectiles sont tirés sous le même angle de projection, et 2° si les vitesses des projectiles, aux points de départ, sont proportionnelles aux racines n^{mes} de leurs diamètres, aux racines n^{mes} de leurs densités et inversement proportionnelles aux racines n^{mes} des densités de l'air dans lequel ils se meuvent.

Si ces conditions sont remplies, 1° les vitesses des projectiles aux points homologues des deux trajectoires (c'est-à-dire aux points où les angles d'inclinaison des deux trajectoires sont les mêmes) et les durées que mettent les projectiles à atteindre ces points sont proportionnelles aux vitesses initiales des projectiles, et 2° les dimensions linéaires des deux trajectoires sont proportionnelles aux carrés des vitesses initiales.

En effet, appelant R et R' les rayons des projectiles, D et D' leurs densités, Π et Π' les densités de l'air dans lequel se meuvent les projectiles, V et V' les vitesses initiales des projectiles, v et v' les vitesses des projectiles aux points homologues, t et t' les durées que mettent les projectiles à atteindre ces points, k^n et k'^n les coefficients de la résistance, et posant

$$\lambda = \frac{R'}{R},\ \mu = \frac{D'}{D},\ \pi = \frac{\Pi'}{\Pi},\ w_0 = \frac{V'}{V},\ \tau = \frac{t'}{t},\ \sigma = \frac{s'}{s} = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y},$$

Digitized by Google

on a

$$\frac{k'^n}{k^n} = \frac{\dfrac{P'}{\mathfrak{A}_0 \pi R'^2} \cdot \dfrac{\Pi_1}{\Pi'}}{\dfrac{P}{\mathfrak{A}_0 \pi R^2} \cdot \dfrac{\Pi_1}{\Pi}} = \frac{\dfrac{P'}{R'^2 \Pi'}}{\dfrac{P}{R^2 \Pi}} = \frac{\dfrac{\frac{4}{3}\pi R'^3 D'}{R'^2 \Pi'}}{\dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3 D}{R^2 \Pi}} = \frac{\dfrac{R' D'}{\Pi'}}{\dfrac{RD}{\Pi}} = \frac{\lambda\mu}{\pi},$$

et comme d'après les conditions de la similitude des trajectoires

$$w_0 = \sqrt[n]{\frac{\lambda\mu}{\pi}},$$

on trouve

$$\frac{nV'^n}{k'^n} = \frac{w_0^n}{\dfrac{\lambda\mu}{\pi}} \cdot \frac{nV_1^n}{k^n} = \frac{nV_1^n}{k^n};$$

par suite les formules du numéro précédent donnent

$$\frac{v'}{v} = w_0,$$

$$\tau = \frac{t'}{t} = w_0,$$

$$\sigma = \frac{s'}{s} = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = w_0^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

48. *Équations du mouvement dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle à la première puissance de la vitesse.* Soit

$$\rho = \mathfrak{A}_0 \frac{\Pi}{\Pi_1} \pi R^2 v.$$

Posant

$$\frac{P}{\mathfrak{A}_0 \pi R^2} \cdot \frac{\Pi_1}{\Pi} = k,$$

on a

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v}{k} = \frac{v_1}{k \cos\theta},$$

et en mettant cette valeur dans l'équation (6), *n°* 32 on trouve

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = k \frac{dv_1}{v_1^2}.$$

Digitized by Google

Substituant cette expression dans l'équation (9), $n°$ 32, et intégrant entre les limites de o à x et de V_1 à v_1, on a

$$x = \frac{k}{g}(V_1 - v_1),$$

d'où l'on tire

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v_1 = V_1 - \frac{g}{k}x$$

et

$$\frac{1}{v_1^2} = \frac{1}{\left(V_1 - \frac{g}{k}x\right)^2}.$$

Mettant cette expression dans l'équation (9), $n°$ 32, et intégrant entre les limites de φ à θ et de o à x, on trouve

$$(2) \ldots\ldots\ldots \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi + \frac{k}{V_1} - \frac{k}{V_1 - \frac{g}{k}x},$$

ou

$$(3) \ldots\ldots\ldots \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{gx}{V_1^2\left(1 - \frac{gx}{kV_1}\right)}.$$

Mettant $\frac{dy}{dx}$ à la place de $\operatorname{tang}\theta$ dans l'équation (2) et intégrant de o à y et de o à x, on a

$$(4) \ldots\ldots\ldots y = x\left(\operatorname{tang}\varphi + \frac{k}{V_1}\right) + \frac{k^2}{g}\log\left(1 - \frac{gx}{kV_1}\right),$$

ou, en développant $\log\left(1 - \frac{gx}{kV_1}\right)$ en série, on trouve

$$(5) \ldots\ldots\ldots y = x\operatorname{tang}\varphi - \frac{gx^2}{2V_1^2} - \frac{g^2x^3}{3kV_1^3} - \frac{g^3x^4}{4k^2V_1^4} - \ldots.$$

La durée s'obtient en mettant dans l'expression

$$dt = \frac{dx}{v_1}$$

la valeur de v_1 de l'équation (1) et en intégrant entre les limites de o à t et de o à x; on trouve

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t = \frac{k}{g}\log\frac{V_1}{V_1 - \frac{g}{k}x}.$$

Digitized by Google

Les équations (5) et (3) font voir que, pour les mêmes valeurs de x, plus le coefficient $\frac{1}{k}$ est grand, plus les valeurs de y et de tang θ sont petites. Les angles θ étant négatifs dans la branche descendante, on voit que dans cette branche, pour une même valeur de x, la valeur absolue de θ croît avec la valeur de $\frac{1}{k}$.

49. *Relation entre la résistance, les ordonnées et les angles d'inclinaison, pour une même valeur de x, quelle que soit la loi de la résistance.* Pour appliquer les équations du mouvement déduites dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle à la première puissance de la vitesse au cas d'une loi quelconque de la résistance, il faut égaler le coefficient constant $\frac{1}{k}$ à une certaine valeur moyenne (différente pour chacune des équations) entre toutes celles que prend l'expression $\frac{f(v)}{v}$ dans les limites de $v = V$ à v. La fonction $f(v)$ croît avec la résistance, ainsi que le rapport $\frac{f(v)}{v}$ (toutes les fois que le degré de $f(v)$ surpasse le premier), et par suite croît aussi le coefficient $\frac{1}{k}$. Donc, quelle que soit la loi de la résistance de l'air, à une plus grande résistance correspond, pour une même valeur de l'abscisse x, une plus petite ordonnée y et dans la brancheascendante un plus petit angle θ, tandis que dans la branche descendante à une plus grande résistance correspond un plus grand angle θ (abstraction faite du signe).

50. *Méthode d'approximation pour intégrer les équations différentielles du mouvement.* Si dans l'équation différentielle (6), $n°$ 32

$$\frac{dv_1}{d\theta} = f(v)\frac{v_1}{\cos\theta},$$

où

$$f(v) = \frac{\rho}{P},$$

on peut substituer à la fonction $f(v)$ cette autre fonction

$$\frac{f(\alpha v\cos\theta)}{\alpha\cos\theta} = \frac{f(\alpha v_1)}{\alpha\cos\theta},$$

α étant une constante choisie convenablement, les variables peuvent être immédiatement séparées, quelle que soit la forme de la fonction $f(v)$.

Digitized by Google

On peut faire cette substitution sans grande erreur toutes les fois que l'angle θ, dans toute l'étendue de la courbe que l'on considère, varie dans des limites assez restreintes, pourvu qu'on prenne pour α une valeur constante telle que le produit $\alpha \cos \theta$ diffère le moins possible de l'unité pour toutes les valeurs qu'il acquiert entre $\theta = \varphi$ et θ.

Opérant cette substitution, on obtient l'équation

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \alpha \frac{d(\alpha v_1)}{\alpha v_1 f(\alpha v_1)},$$

où les variables sont séparées.

En l'intégrant on a

$$(2) \ldots\ldots\ldots \operatorname{tang} \theta = \operatorname{tang} \varphi - \alpha \int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{d(\alpha v_1)}{(\alpha v_1) f(\alpha v_1)},$$

l'inclinaison de la trajectoire en fonction de la vitesse.

Substituant dans la formule (9), n° 32

$$dx = -\frac{1}{g} v_1^2 \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

la valeur de $\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$ de l'équation (1), il vient

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha x = \int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{\alpha v_1 \, d(\alpha v_1)}{f(\alpha v_1)}.$$

En effectuant l'intégration on aura l'expression de αx en fonction de αv_1 et de αV_1, et on en pourra tirer l'expression de αv_1 et celle de $\frac{1}{(\alpha v_1)^2}$ en fonction de αx et de αV_1. Soit

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha v_1 = \phi(\alpha x, \alpha V_1)$$

et

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{(\alpha v_1)^2} = \psi(\alpha x, \alpha V_1).$$

Digitized by Google

Pour trouver l'équation de la trajectoire, prenons l'équation (9), $n°$ 32, qui donne

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\alpha g \frac{d(\alpha x)}{(\alpha v_1)^2},$$

et en substituant la valeur de $\frac{1}{(\alpha v_1)^2}$ de l'équation (4), on a

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\alpha g \psi(\alpha x, \alpha V_1)\, d(\alpha x).$$

En intégrant et remarquant qu'au point de départ $\theta = \varphi$ et $x = o$, on trouve

$$(6)\ldots\ldots \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \alpha g \int_o^{\alpha x} \psi(\alpha x, \alpha V_1)\, d(\alpha x),$$

l'inclinaison de la trajectoire en fonction de x.

Mettant $\frac{dy}{dx}$ à la place de tang θ dans la dernière équation et intégrant en remarquant que pour $x = o$, $y = o$, on obtient

$$(7)\ldots\ldots y = x \operatorname{tang}\varphi - g \int_o^{xx} d(\alpha x) \int_o^{\alpha x} \psi(\alpha x, \alpha V_1)\, d(\alpha x),$$

l'équation de la trajectoire.

Le temps se détermine en mettant dans la formule (7), $n°$ 32 au lieu de $\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$ sa valeur de l'équation (1). On aura ainsi

$$(8)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t = \frac{1}{g} \int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{d(\alpha v_1)}{f(\alpha v_1)},$$

la durée en fonction de la vitesse.

Pour avoir le temps en fonction de x, il faut substituer dans l'expression trouvée de t, à la place de v_1 sa valeur de l'équation (4), ou bien, après avoir mis dans l'expression de $dt = \frac{dx}{v_1} = \frac{d(\alpha x)}{\alpha v_1}$ à la place de $\frac{1}{\alpha v_1}$ sa valeur de l'équation (5), déterminer le temps d'après la formule

$$(9)\ldots\ldots\ldots\ldots t = \int_o^{\alpha x} \sqrt{\psi(\alpha x, \alpha V_1)}\, d(\alpha x).$$

Digitized by Google

51. *Application au cas où la résistance est exprimée par un binome dont le premier terme est proportionnel au carré de la vitesse et le second à la quatrième puissance de la vitesse.* Dans ce cas

$$\rho = \mathfrak{A}\pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^2 \left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right].$$

Posant

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}\pi R^2 g} \cdot \frac{\Pi_1}{\Pi},$$

on a

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc}\left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right]$$

et

$$f(\alpha v_1) = \frac{(\alpha v_1)^2}{2gc}\left[1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right].$$

L'équation (2), $n°$ 50 devient

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - 2\alpha gc \int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{d(\alpha v_1)}{(\alpha v_1)^3\left[1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right]},$$

et remarquant que

$$\frac{1}{(\alpha v_1)^3\left[1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right]} = \frac{1}{(\alpha v_1)^3} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{\alpha v_1} + \frac{1}{r^4}\cdot\frac{\alpha v_1}{1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}},$$

on obtient

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{gc}{v_1^2}\left(1 - \frac{v_1^2}{V_1^2}\right) + \frac{\alpha gc}{r^2}\log\frac{V_1^2\left[1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right]}{v_1^2\left[1 + \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right]},$$

l'inclinaison de la trajection en fonction de la vitesse.

L'équation (3), $n°$ 50 devient

$$x = \frac{2c}{\alpha}\int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{d(\alpha v_1)}{\alpha v_1\left[1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right]},$$

Digitized by Google

et remarquant que

$$\frac{1}{\alpha v_1\left[1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right]}=\frac{1}{\alpha v_1}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\alpha v_1}{1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}},$$

on obtient

$$x=\frac{c}{\alpha}\log\frac{V_1^2\left[1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right]}{v_1^2\left[1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right]},$$

l'abscisse x en fonction de la vitesse,

et cette équation donne

$$v_1=\frac{V_1}{\sqrt{\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)e^{\frac{\alpha x}{c}}-\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}}},$$

la vitesse en fonction de l'abscisse x.

Par suite l'équation (5), n° 50 devient

$$\psi(\alpha x,\alpha V_1)=\frac{1}{(\alpha V_1)^2}\left[\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)e^{\frac{\alpha x}{c}}-\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right],$$

et en mettant cette expression dans les équations (6) et (7), n° 50, on obtient

$$\operatorname{tang}\theta=\operatorname{tang}\varphi-\frac{g}{V_1^2}\left[\frac{c}{\alpha}\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)\left(e^{\frac{\alpha x}{c}}-1\right)-\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}x\right]$$

et

$$y=x\operatorname{tang}\varphi-\frac{g}{V_1^2}\left[\frac{c^2}{\alpha^2}\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)\left(e^{\frac{\alpha x}{c}}-\frac{\alpha x}{c}-1\right)-\frac{1}{2}\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}x^2\right)\right],$$

ou

$$\operatorname{tang}\theta=\operatorname{tang}\varphi-\frac{gx}{V_1^2}\left[\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)\frac{e^{\frac{\alpha x}{c}}-1}{\frac{\alpha x}{c}}-\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right],$$

l'inclinaison de la trajectoire en fonction de x,

Digitized by Google

et

$$y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{gx^2}{2V_1^2}\left[\left(1 + \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)\frac{e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{\alpha x}{c} - 1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^2} - \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right],$$

l'équation de l'arc de la trajectoire que l'on considère.

L'équation (8), $n°$ 50 devient

$$t = 2c\int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{d(\alpha v_1)}{(\alpha v_1)^2\left[1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right]},$$

et remarquant que

$$\frac{1}{(\alpha v_1)^2\left[1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right]} = \frac{1}{(\alpha v_1)^2} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}},$$

on a

$$t = 2c\left[\frac{1}{(\alpha v_1)} - \frac{1}{(\alpha V_1)} - \frac{1}{r}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\alpha V_1}{r} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\alpha v_1}{r}\right)\right]$$

ou

$$t = \frac{x}{V_1}\cdot\frac{\frac{V_1}{v_1} - 1 - \frac{\alpha V_1}{r}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\alpha V_1}{r} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\alpha v_1}{r}\right)}{\frac{\alpha x}{2c}},$$

et en se rappelant que

$$v_1 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(1 + \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}}},$$

on obtient

$$t = \frac{x}{V_1}\cdot\frac{\sqrt{\left(1 + \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}} - 1 - \frac{\alpha V_1}{r}\left[\operatorname{arctg}\frac{\alpha V_1}{r} - \operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha V_1}{r}}{\sqrt{\left(1 + \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}}}\right]}{\frac{\alpha x}{2c}}$$

le temps en fonction de x.

Digitized by Google

Posant

$$z = \frac{\alpha x}{c},\quad V_0^2 = \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2},$$

$$F_1(z) = \frac{e^z - 1}{z},\quad F(z) = \frac{e^z - z - 1}{\frac{1}{2}z^2},$$

$$\mathfrak{P}(z, V_0^2) = (1 + V_0^2) F(z) - V_0^2,$$

$$\mathfrak{J}(z, V_0^2) = (1 + V_0^2) F_1(z) - V_0^2,$$

$$\mathcal{V}(z, V_0^2) = \sqrt{(1 + V_0^2) e^z - V_0^2},$$

$$\mathfrak{T}(z, V_0^2) = \frac{\mathcal{V}(z, V_0^2) - 1 - V_0 \left(\text{arc tang } V_0 - \text{arc tang} \frac{V_0}{\mathcal{V}(z, V_0^2)} \right)}{\frac{1}{2}z},$$

on réduit les formules obtenues aux suivantes:

L'équation de la partie de la trajectoire que l'on considère

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{g x^2}{2 V_1^2} \mathfrak{P}(z, V_0^2).$$

L'inclinaison de la trajectoire en fonction de x

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \operatorname{tang} \theta = \operatorname{tang} \varphi - \frac{g x}{V_1^2} \mathfrak{J}(z, V_0^2).$$

L'abscisse x en fonction de la vitesse

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots x = \frac{c}{\alpha} \cdot \frac{1}{\text{Log } e} \cdot \text{Log} \frac{V_1^2 \left(1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right)}{v_1^2 \left(1 + \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)}.$$

La vitesse en fonction de x

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v = \frac{V}{\mathcal{V}(z, V_0^2)} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \theta}.$$

La durée en fonction de x

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t = \frac{x}{V_1} \mathfrak{T}(z, V_0^2).$$

L'inclinaison de la trajectoire en fonction de la vitesse

$$(6) \ldots \operatorname{tang} \theta = \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{gc}{v_1^2} \left(1 - \frac{v_1^2}{V_1^2}\right) + \frac{\alpha g c}{r^2} \cdot \frac{1}{\text{Log } e} \cdot \text{Log} \frac{V_1^2 \left[1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right]}{v_1^2 \left[1 + \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right]}.$$

Digitized by Google

52. *Application au cas où la résistance est exprimée par un terme proportionnel au carré de la vitesse.* Dans ce cas

$$\rho = \mathfrak{A}\pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^2.$$

Posant

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}\pi R^2 g} \cdot \frac{\Pi_1}{\Pi},$$

on a

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc}$$

et

$$f(\alpha v_1) = \frac{(\alpha v_1)^2}{2gc}.$$

Procédant comme on l'a fait au n° 51 et posant

$$z = \frac{ax}{c},$$

$$F_1(z) = \frac{e^z - 1}{z},\ F(z) = \frac{e^z - z - 1}{\frac{1}{2} z^2},$$

on trouve:

L'équation de la partie de la trajectoire que l'on considère

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{gx^2}{2V_1^2} F(z).$$

L'inclinaison de la trajectoire en fonction de x

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \operatorname{tang} \theta = \operatorname{tang} \varphi - \frac{gx}{V_1^2} F_1(z)..$$

L'abscisse x en fonction de la vitesse

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x = \frac{2c}{a} \frac{1}{\operatorname{Log} e} \cdot \operatorname{Log} \frac{V_1}{v_1}.$$

La vitesse en fonction de x

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v = \frac{V}{e^{\frac{z}{2}}} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \theta}.$$

La durée en fonction de x

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t = \frac{x}{V_1} \cdot F_1\left(\frac{z}{2}\right).$$

Digitized by Google

L'inclinaison de la trajectoire en fonction de la vitesse

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{ge}{v_1^2}\left(1-\frac{v_1^2}{V_1^2}\right).$$

On peut obtenir les formules de ce numéro directement de celles du n° 51 en y posant $r=\infty$.

53. *Application au cas où la résistance est exprimée par un terme proportionnel à la sixième puissance de la vitesse.* Dans ce cas

$$\rho = \mathfrak{h}\cdot\pi R^2\frac{\Pi}{\Pi_1}v^6.$$

En posant

$$c^5 = \frac{P}{2\mathfrak{h}\pi R^2 g}\cdot\frac{\Pi}{\Pi_1},$$

on obtient

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^6}{2gc^5}$$

et

$$f(\alpha v_1) = \frac{(\alpha v_1)^6}{2gc^5}.$$

Procédant comme on l'a fait au n° 51 et posant

$$z = \frac{2\alpha^5 V_1^4 x}{c^5},$$

$$\mathfrak{P}(z) = \frac{(1+z)^{\frac{6}{5}} - \frac{6}{5}z - 1}{\frac{1}{2}\frac{6}{5}z^2},$$

$$\mathfrak{I}(z) = \frac{(1+z)^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{3}{2}z},$$

$$\mathfrak{V}(z) = (1+z)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathfrak{T}(z) = \frac{(1+z)^{\frac{5}{7}} - 1}{\frac{5}{7}z},$$

on trouve:

L'équation de la partie de la trajectoire que l'on considère

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots y = x\operatorname{tang}\varphi - \frac{gx^2}{2V_1^2}\mathfrak{P}(z).$$

Digitized by Google

L'inclinaison de la trajectoire en fonction de x

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{gx^2}{V_1^2}\mathfrak{J}(z).$$

L'abscisse x en fonction de la vitesse

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots x = \frac{c^5}{2\alpha^5 V_1^4}\left(\frac{V_1^4}{v_1^4} - 1\right).$$

La vitesse en fonction de x

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots v = \frac{V}{\mathfrak{V}(z)}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

La durée en fonction de x

$$(5)\ldots\ldots\ldots\ldots t = \frac{x}{V_1}\mathfrak{T}(z).$$

L'inclinaisson de la trajectoire en fonction de la vitesse

$$(6)\ldots\ldots \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{gc^5}{3\alpha^5 v_1^6}\left(1 - \frac{v_1^6}{V_1^6}\right).$$

54. *Application au cas où la résistance est exprimée par un terme proportionnel au cube de la vitesse.* Dans ce cas

$$\rho = \delta_0 \pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^3.$$

Posant

$$c^2 = \frac{P}{2\delta_0 \pi R^2 g}\cdot\frac{\Pi_1}{\Pi},$$

on obtient

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{(\alpha v_1)^3}{2gc^2}$$

et

$$f(\alpha v_1) = \frac{(\alpha v_1)^3}{2gc^2}.$$

Procédant comme on l'a fait au $n°$ 51, on trouve:

L'équation de la partie de la trajectoire que l'on considère

$$(1)\ldots\ldots y = x\operatorname{tang}\varphi - \frac{gx^2}{2V_1^2}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{\alpha^2 V_1 x}{c^2} + \frac{1}{24}\left(\frac{\alpha^2 V_1 x}{c^2}\right)^2\right].$$

Digitized by Google

L'inclinaison de la trajectoire en fonction de x

$$(2)\ldots \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{gx}{V_1^2}\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2 V_1 x}{c^2} + \frac{1}{1\,2}\left(\frac{\alpha^2 V_1 x}{c^2}\right)^2\right].$$

L'abscisse x en fonction de la vitesse

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x = \frac{2c^2}{\alpha^2 V_1}\left(\frac{V_1}{v_1} - 1\right).$$

La vitesse en fonction de x

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots v = \frac{V}{1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 V_1 x}{c^2}}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

La durée en fonction de x

$$(5)\ldots\ldots\ldots\ldots t = \frac{x}{V_1}\left[1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha^2 V_1 x}{c^2}\right].$$

L'inclinaison de la trajectoire en fonction de la vitesse

$$(6)\ldots\ldots\ldots \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{2gc^3}{3\alpha^2 v_1^3}\left(1 - \frac{v_1^3}{V_1^3}\right).$$

55. *Application au cas où la résistance est exprimée par un terme proportionnel à la quatrième puissance de la vitesse.* Dans ce cas

$$\rho = \delta_0 \pi R^2 \frac{\Pi}{\Pi_1} v^4.$$

Posant

$$c^3 = \frac{P}{2\delta_0 \pi R^2 g}\cdot\frac{\Pi_1}{\Pi},$$

on obtient

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^4}{2gc^3}$$

et

$$f(\alpha v_1) = \frac{(\alpha v_1)^4}{2gc^3}.$$

Procédant comme on l'a fait au $n°$ 51, on trouve

L'équation de la partie de la trajectoire que l'on considère

$$(1)\ldots\ldots\ldots y = x\operatorname{tang}\varphi - \frac{gx^2}{2V_1^2}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{\alpha^2 V_1^2 x}{c^3}\right].$$

Digitized by Google

L'inclinaison de la trajectoire en fonction de x

$$(2)\ldots\ldots\ldots \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{gx}{V_1^2}\left[1 + \frac{\alpha^2 V_1^2 x}{c^3}\right].$$

L'abscisse x en fonction de la vitesse

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x = \frac{c^3}{\alpha^2 V_1^2}\left(\frac{V_1^2}{v_1^2} - 1\right).$$

La vitesse en fonction de x

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v = \frac{V}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 V_1^2 x}{c^3}}} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

La durée en fonction de x

$$(5)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t = \frac{x}{V_1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\alpha^2 V_1^2 x}{c^3}\right)^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha^2 V_1^2 x}{c^3}}.$$

L'inclinaison de la trajectoire en fonction de la vitesse

$$(6)\ldots\ldots\ldots \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{gc^3}{2\alpha^2 v_1^4}\left(1 - \frac{v_1^4}{V_1^4}\right).$$

56. *Relation entre les fonctions par lesquelles les équations du mouvement dans l'air diffèrent de celles du mouvement dans le vide.* Comparant les équations du mouvement trouvées dans les n^os^ 51, 52, 53, 54 et 55 pour différentes expressions de la résistance de l'air avec les équations du mouvement dans le vide, on voit qu'elles diffèrent de celles du mouvement dans le vide par de certaines fonctions qui y entrent comme facteurs.

Toutes les trois fonctions

$$e^z,\ F_1(z),\ F(z),$$

qui entrent dans les équations du mouvement dans le cas où la résistance est exprimée per un monome proportionnel au carré de la vitesse, se réduisent à l'unité pour $z = o$, et croissent avec z. Pour une même valeur de $z > o$, on a $F(z) < F_1(z) < e^z$.

Digitized by Google

Toutes les quatre fonctions

$$\mathfrak{P}(z, V_0^2),\ \mathfrak{J}(z, V_0^2),\ \mathfrak{V}(z, V_0^2),\ \mathfrak{T}(z, V_0^2),$$

qui entrent dans les équations du mouvement dans le cas où la résistance est exprimée par un binome dont le premier terme est proportionnel au carré de la vitesse et le second à la quatrième puissance de la vitesse, se réduisent à l'unité pour $z=o$, et croissent avec z et V_0^2.

Pour $V_0^2=o$, on a $\mathfrak{P}(z, V_0^2)=F(z)$, $\mathfrak{J}(z, V_0^2)=F_1(z)$, $\mathfrak{V}(z, V_0^2)=e^{\frac{z}{2}}$, $\mathfrak{T}(z, V_0^2)=F_1\left(\frac{z}{2}\right)$. Pour les mêmes valeurs de z et de V_0^2 on a $\mathfrak{P}(z, V_0^2) < \mathfrak{J}(z, V_0^2)$ et $\mathfrak{T}(z, V_0^2) < \mathfrak{V}(z, V_0^2)$.

Toutes les quatre fonctions

$$\mathfrak{P}(z),\ \mathfrak{J}(z),\ \mathfrak{V}(z),\ \mathfrak{T}(z),$$

qui entrent dans les équations du mouvement dans le cas où la résistance est exprimée par un monome proportionnel à la sixième puissance de la vitesse, se réduisent à l'unité par $z=0$, et croissent avec z. Pour une même valeur de z, on a $\mathfrak{P}(z) < \mathfrak{J}(z)$ et $\mathfrak{T}(z) < \mathfrak{V}(z)$.

La même relation existe entre les fonctions qui entrent dans les équations du mouvement dans le cas où la résistance est exprimée par un monome proportionnel au cube de la vitesse et dans celui où la résistance est exprimée par un monome proportionnel à la quatrième puissance de la vitesse.

57. *Table des fonctions* e^z, $F_1(z)$, $F(z)$, $\mathfrak{P}(z)$, $\mathfrak{J}(z)$, $\mathfrak{V}(z)$, $\mathfrak{T}(z)$. Ces tables sont insérées dans l'annexe sous les n^{os} III, IV, V, XII, XIII, XIV. Elles sont à un seul argument z, et donnent les valeurs des fonctions avec quatre décimales pour des valeurs équidistantes de z. Elles s'étendent de $z=0$ jusqu'à $z=3$ pour e^z, de $z=0$ jusqu'à $z=2,4$ pour $F_1(z)$ et $F(z)$, et de $z=0$ jusqu'à 1,8 pour $\mathfrak{P}(z)$, $\mathfrak{J}(z)$, $\mathfrak{V}(z)$ et $\mathfrak{T}(z)$. La différence constante entre les valeurs de z est de 0,01. A côté des valeurs des fonctions, on a inscrit les différences entre leurs deux valeurs consécutives. Les différences secondes de toutes ces fonctions ne surpassant pas huit unités du dernier ordre, on peut calculer les valeurs de ces fonctions avec quatre

Digitized by Google

décimales pour les valeurs intermédiaires de z qui ne se trouvent pas dans les tables au moyen de parties proportionnelles sur les différences premières sans recourir aux différences secondes *).

Exemple. Calculer $F(0{,}3165)$. On trouve dans la table que $F(0{,}31) = 1{,}1119$, et que la différence entre $F(0{,}31)$ et $F(0{,}32)$ est 0,0039. Donc

$$F(0{,}3165) = 1{,}1119 + \frac{0{,}0065}{0{,}0100} \cdot 0{,}0039 = 1{,}1144.$$

58. *Tables des fonctions* $\mathfrak{P}(z, V_0^2)$ et $\mathfrak{Z}(z, V_0^2)$. Ces tables sont insérées dans l'annexe sous les n^{os} VI et VII. Elles sont à deux arguments z et V_0^2 et par suite à deux entrées et donnent les valeurs des fonctions à quatre décimales pour les valeurs équidistantes de z, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1{,}68$, et pour les valeurs équidistantes de V_0^2, depuis $V_0^2 = 0$ jusqu'à $V_0^2 = 4{,}2$. La différence constante entre les valeurs de z est de 0,02, et la différence constante entre les valeurs de V_0^2 est de 0,1. Sous l'indication Δ_z on a inscrit les différences entre les valeurs voisines de la fonction, relatives à la même valeur de V_0^2 et correspondant à un accroissement de 0,02 dans la valeur de z. La différence Δ_v entre les valeurs de la fonction, relative à la même valeur de z et correspondant à un accroissement de 0,1 dans la valeur de V_0^2, — cette différence Δ_v est constante et

---

*) Si u_0, u_1, u_2,... sont les valeurs de la fonction u, correspondantes aux valeurs équidistantes x_0, x_1, x_2,... de la variable indépendante x, et si la différence constante entre les valeurs de x_0, x_1, x_2,... est h, on a, en tenant compte des différences secondes, la formule d'interpolation suivante

$$u = u_0 + \frac{x + x_0}{h} \Delta u_0 - \frac{x - x_0}{h} \left(1 - \frac{x - x_0}{h}\right) \frac{\Delta^2 u_0}{1.2}.$$

Le maximum de la correction

$$- \frac{x - x_0}{h} \left(1 - \frac{x - x_0}{h}\right) \frac{\Delta^2 u_0}{1.2}.$$

due à la différence seconde a lieu pour $\frac{x - x_0}{h} = \frac{1}{2}$ et alors la correction se réduit à $\frac{1}{8}$ de la valeur numérique de $\Delta^2 u_0$. Donc, toutes les fois que la différence seconde est moindre que huit unités du dernier ordre, on commettra, en la négligeant, une erreur moindre qu'une unité du dernier ordre.

Digitized by Google

est inscrite au pied de chaque colonne. En calculant les valeurs des fonctions à quatre décimales pour les valeurs intermédiaires de z et de V_0^2 qui ne se trouvent pas dans les tables, il faut avoir recours aux différences secondes.

En appelant

$$f(z_0, v_0),\ f(z_1, v_0),\ f(z_2, v_0),\ \ldots.$$
$$f(z_0, v_1),\ f(z_1, v_1), \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(z_0, v_2),$$

les valeurs de la fonction $f(z, v)$ correspondant aux valeurs

$$z_0, v_0;\ z_1, v_0;\ z_2, v_0; \ldots\ldots$$
$$z_0, v_1;\ z_1, v_1; \ldots\ldots\ldots$$
$$z_0, v_2; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

des variables indépendantes z et v, en représentant par h la différence constante entre les valeurs de $z_0, z_1, z_2, \ldots.$ et par k la différence constante entre les valeurs de $v_0, v_1, v_2, \ldots.$ et en désignant

$$\Delta_z f(z_0, v_0) = f(z_1, v_0) - f(z_0, v_0),$$
$$\Delta_z f(z_1, v_0) = f(z_2, v_0) - f(z_1, v_0),$$
$$\Delta_z f(z_0, v_1) = f(z_1, v_1) - f(z_0, v_1),$$
$$\Delta_v f(z_0, v_0) = f(z_0, v_1) - f(z_0, v_0),$$
$$\Delta_v f(z_0, v_1) = f(z_0, v_2) - f(z_0, v_1),$$
$$\Delta_v f(z_1, v_0) = f(z_1, v_1) - f(z_1, v_0),$$
$$\Delta_z \Delta_v f(z_0, v_0) = \Delta_v \Delta_z f(z_0, v_0) = \Delta_z f(z_0, v_1) - \Delta_z f(z_0, v_0)$$
$$= \Delta_v f(z_1, v_0) - \Delta_v f(z_0, v_0),$$
$$\Delta^2_z f(z_0, v_0) = \Delta_z f(z_1, v_0) - \Delta_z f(z_0, v_0),$$
$$\Delta^2_v f(z_0, v_0) = \Delta_v f(z_0, v_1) - \Delta_v f(z_0, v_0),$$

Digitized by Google

on a, en tenant compte des différences secondes, la formule d'interpolation suivante

$$f(z, v) = f(z_0, v_0) + \frac{z - z_0}{h} \cdot \Delta_z f(z_0, v_0) + \frac{v - v_0}{k} \cdot \Delta_v f(z_0, v_0)$$

$$+ \frac{z - z_0}{h} \cdot \frac{v - v_0}{k} \cdot \Delta_z \Delta_v f(z_0, v_0) - \frac{1}{2} \frac{z - z_0}{h} \left(1 - \frac{z - z_0}{h}\right) \Delta^2_z f(z_0, v_0)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{v - v_0}{k} \left(1 - \frac{v - v_0}{k}\right) \Delta^2_v f(z_0, v_0).$$

Exemple 1. Calculer la valeur de $\mathfrak{P}(z, V_0^2)$ à-quatre décimales pour $z = 0{,}8257$, $V_0^2 = 0{,}3907$.

Dans ce cas $f(z_0, v_0) = \mathfrak{P}(0{,}82;\ 0{,}3) = 1{,}4420$;

$h = 0{,}02$; $k = 0{,}1$; $z - z_0 = 0{,}0057$; $v - v_0 = 0{,}0907$;

$\Delta_z f(z_0, v_0) = 0{,}0133$; $\Delta_v f(z_0, v_0) = 0{,}0340$;

$\Delta_z \Delta_v f(z_0, v_0) = 0{,}0143 - 0{,}0133 = 0{,}0350 - 0{,}0340 = 0{,}0010$;

$\Delta^2_z f(z_0, v_0) = 0{,}0135 - 0{,}0133 = 0{,}0002$; $\Delta^2_v f(z_0, v_0) = 0$;

$$\mathfrak{P}(z, V_0^2) = 1{,}4420 + \frac{0{,}0057}{0{,}0200} \cdot 0{,}0133 + \frac{0{,}0907}{0{,}1000} \cdot 0{,}0340$$

$$+ \frac{0{,}0057}{0{,}0200} \cdot \frac{0{,}0907}{0{,}1000} \cdot 0{,}0010 - \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}0057}{0{,}0200} \cdot \left(1 - \frac{0{,}0057}{0{,}0200}\right) \cdot 0{,}0002$$

$$= 1{,}4769.$$

Pour la facilité des opérations numériques on disposera les calculs de la manière suivante

$\mathfrak{P}(0{,}82;\ 0{,}3)$	$= 1{,}4420$
$\frac{57}{200} \cdot 133$	$= 38$
$\frac{907}{1000} \cdot 340$	$= 308$
$\frac{57}{200} \cdot \frac{907}{1000} \cdot 10$	$= 3$
$-\frac{1}{2} \cdot \frac{57}{200} \left(1 - \frac{57}{200}\right) \cdot 2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{57}{200} \cdot \frac{143}{200} \cdot 2 =$	$- 0$
$\mathfrak{P}(0{,}8257;\ 0{,}3907)$	$= 1{,}4769.$

Digitized by Google

L'emploi de la règle à calcul pour calculer les parties proportionnelles abrége beaucoup les opérations.

Il suffit dans les cas ordinaires de se borner aux valeurs des fonctions à trois décimales, et alors il ne faut pas tenir compte des différences secondes.

Comme exemple, calculons la valeur de $\mathfrak{P}(z, V_0^2)$ à trois décimales pour $z = 0{,}8257$ et $V_0^2 = 0{,}3907$.

On trouve dans la table pour $z = 0{,}82$ et $V_0^2 = 0{,}3$ la fonction $\mathfrak{P}(z, V_0^2) = 1{,}442$ et les différences $\Delta_z = 13{,}3$ et $\Delta_v = 34{,}0$. Donc:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(0{,}82;\ 0{,}3) &= 1{,}442 \\ \tfrac{57}{200}\cdot 13{,}3 &= \quad 4 \\ \tfrac{907}{1000}\cdot 34{,}0 &= \quad 31 \\ \hline \mathfrak{P}(0{,}8257;\ 0{,}3907) &= 1{,}477. \end{aligned}$$

Exemple 2. Calculer la valeur de $\mathfrak{J}(z, V_0^2)$ à quatre décimales pour $z = 0{,}8257$ et $V_0^2 = 0{,}3907$.

Dans ce cas $f(z_0, v_0) = \mathfrak{J}(0{,}82;\ 0{,}3) = 1{,}7142$; $h = 0{,}02$; $k = 0{,}1$; $z - z_0 = 0{,}0057$; $v - v_0 = 0{,}0907$; $\Delta_z f(z_0, v_0) = 0{,}0230$; $\Delta_v f(z_0,\ v_0) = 0{,}0549$; $\Delta_z \Delta_v f(z_0,\ v_0) = 0{,}0248 - 0{,}0230 = 0{,}0567 - 0{,}0549 = 0{,}0018$; $\Delta_z^2 f(z_0, v_0) = 0{,}0234 - 0{,}0230 = 0{,}0004$; $\Delta_z^2 f(z_0, v_0) = 0$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(0{,}82;\ 0{,}3) &= 1{,}7142 \\ \tfrac{57}{200}\cdot 230 &= \quad 66 \\ \tfrac{907}{1000}\cdot 549 &= \quad 498 \\ \tfrac{57}{200}\cdot\tfrac{907}{1000}\cdot 18 &= \quad 5 \\ -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{57}{200}\left(1 - \tfrac{57}{200}\right)\cdot 4 = -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{57}{200}\cdot\tfrac{143}{200}\cdot 4 &= \quad 0 \\ \hline \mathfrak{J}(0{,}8257;\ 0{,}3907) &= 1{,}7711. \end{aligned}$$

Calculons la valeur de $\mathfrak{J}(z, V_0^2)$ à trois décimales pour $z = 0{,}8257$ et $V_0^2 = 0.3907$.

On trouve dans la table pour $z = 0{,}82$ et $V_0^2 = 0{,}3$ la fonction

Digitized by Google

$\mathfrak{Z}(z,\ V_0^2) = 1{,}714$ et les différences $\Delta_z = 23{,}0$ et $\Delta_v = 54{,}9$. Donc:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(0{,}82;\ 03) &= 1{,}714 \\ \tfrac{57}{200}\cdot 23{,}0 &= \quad 7 \\ \tfrac{907}{1000}\cdot 54{,}9 &= \quad 50 \\ \hline \mathfrak{Z}(0{,}8257;\ 0{,}3907) &= 1{,}771. \end{aligned}$$

59. Tables des fonctions $\mathcal{V}(z,\ V_0^2)$ et $\mathfrak{C}(z,\ V_0^2)$. Ces tables sont insérées dans l'annexe sous les n^{os} VIII et IX. Elles sont à deux arguments z et V_0^2 et par suite à deux entrées, et donnent les valeurs des fonctions à trois décimales pour les valeurs équidistantes de z, depuis $z = 0$, jusqu'à $z = 1{,}68$, et pour les valeurs équidistantes de V_0^2, depuis $V_0^2 = 0$, jusqu'à $V_0^2 = 4{,}2$. La différence constante entre les valeurs de z est de 0,02, et la différence constante entre les valeurs de V_0^2 est de 0,1. Sous l'indication Δ_z on a inscrit les différences entre les valeurs voisines de la fonction, relatives à la même valeur de V_0^2 et correspondant à un accroissement de 0,02 dans la valeur de z; sous l'indication Δ_v on a inscrit les différences entre les valeurs voisines de la fonction, relatives à la même valeur de z et correspondant à un accroissement de 0,1 dans les valeurs de V_0^2. En calculant les valeurs des fonctions à trois décimales pour des valeurs intermédiaires de z et de V_0^2 il ne faut pas tenir compte des différences secondes.

Exemple 1. Calculer la valeur de $\mathcal{V}(z,\ V_0^2)$ pour $z = 0{,}8257$ et $V_0^2 = 0{,}3907$.

On trouve dans la table pour $z = 0{,}82$ et $V_0^2 = 0{,}3$ la fonction $\mathcal{V}(z,\ V_0^2) = 1{,}628$ et les différences $\Delta_z = 18$ et $\Delta_v = 39$. Donc:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(0{,}82;\ 0{,}3) &= 1{,}628 \\ \tfrac{57}{200}\cdot 18 &= \quad 5 \\ \tfrac{907}{1000}\cdot 39 &= \quad 35 \\ \hline \mathcal{V}(0{,}8257;\ 0{,}3907) &= 1{,}668. \end{aligned}$$

Exemple 2. Calculer la valeur de $\mathfrak{C}(z,\ V_0^2)$ pour $z = 0{,}8257$ et $V_0^2 = 0{,}3907$.

Digitized by Google

On trouve dans la table pour $z = 0{,}82$ et $V_0^2 = 0{,}3$ la fonction $\mathfrak{C}(z, V_0^2) = 1{,}297$ et les différences $\Delta_z = 8$ et $\Delta_v = 19$. Donc:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(0{,}82;\ 03) &= 1{,}297 \\ \tfrac{57}{200} \cdot 8 &= 2 \\ \tfrac{907}{1000} \cdot 19 &= 17 \\ \hline \mathfrak{C}(0{,}8257;\ 0{,}3907) &= 1{,}316. \end{aligned}$$

60. *Tables des fonctions* $z.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$ et $z.\mathfrak{Z}(z. V_0^2)$. Il arrive dans la solution des problèmes de tir de chercher la valeur de z, lorsqu'on connaît la valeur de V_0^2 et celle du produit $z.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$ ou bien celle du produit $z.\mathfrak{Z}(z, V_0^2)$. On a calculé dans ce but les tables des fonctions $z.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$ et $z.\mathfrak{Z}(z, V_0^2)$ insérées dans l'annexe sous les n^{os} X et XI. Elles sont à deux arguments z et V_0^2 et par suite à deux entrées, et donnent les valeurs des fonctions à quatre décimales pour les valeurs équidistantes de z, depuis $z = 0$, jusqu'à $z = 1{,}68$, et pour les valeurs équidistantes de V_0^2, depuis $V_0^2 = 0$, jusqu'à $V_0^2 = 4{,}2$. La différence constante entre les valeurs de z est de 0,02, et la différence constante entre les valeurs de V_0^2 est de 0,1. Sous l'indication Δ_z, on a inscrit les différences entre les valeurs voisines de la fonction, relatives à la même valeur de V_0^2 et correspondant à un accroissement de 0,02 dans la valeur de z. La différence Δ_v entre les valeurs de la fonction, relative à la même valeur de z et correspondant à un accroissement de 0,1 dans la valeur de V_0^2, — cette différence Δ_v est constante et est inscrite au pied de chaque colonne.

Connaissant V_0^2, on cherchera dans la ligne horizontale qui s'y rapporte la valeur connue de la fonction $z.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$, ou bien celle de la fonction $z\,\mathfrak{Z}(z, V_0^2)$, et on trouvera en tête la valeur cherchée de z. Ainsi pour $V_0^2 = 0{,}3$ et $z\mathfrak{P}(z, V_0^2) = 1{,}1824$ on trouvera que 1,1824 étant dans la colonne $z = 0{,}82$, la valeur cherchée est $z = 0{,}82$.

On trouvera la valeur de z à quatre décimales pour des valeurs connues, intermédiaires de V_0^2 et de $z.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$, ou bien de $z\mathfrak{Z}(z, V_0^2)$

Digitized by Google

qui ne se trouvent pas dans les tables, en interpolant et tenant compte des différences secondes.

La formule de l'interpolation insérée au $n°$ 58 donne

$$\frac{z-z_0}{h}\cdot\Delta_z f(z_0,v_0)=f(z,v)-f(z_0,v_0)-\frac{v-v_0}{k}\cdot\Delta_v f(z_0,v_0)$$

$$-\frac{z-z_0}{h}\cdot\frac{v-v_0}{k}\cdot\Delta_z\Delta_v f(z_0,v_0)+\tfrac{1}{2}\frac{z-z_0}{h}\left(1-\frac{z-z_0}{h}\right)\Delta_z^2 f(z_0,v_0)$$

$$+\tfrac{1}{2}\frac{v-v_0}{k}\left(1-\frac{v-v_0}{k}\right)\Delta_v^2 f(z_0,v_0).$$

Calculant d'abord la valeur de $\frac{z-z_0}{h}\cdot\Delta_z f(z_0,v_0)$ en négligeant les termes à différences secondes, c'est-à-dire en se bornant aux trois premiers termes du second membre de l'équation, on trouvera la valeur approchée de $\frac{z-z_0}{h}$ et en la substituant dans le quatrième et le cinquième termes du second membre de l'équation, on trouvera la valeur de $\frac{z-z_0}{h}.\Delta_z f(z_0,v_0)$ avec la précision désirée et on en tirera la valeur cherchée de z.

Exemple 1. Trouver la valeur de z à quatre décimales pour $V_0^2=03907$ et $z.\mathfrak{P}(z,\ V_0^2)=1{,}2195$.

Dans ce cas $f(z,v)=z.\mathfrak{P}(z,\ V_0^2)=1{,}2195$; $v_0=0{,}3$; $f(z_0,v_0)=1{,}1824=0{,}82.\mathfrak{P}(0{,}82;\ 0{,}3)$; $z_0=0{,}82$; $h=0{,}02$; $k=0{,}1$; $v-v_0=0{,}0907$; $\Delta_z f(z_0,v_0)=0{,}0401$; $\Delta_v f(z_0,v_0)=0{,}0279$; $\Delta_z\Delta_v f(z_0,v_0)=0{,}0416-0{,}0401=0{,}0294-0{,}0279=0{,}0015$; $\Delta_z^2 f(z_0,v_0)=0{,}0407-0{,}0401=0{,}0006$; $\Delta_v^2 f(z_0,v_0)=0$, et l'on a

$$\begin{aligned} z\mathfrak{P}(z,\ V_0^2) &= \quad 1{,}2195 \\ -0{,}82.\mathfrak{P}(0{,}82\,;0{,}3) &= -1{,}1824 \\ -\tfrac{907}{1000}.279 &= -\quad 253 \end{aligned}$$

la valeur approchée de $\frac{z-z_0}{h}\Delta_z f(z_0,v_0)=+0{,}0118$;

la valeur approchée de $\frac{z-z_0}{h}=\frac{0{,}0118}{0{,}0401}$;

Digitized by Google

$$\text{la valeur approchée de } \frac{z-z_0}{h}\Delta_z f(z_0, v_0) = +0{,}0118$$

$$-\frac{118}{401}\cdot\frac{907}{1000}\cdot 15 = -\quad 4$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{118}{401}\left(1-\frac{118}{401}\right)\cdot 6 = +\frac{1}{2}\cdot\frac{118}{401}\cdot\frac{283}{401}\cdot 6 = +\quad 0$$

$$\frac{z-z_0}{h}\Delta_z f(z_0, v_0) = +0{,}0114;$$

$$z = z_0 + \frac{200}{401}\cdot 0{,}0114 = 0{,}82 + 0{,}0057 = 0{,}8257.$$

Il suffit dans les cas ordinaires de se borner aux valeurs de z à trois décimales, et alors il ne faut pas tenir compte des différences secondes.

Comme exemple, calculons la valeur de z à trois décimales pour $V_0^2 = 0{,}3907$ et $z\,\mathfrak{P}(z, V_0^2) = 1{,}220$.

On voit dans la table que dans la ligne horizontale $V_0^2 = 0{,}3$ la valeur la plus voisine de $z\mathfrak{P}(z, V_0^2) = 1{,}220$, mais plus petite, est 1,182 et qu'elle est dans la colonne $z = 0{,}82$. Les différences qui correspondent à la valeur de 1,182. sont $\Delta_z = 40{,}1$ et $\Delta_v = 27{,}9$. On aura

$$z\mathfrak{P}(z, V_0^2) = \quad 1{,}220$$

$$-0{,}82\,.\,\mathfrak{P}(0{,}82\,;\,0{,}3) = -1{,}182$$

$$-\frac{907}{1000}\cdot 27{,}9 \qquad = -\quad 25$$

$$\frac{z-z_0}{h}\Delta_z = +0{,}013;$$

$$z = z_0 + \frac{200}{401}\cdot 0{,}013 = 0{,}82 + 0{,}006 = 0{,}826.$$

Exemple 2. Trouver la valeur de z à quatre décimales pour $V_0^2 = 0{,}3907$ et $z\,\mathfrak{J}(z, V_0^2) = 1{,}4624$.

Dans ce cas $f(z, v) = z\,\mathfrak{J}(z, V_0^2) = 1{,}4624$; $v_0 = 0{,}3$; $f(z_0, v_0) = 1{,}4056 = 0{,}82\,.\,\mathfrak{J}(0{,}82\,;\,0{,}3)$; $z_0 = 0{,}82$; $h = 0{,}02$; $k = 0{,}1$; $v - v_0 = 0{,}0907$; $\Delta_z f(z_0, v_0) = 0{,}0537$; $\Delta_v f(z_0, v_0) = 0{,}0450$; $\Delta_z \Delta_v f(z_0, v_0) = 0{,}0562 - 0{,}0537 = 0{,}0025$;

Digitized by Google

$\Delta^2_z f(z_0, v_0) = 0{,}0548 - 0{,}0537 = 0{,}0011$; $\Delta^2_v f(z_0, v_0) = 0$, et l'on a

$$\begin{aligned} z\mathfrak{Z}(z, V_0^2) &= \quad 1{,}4624 \\ -0{,}82\,.\,\mathfrak{Z}(0{,}82\,;\,0{,}3) &= -1{,}4056 \\ -\tfrac{907}{1000}\cdot 450 &= - \quad 408 \end{aligned}$$

la valeur approchée de $\frac{z-z_0}{h}\Delta_z f(z_0, v_0) = +0{,}0160$;

la valeur approchée de $\frac{z-z_0}{h} = \frac{0{,}0160}{0{,}0537}$;

$$\begin{aligned} \text{la valeur approchée de } \tfrac{z-z_0}{h}\Delta_z f(z_0, v_0) &= +0{,}0160 \\ -\tfrac{160}{537}\cdot\tfrac{907}{1000}\cdot 25 &= - \quad 7 \\ +\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{160}{537}\left(1-\tfrac{160}{537}\right)\cdot 11 = +\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{160}{537}\cdot\tfrac{377}{537}\cdot 11 &= + \quad 1 \\ \tfrac{z-z_0}{h}\Delta_z f(z_0, v_0) &= +0{,}0154; \end{aligned}$$

$$z = z_0 + \tfrac{200}{537}\cdot 0{,}0154 = 0{,}82 + 0{,}0057 = 0{,}8257.$$

Calculons la valeur de z à trois décimales pour $V_0^2 = 0{,}3907$ et $z\mathfrak{Z}(z, V_0^2) = 1{,}462$.

On voit dans la table que dans la ligne horizontale $V_0^2 = 0{,}3$ la valeur la plus voisine de $z\,\mathfrak{Z}\,(z, V_0^2) = 1{,}462$, mais plus petite, est 1,406 et qu'elle est dans la colonne $z = 0{,}82$. Les différences qui correspondent à la valeur de 1,406 sont $\Delta_z = 5{,}37$ et $\Delta_v = 45{,}0$. On aura

$$\begin{aligned} z\mathfrak{Z}(z, V_0^2) &= \quad 1{,}462 \\ -0{,}82\,.\,\mathfrak{Z}(0{,}82;\,0{,}3) &= -1{,}406 \\ -\tfrac{907}{1000}\cdot 45{,}0 &= - \quad 41 \\ \tfrac{z-z_0}{h}\Delta_z &= +0{,}015; \end{aligned}$$

$$z = z_0 + \tfrac{200}{537}\cdot 0{,}015 = 0{,}82 + 0{,}006 = 0{,}826.$$

Digitized by Google

61. *Détermination de la valeur de la constante* α. Pour intégrer, par approximation, les équations différentielles du mouvement, quelle que soit l'expression de la résistance, on substitue ($n°$ 118) à la fonction $f(v)$, qui exprime le rapport de la résistance au poids du projectile, cette autre fonction

$$\frac{f(\alpha v \cos\theta)}{\alpha \cos\theta},$$

où la constante α doit être choisie de manière que le produit $\alpha \cos\theta$ s'éloigne le moins possible de l'unité pour toutes les valeurs qu'il acquiert entre $\theta = \varphi$ et θ. Par conséquent α doit être égale à une certaine valeur moyenne entre toutes celles que prend $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{ds}{dx}$ dans les mêmes limites.

Le général Didion, qui se sert de la constante α pour intégrer, par approximation, les équations différentielles du mouvement, prend pour la valeur de α le rapport de l'arc de la parabole compris entre les limites φ et θ à sa projection horizontale. On a pour la parabole (éq. 1, $n°$ 37) $v_1 = V_1$ et par suite les équations (8) et (9), $n°$ 32 deviennent

$$s = \frac{V_1^2}{g}\int_\theta^\varphi \frac{d\theta}{\cos^3\theta} \quad \text{et} \quad x = \frac{V_1^2}{g}\int_\theta^\varphi \frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

de manière que

$$\alpha = \frac{\int_\theta^\varphi \frac{d\theta}{\cos^3\theta}}{\int_\theta^\varphi \frac{d\theta}{\cos^2\theta}} \text{ *)},$$

*) On peut faire voir facilement que la valeur de α ainsi déterminée est une certaine valeur moyenne des différentes valeurs de $\frac{1}{\cos\theta}$ entre les limites $\theta = \varphi$ et θ. On sait en effet que la fraction

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots}$$

Digitized by Google

ou, posant

$$\xi(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos\theta} + \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

et remarquant que

$$\int_{\theta}^{\varphi} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta,$$

on a

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi) - \xi(\theta)}{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta}.$$

L'expression $\xi(\theta)$ fait voir que $\xi(0) = 0$, $\xi(-\theta) = -\xi(\theta)$ et comme on a $\operatorname{tang} 0 = 0$ et $\operatorname{tang}(-\theta) = -\operatorname{tang}\theta$, on trouve: entre les limites φ et θ

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi) - \xi(\theta)}{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta},$$

entre les limites φ et 0, ainsi qu'entre les limites φ et $-\varphi$

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tang}\varphi},$$

---

est moindre que la plus grande des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ... et est plus grande que la plus petite de ces fractions, de sorte que $\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots}$ est une certaine valeur moyenne entre les valeurs de $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}\ldots$

Donc la quantité

$$\alpha = \frac{\int_{\theta}^{\varphi} \frac{d\theta}{\cos^3\theta}}{\int_{\theta}^{\varphi} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}}$$

est une certaine moyenne des différentes valeurs que

$$\frac{\frac{1}{\cos^3\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{\cos\theta}$$

acquiert entre les limites φ et θ.

Digitized by Google

entre les limites φ et $-\theta$

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi) + \xi(\theta)}{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\theta},$$

entre les limites $-\varphi$ et $-\theta$

$$\alpha = \frac{\xi(\theta) - \xi(\varphi)}{\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\varphi}.$$

On a inséré dans la table I de l'annexe les valeurs numériques de $\xi(\varphi)$, de $\frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tang}\varphi}$ et de α.

62. *Choix des points de division d'une trajectoire en plusieurs parties.* Si l'on examine la table des valeurs de α, on voit que quand les angles sont petits, α dépasse l'unité de très peu. Ainsi, pour un arc de 5° à 0 la quantité α dépasse l'unité de $\frac{1}{770}$ environ; pour un arc de 10° à 0 la quantité α dépasse l'unité de $\frac{1}{300}$ environ; pour un arc de 15° à 0 la quantité α dépasse l'unité de $\frac{1}{85}$ environ. Par conséquent lorsque le projectile est lancé avec une vitesse initiale telle que la résistance de l'air entre les limites de cette vitesse et de la vitesse de chute peut être exprimée par une seule formule, on peut ne pas décomposer la trajectoire en parties, tant que les angles de projection sont compris entre 0 et 15°, et on peut prendre pour α l'unité, quand l'angle de projection ne dépasse pas 8°, et la valeur de $\frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tang}\varphi}$ quand l'angle de projection est compris entre 8° et 15°.

La quantité α entre dans l'expression

$$\frac{f(\alpha v \cos\theta)}{\alpha \cos\theta}$$

qui est substituée à la fonction $f(v)$. En égalant α à sa plus petite valeur, l'unité, la fonction $\frac{f(\alpha v \cos\theta)}{\alpha \cos\theta}$ sera moindre que la fonction $f(v)$ (toutes les fois que le degré de la fonction $f(v)$ est plus grand que l'unité), ou, ce qui est tout un, on prendra une valeur trop faible pour la résistance de l'air; par suite on aura (*n*° 49) des valeurs trop fortes pour les ordonnées y, et la trajectoire calculée passera au-dessus de la trajectoire réelle. En égalant α à $\frac{1}{\cos\varphi}$, on prendra une valeur trop forte pour la résistance de l'air sur toute l'étendue de la trajectoire depuis $\theta = \varphi$ jusqu'à $\theta = -\varphi$, et la trajectoire calculée passera au-

Digitized by Google

dessous de la trajectoire réelle. On voit par là que pour avoir (dans le cas où l'on ne divise pas la trajectoire en parties) les limites entre lesquelles est comprise la portée réelle sur un terrain qui se trouve à la même hauteur que la bouche à feu, il faut poser $\alpha = 1$ pour obtenir la limite supérieure et $\alpha = \frac{1}{\cos\varphi}$ pour obtenir la limite inférieure.

Si l'on divise la trajectoire en parties, il faut prendre, comme on sait, $\alpha = \frac{\xi(\varphi) - \xi(\theta)}{\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\theta}$. Pour avoir une idée des erreurs que l'on commet en ce cas, comparons les valeurs de α aux valeurs extrêmes de $\frac{1}{\cos\theta}$ pour des arcs de différentes grandeurs et de différentes inclinaisons. Cette comparaison est établie dans le tableau suivant.

Tableau comparatif des valeurs de α et des valeurs extrêmes de $\frac{1}{\cos\theta}$ pour des arcs de différentes grandeurs et de différentes inclinaisons.

Étendue des arcs.	Arcs.	$\frac{1}{\cos\theta}$	α	Rapport à α des différences entre α et les valeurs extrêmes de $\frac{1}{\cos\theta}$: en moins	en plus	Étendue des arcs depuis 0°	α	Rapport à α des différences entre α et les valeurs extrêmes de $\frac{1}{\cos\theta}$: en moins	en plus
	deg.					deg.			
5 degrés.	60	2,0000	1,8699	1/15	1/14	60	1,3802	3/10	2/5
	55	1,7454	1,6485	1/18	1/17	55	1,2758	1/4	1/4
	50	1,5557	1,4837	1/22	1/20	50	1,2019	1/4	1/5
	45	1,4142	1,3589	1/25	1/24	45	1,1478	2/11	1/7
	40	1,3054	1,2623	1/31	1/29	40	1,1073	1/7	1/9
	35	1,2208	1,1870	1/36	1/35	35	1,0760	1/9	1/13
	30	1,1547	1,1283	1/44	1/42	30	1,0531	1/12	1/19
	25	1,1034	1,0831	1/54	1/53	25	1,0351	1/16	1/28
	20	1,0641	1,0491	1/70	1/76	20	1,0217	1/25	1/46
	15	1,0353	1,0247	1/98	1/109	15	1,0118	1/44	1/85
	10	1,0154	1,0090	1/159	1/193	10	1,0052	1/100	1/196
	5	1,0038	1,0013	1/402	1/788	5	1,0013	1/402	1/788
	0	1,0000				0	1,0000	—	—
10 degrés.	60	2,0000	1,7730	1/9	1/7				
	50	1,5557	1,4270	1/12	1/11				
	40	1,3054	1,2269	1/17	1/16				
	30	1,1547	1,1066	1/24	1/23				
	20	1,0641	1,0372	1/40	1/46				
	10	1,0154	1,0051	1/100	1/196				
	0	1,0000							
15 degrés.	60	2,0000	1,6973	1/7	1/5				
	45	1,4142	1,2772	1/11	1/10				
	30	1,1547	1,0887	1/18	1/19				
	15	1,0353	1,0118	1/44	1/85				
	0	1,0000							

Digitized by Google

D'après l'inspection des nombres contenus dans le tableau, on reconnaît que, pour des arcs d'un même nombre de degrés, la valeur de α diffère d'autant moins des valeurs extrêmes que l'inclinaison au-dessus de l'horizontale est plus petite. Par conséquent, pour que les différences entre les valeurs de α et les valeurs extrêmes de $\frac{1}{\cos\theta}$ soient les mêmes pour les différentes parties de la trajectoire, les arcs doivent avoir d'autant moins d'étendue que leurs inclinaisons sont plus grandes; ainsi le rapport de la différence entre α et $\frac{1}{\cos\theta}$ à α est de $\frac{1}{25}$ pour les arcs de 0° à 20°, de 20° à 30°, ou de 40° à 45°; ce rapport est de $\frac{1}{17}$ environ pour les arcs de 0° à 25°, de 15° à 30°, de 30° à 40° ou de 50° à 55°; il est de $\frac{1}{10}$ au plus pour les arcs de 0° à 30°, de 30° à 45° ou de 55° à 60°; il est de $\frac{1}{6}$ environ pour l'arc de 0° à 45°. Ces quantités sont les différences les plus grandes et elles se rapportent aux extrémités des arcs; mais comme vers le milieu de chaque arc cette différence est nulle, il s'ensuit que le rapport de la différence entre α et $\frac{1}{\cos\theta}$ à α n'est moyennement que la moitié des fractions que nous avons indiquées. Si l'on remarque, de plus, que dans la branche ascendante la valeur de α est à l'origine des arcs que l'on considère moindre et à la fin de ces arcs plus grande que $\frac{1}{\cos\theta}$, on voit que dans la branche ascendante de la trajectoire on prend à l'origine des arcs la résistance de l'air trop faible, et qu'à la fin des arcs on la prend trop forte; dans la branche descendante la valeur de α est au contraire à l'origine des arcs plus grande et à la fin des arcs moindre que $\frac{1}{\cos\theta}$, de sorte que dans la branche descendante on prend à l'origine des arcs une résistance trop forte et à la fin des arcs une résistance trop faible; vers le milieu des arcs la valeur de α est égale à $\frac{1}{\cos\theta}$; il s'ensuit que sur toute l'étendue de l'arc que l'on considère, si elle est convenablement choisie, les erreurs partielles se compensent à peu de chose près.

Pour avoir les limites entre lesquelles est comprise la portée réelle, il faut, pour obtenir la limite supérieure, prendre, à la place

Digitized by Google

de α, les valeurs de $\frac{1}{\cos\theta}$ qui correspondent à la fin des arcs dans la branche ascendante et les valeurs de $\frac{1}{\cos\theta}$ qui correspondent au commencement des arcs dans la branche descendante; pour obtenir la limite inférieure, il faut prendre, à la place de α, les valeurs de $\frac{1}{\cos\theta}$ qui correspondent au commencement des arcs dans la branche ascendante et les valeurs de $\frac{1}{\cos\theta}$ qui correspondent à la fin des arcs dans la branche descendante.

Lorsque les vitesses initiales ne sont pas considérables et que les projectiles sont de fort calibre et de grande densité, comme il arrive ordinairement dans le tir courbe des mortiers, l'influence de la résistance de l'air est assez faible pour qu'on puisse, sous les angles de projection φ qui ne dépassent pas 45°, calculer la trajectoire sans la diviser en parties, en prenant pour α la valeur $\frac{\xi(\varphi)}{\text{tang}\,\varphi}$. Dans le cas de $\varphi = 45°$, α sera moindre que $\frac{1}{\cos\theta}$ de $\frac{2}{11}$ de sa valeur au commencement et à la fin du trajet, et vers le sommet α sera plus grand que $\frac{1}{\cos\theta} = 1$ d'environ $\frac{1}{7}$ de sa valeur; moyennement cette différence sera d'environ $\frac{1}{11}$ de la valeur de α. La simplification ayant pour effet de rendre la résistance de l'air trop forte seulement vers le sommet et trop faible au point de départ et vers le point de chute, il en résultera une portée un peu plus grande que la portée réelle.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

SOLUTION DES PROBLÈMES SUR LE TIR DES PROJECTILES SPHÉRIQUES QUI N'ONT PAS DE MOUVEMENT DE ROTATION.

I. Tir courbe à fortes charges.

63. *Calcul de la trajectoire par parties.* Pour calculer la trajectoire d'un projectile tiré sous un grand angle de projection, avec une forte vitesse initiale, il faut, comme on l'a vu, décomposer la trajectoire en parties, et connaître l'angle de projection φ et la vitesse initiale V dont est animé le projectile de diamètre et de poids donnés.

On sait que la résistance de l'air au mouvement des projectiles sphériques est exprimée, $n°$ 28, pour des vitesses qui surpassent $376^{m:s}$, par un monome proportionnel à la seconde puissance de la vitesse, et pour des vitesses au-dessous de $376^{m:s}$ par un binome dont le premier terme est proportionnel au carré de la vitesse et le second à la quatrième puissance de la vitesse.

Soit l'angle $\varphi = 30°$ et la vitesse initiale V surpassant $376^{m:s}$.

1° On choisira le premier arc de la trajectoire (fig. 9) du point de départ O, où la vitesse initiale est V jusqu'au point m' où la vitesse est $376^{m:s}$ et on le calculera dans l'hypothèse de la résistance ($n°$ 52)

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc},$$

Digitized by Google

où

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}_6 \pi R^2 g} \cdot \frac{\Pi_1}{\Pi}$$

et, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités (*n*° 28),

$$\mathfrak{A}_6 = 0{,}061.$$

On déterminera d'abord la valeur approchée de l'angle d'inclinaison φ' de la trajectoire au point m', au moyen de la formule (6), *n*° 52

$$\operatorname{tang} \varphi' = \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{\alpha} \frac{gc}{V_1'^2} \left(1 - \frac{V_1'^2}{V_1^2}\right),$$

en posant $\alpha = \frac{1}{\cos \varphi}$, $V_1 = V \cos \varphi$, $V_1' = V' \cos \varphi$, et ayant cette valeur approchée de φ', on obtiendra α de la formule (*n*° 61)

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi) - \xi(\varphi')}{\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \varphi'}.$$

On aura la valeur de φ' suffisamment précise, en mettant dans l'expression précédente de tang φ' la valeur de α et en posant, dans $V_1' = V' \cos \varphi'$, pour φ' sa valeur approchée.

Connaissant la valeur de φ' et celle de α, on trouve:

L'abscisse x' du point m' au moyen de la formule (3), *n*° 52

$$x' = \frac{2c}{\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{Log} e} \cdot \operatorname{Log} \frac{V \cos \varphi}{V' \cos \varphi'}.$$

L'ordonnée y' du point m' au moyen de la formule (1), *n*° 52

$$y' = x' \operatorname{tang} \varphi - \frac{g x'^2}{2 V^2 \cos^2 \varphi} F\left(\frac{\alpha x'}{c}\right).$$

La durée t' du trajet du projectile du point O au point m' au moyen de la formule (5), *n*° 52

$$t' = \frac{x'}{V \cos \varphi} F_1\left(\frac{\alpha x'}{2c}\right).$$

Le rayon de courbure au point O et celui au point m' au moyen de la formule (11), *n*° 32

$$\gamma = \frac{V^2}{g \cos \varphi} \quad \text{et} \quad \gamma' = \frac{V'^2}{g \cos \varphi'}.$$

Digitized by Google

2°. On calculera les arcs suivants de la trajectoire dans l'hypothèse de la résistance ($n°$ 51)

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc}\left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right],$$

où

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}\pi R^2 g} \cdot \frac{\Pi_1}{\Pi}$$

et, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités ($n°$ 28),

$$\mathfrak{A} = 0{,}012; \; r = 186^{m:s}.$$

Supposons que l'on veuille diviser la trajectoire du point m' jusqu'au point de chute en quatre arcs. On choisira le premier $m'm''$ depuis l'angle d'inclinaison φ' qu'on vient d'obtenir, jusqu'à l'angle $\varphi'' = 20°$, le second $m''m'''$ de l'angle $\varphi'' = 20°$ à l'angle $\varphi''' = -20°$, le troisième $m'''m^{IV}$ de l'angle $\varphi''' = -20°$ à l'angle $\varphi^{IV} = -30°$ et le dernier $m^{IV}M$ de l'angle φ^{IV} à l'angle de chute.

Pour calculer l'arc $m'm''$ on déterminera la valeur de α' au moyen de la formule ($n°$ 61)

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi') - \xi(20°)}{\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang} 20°}.$$

On trouvera l'abscisse x'' du point m'' au moyen de l'équation (2), $n°$ 51. En effet, en multipliant les deux membres de cette équation par $\frac{\alpha'}{c}$ et observant qu'on a désigné au $n°$ 120 la valeur de $\frac{\alpha x''}{c}$ par z, on aura

$$z \cdot \mathfrak{Z}(z, V_0^2) = (\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\varphi'')\frac{\alpha'}{c} \cdot \frac{V'^2 \cos^2\varphi'}{g}.$$

Après avoir calculé la valeur numérique du second membre de cette équation et celle de $V_0^2 = \frac{\alpha'^2 V'^2 \cos^2\varphi'}{r^2}$, on trouvera la valeur de z au moyen de la table des $z \cdot \mathfrak{Z}(z, V_0^2)$, comme on l'a exposé au $n°$ 60. En multipliant z par $\frac{c}{\alpha'}$, on aura la valeur de l'abscisse cherchée x''.

Digitized by Google

On déterminera l'ordonnée y'' du point m'' au moyen de la formule (1), $n°$ 51

$$y'' = x'' \operatorname{tang} \varphi' - \frac{g x''^2}{2 V'^2 \cos^2 \varphi'} \mathfrak{P}\left(\frac{\alpha' x''}{c}, \frac{\alpha'^2 V'^2 \cos^2 \varphi'}{r^2}\right).$$

On obtiendra la vitesse V'' au point m'' au moyen de la formule (4), $n°$ 51

$$V'' = \frac{V'}{\mathfrak{V}\left(\frac{\alpha' x''}{c}, \frac{\alpha'^2 V'^2 \cos^2 \varphi'}{r^2}\right)} \cdot \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi''}.$$

On aura la durée t'' du trajet du projectile du point m' au point m'' au moyen de la formule (5), $n°$ 51

$$t'' = \frac{x''}{V' \cos \varphi'} \mathfrak{E}\left(\frac{\alpha' x''}{c}, \frac{\alpha'^2 V'^2 \cos^2 \varphi'}{r^2}\right).$$

On aura le rayon de courbure au point m'' par la formule (11), $n°$ 32

$$\gamma'' = \frac{V''^2}{g \cos \varphi''}.$$

Pour déterminer l'arc $m''m'''$, on prendra ($n°$ 61) $\alpha'' = \frac{\xi(20°)}{\operatorname{tang} 20°}$, et pour déterminer l'arc $m'''m^{IV}$ on prendra $\alpha''' = \frac{\xi(30°) - \xi(20°)}{\operatorname{tang} 30° - \operatorname{tang} 20°}$, et on calculera les deux arcs de la même manière que l'arc $m'm''$. On obtiendra ainsi pour le point m''' les valeurs x''', y''', V''', t''', γ''' et pour le point m^{IV} les valeurs x^{IV}, $-y^{IV}$, V^{IV}, t^{IV}, γ^{IV}.

Pour calculer le dernier arc $m^{IV}M$, depuis le point m^{IV} jusqu'au point M situé à la hauteur b au-dessus du point de départ, observons que l'ordonnée $-y^V$ du point M, rapportée au point m^{IV} comme origine, est connue et qu'elle est

$$-y^V = -(y' + y'' + y''' - y^{IV} - b).$$

En substituant dans l'équation (1) $n°$ 51 à la place de y la valeur connue $-y^V$ de l'ordonnée du point M, à la place de V la valeur

Digitized by Google

connue V^{IV} de la vitesse au point m^{IV}, à la place de φ la valeur connue $-\varphi^{IV}$ de l'inclinaison de la trajectoire au même point, et en tirant la valeur de l'abscisse $x = x^V$ du point M, on aura

$$x^V = \frac{V^{IV^2} \sin^2 \varphi^{IV}}{2g\mathfrak{P}(z, V_0^2)} \left[\sqrt{1 + \frac{2gy^V \mathfrak{P}(z, V_0^2)}{V^{IV^2} \sin^2 \varphi^{IV}}} - 1 \right],$$

et l'angle de chute $-\varphi^V$ au point M sera déterminé par (éq. 2, $n°$ 51)

$$-\operatorname{tang} \varphi^V = -\operatorname{tang} \varphi^{IV} - \frac{gx^V}{V^{IV^2} \cos^2 \varphi^{IV}} \mathfrak{J}(z, V_0^2).$$

En posant d'abord $\mathfrak{P}(z, V_0^2) = 1$ et $\mathfrak{J}(z, V_0^2) = 1$, l'avant-dernière équation donnera une valeur approchée de x^V qui, substituée dans la dernière équation, servira à trouver une valeur approchée de $-\varphi^V$. D'après cette valeur de $-\varphi^V$, on déterminera α^{IV} de la formule ($n°$ 61)

$$\alpha^{IV} = \frac{\xi(\varphi^V) - \xi(\varphi^{IV})}{\operatorname{tang} \varphi^V - \operatorname{tang} \varphi^{IV}},$$

on calculera $z = \frac{\alpha^{IV} x^V}{c}$ et on trouvera au moyen des tables de $\mathfrak{P}(z, V_0^2)$ et de $\mathfrak{J}(z, V_0^2)$ les valeurs de ces fonctions, qui, substituées dans les expressions trouvées de x^V et de $-\operatorname{tang} \varphi^V$, donneront des valeurs suffisamment précises de x^V et de $-\varphi^V$.

On aura la vitesse de chute au moyen de l'éq. (4), $n°$ 51, la durée t^{IV} du trajet du projectile du point m^{IV} au point M au moyen de l'éq. (5), $n°$ 51, et le rayon de courbure au point de chute au moyen de l'équation (11), $n°$ 32.

On aura la portée totale

$$x = x' + x'' + x''' + x^{IV} + x^V,$$

et la durée totale

$$t = t' + t'' + t''' + t^{IV} + t^V.$$

Un projectile tiré avec une forte charge, sous un grand angle de projection, s'élevant à une hauteur très considérable, il est utile,

Digitized by Google

dans le calcul de sa trajectoire, de tenir approximativement compte de la diminution de la densité de l'air avec l'accroissement de la hauteur au-dessus du sol. En appelant Π' la densité de l'air à la surface de la terre et négligeant la variation de la pesanteur due à la variation de la hauteur, la densité Π de l'air à la hauteur y au-dessus de la surface de la terre sera exprimée par

$$\Pi = \Pi' e^{-\frac{y}{k}},$$

où $k = 8000^{m}$, et le facteur $\frac{\Pi_1}{\Pi}$, qui entre dans les expressions des coefficients c de la résistance, deviendra

$$\frac{\Pi_1}{\Pi'} \cdot e^{\frac{y}{k}}.$$

Pour tenir approximativement compte, dans le calcul de la trajectoire, de la diminution de la densité de l'air due à la hauteur y, il faut calculer les coefficients c pour chaque arc de la trajectoire en y introduisant le facteur $\frac{\Pi_1}{\Pi'} e^{\frac{y}{k}}$ et en prenant pour y une valeur approchée de la hauteur moyenne du projectile au-dessus de la terre dans toute l'étendue de l'arc que l'on considère.

64. *Application au calcul de la trajectoire d'un boulet sphérique tiré du canon de 24^{l}, avec un vitesse initiale de 522$^{m:s}$, sous l'angle de projection de 30°.* Les circonstances du tir sont les suivantes: le poids du projectile $P = 12^{k},21$; son rayon $R = 0^{m},0749$, sa vitesse initiale $V = 522^{m:s}$, l'angle de projection $\varphi = 30°$, l'accélération de la gravité $g = 9^{m},8192$, la densité de l'air $\Pi' = \Pi_1$. La trajectoire est divisée en douze arcs. Les résultats du calcul sont compris dans le tableau ci-contre:

Digitized by Google

Trajectoire d'un boulet sphérique tiré du canon de 24[l] avec une vitesse initiale de 522[m:s], sous l'angle de projection de 30°.

Inclinaison de la trajectoire	Vitesse du projectile	Projection de l'arc		Durée du trajet de l'arc	Coordonnées du projectile rapportées au point de départ comme origine.		Durée du trajet	Rayon de courbure	$\frac{y}{k}$
		horizontale	verticale						
θ	v.	x_1.	y_1.	t_1.	x.	y.	t.	γ.	e.
	m:s	m	m	s	m	m	s	m	
30°	522,0	324,7	184,3	0,848	0	0	0	32040	1,01
29° 3′	376 , 0	608 , 7	314 , 5	2 , 444	324,7	184,3	0,85	16470	1,03
25°	241 , 0	415 , 4	173 , 7	2 , 126	933,4	498,8	3,29	6523	1,08
20°	195 , 8	299 , 5	97 , 4	1 , 700	1348,8	672,5	5,41	4452	1,10
15°	172 , 9	328 , 3	67 , 8	2 , 062	1648,3	769,9	7,12	3151	1,11
8°	153 , 8	306 , 8	22 , 1	2 , 104	1976.6	837,7	9,18	2432	1,12
0°	141 , 0	329 , 4	— 28 , 4	2 , 435	2283,4	859,8	11,28	2025	1,12
—10°	132 , 4	301 , 9	— 81 , 0	2 , 407	2612,8	831,4	13,71	1812	1,11
—20°	129 , 1	296 , 8	—139 , 6	2 , 576	2914,7	750,4	16,12	1807	1,10
—30°	129 , 9	301 , 0	—217 , 9	3 , 008	3211,5	610,8	18,70	1984	1,08
—40°	134 , 0	334 , 5	—338 , 1	3 , 464	3512,5	392,9	21,71	2388	1,06
—50°	141 , 7	45 , 9	— 54 , 8	0 , 520	3847,0	54,8	25,17	3176	1,00
—51°16′	142 , 7				3892,9	0	25,69	3316	

L'examen des résultats insérés dans ce tableau fait voir que la portée horizontale, c'est-à-dire la portée sur un terrain situé au même niveau que la bouche à feu, est de 3893[m]; la hauteur totale du jet, correspondant à $\theta = 0$, est de 860[m]; la durée totale du trajet est de 25″,7. La vitesse du projectile atteint son minimum; le point où la vitesse atteint sa valeur minima est situé sur l'arc dont les angles d'inclinaison sont compris entre — 20° et — 30°. En déterminant les valeurs de la vitesse en différents points de cet arc, on trouve que le point où la vitesse est minima correspond à l'inclinaison $\theta = -21°$, que les coordonnées de ce point sont $x = 2944^m$ et $y = 670^m,6$, et que la valeur de la vitesse minima est de 128[m:s],8. Le rayon de courbure minimum correspond à un point situé sur l'arc dont les angles d'inclinaison sont compris entre — 10° et — 20°. En déterminant les valeurs du rayon de courbure en différents points de cet arc, on trouve que le point où le rayon de courbure est minimum correspond à l'inclinaison $\theta = -15°$, que les coordonnées de ce point sont

Digitized by Google

$x = 2766^m$ et $y = 786^m,6$, et que la valeur du rayon minimum est de 1785^m.

Le tir direct du canon de 24^l, dans des conditions se rapprochant autant que possible de celles qui ont été adoptées pour le calcul de la trajectoire, a donné une portée moyenne de 3979^m et une durée moyenne de 26″,1, cette portée et cette durée étant déduites de 20 coups.

II. Tir courbe à faibles charges.

65. *Solution des problèmes sur le jet des projectiles à de faibles charges.* Dans le tir courbe à faibles charges, comme en général dans le tir avec des charges qui communiquent une vitesse initiale moindre que $376^{m:s}$, il faut calculer la trajectoire dans l'hypothèse de la résistance ($n°$ 51)

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc}\left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right],$$

où, si l'on pose $\Pi = \Pi_1$,

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}\pi R^2 g}$$

et, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités ($n°$ 28)

$$\mathfrak{A} = 0{,}012\,;\ r = 186^{m:s}.$$

L'influence de la résistance de l'air au mouvement des projectiles de gros calibre et de forte densité tirés avec de petites vitesses initiales, étant assez faible pour qu'on puisse, même sous de grands angles de projection, calculer la trajectoire sans la diviser en parties, la solution de divers problèmes du jet devient facile.

Quoique, dans le tir courbe, l'angle de chute sur un terrain situé au même niveau que la bouche à feu soit sensiblement plus grand que l'angle de projection, on peut, néanmoins, déduire α au moyen de la table des valeurs de $\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tang}\varphi}$ (Table I, annexe). Pour faciliter le calcul des valeurs de c, on a inséré dans la table II de l'annexe les valeurs de $\frac{P}{2\pi R^2 g}$ pour les projectiles employés dans notre artillerie.

Digitized by Google

66. *Déterminer la portée, connaissant l'angle de projection et la vitesse initiale.*

Soit le point de chute à la hauteur de la bouche à feu. On cherchera les valeurs de c, α, $V_1 = V\cos\varphi$, $V^2{}_0 = \left(\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2$.

En faisant $y = o$ dans l'éq. (1), $n°$ 51, on aura

$$x\,\mathfrak{P}\,(z,\ V_0^2) = \frac{V^2}{g}\sin 2\varphi,$$

ou, en remarquant que $z = \frac{\alpha x}{c}$,

$$z\mathfrak{P}(z, V_0^2) = \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{V^2}{g}\sin 2\varphi.$$

Après avoir calculé la valeur du second membre de l'équation, on trouvera la valeur de z au moyen de la table des $z.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$, comme on l'a exposé au $n°$ 60. En multipliant z par $\frac{c}{\alpha}$ on aura la valeur de la portée cherchée.

Soit un obus de 80^l projeté sous l'angle de 45° avec une vitesse initiale de $115^{m:s}$. Dans ce cas $R = 0^m,1207$; $P = 36^k,17$; $\frac{P}{2\pi R^2 g} = 40{,}24$; $c = 3353^m$; $r = 186^{m:s}$; $\alpha = 1{,}1478$; $V_0^2 = 0{,}2518$; $\frac{\alpha}{c}\frac{V^2}{g}\sin 2\varphi = 0{,}4611$; $z = 0{,}3906$ et

$$\text{la portée cherchée } x = 1141^m.$$

La portée ainsi calculée, comme on l'a exposé au $n°$ 62, *est un peu plus grande que la portée réelle.*

67. *Limite inférieure de la portée.* Pour faire voir que la portée calculée par la méthode ci-dessus diffère peu de la portée réelle, déterminons la portée inférieure à la portée réelle et comparons-la à la portée obtenue.

Pour déterminer la limite inférieure de la portée, on aurait pu poser $\alpha = \frac{1}{\cos\varphi}$ dans l'équation

$$z\mathfrak{P}(z,\ V_0^2) = \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{V^2}{g}\ \sin 2\varphi,$$

où $z = \frac{\alpha x}{c}$, $V_0^2 = \left(\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2$;

Digitized by Google

mais de cette manière on aurait obtenu une limite inférieure de la portée qui serait assez éloignée de la limite supérieure. Par suite nous exposerons une autre méthode pour calculer la limite inférieure de la portée.

Supposons la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, c'est-à-dire

$$f(v) = \frac{v^2}{k^2}$$

et posons

$$k^2 = \frac{2gc}{1 + \frac{V^2}{r^2}}.$$

En prenant cette valeur pour k^2, la résistance de l'air ne sera égale à la résistance réelle qu'au point de départ et sera trop forte sur toute l'étendue de la trajectoire, de manière que la portée calculée sera moindre que la portée réelle.

Nous déterminerons la portée dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse au moyen de tables pour le tir courbe calculées par le général Otto*) d'après la méthode d'Euler que nous allons d'abord sommairement exposer.

68. *Méthode d'Euler pour déterminer la portée du tir courbe.* Dans le cas de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse, l'arc s, dans les limites de $\theta = \varphi$ à θ, est exprimé par la formule (*n*° 46)

$$s = \frac{k^2}{2g} \log \left[1 + \frac{2V_1^2}{k^2} \left(\xi(\varphi) - \xi(\theta) \right) \right].$$

Par conséquent la partie Δs de l'arc, aux extrémités duquel les inclinaisons sont θ et θ', aura pour expression

$$\Delta s = \frac{k^2}{2g} \log \frac{\frac{k^2}{2V_1^2} + \xi(\varphi) - \xi(\theta')}{\frac{k^2}{2V_1^2} + \xi(\varphi) - \xi(\theta)},$$

*) Tables balistiques pour le tir élevé par Otto, traduit de l'allemand par Rieffel. 1844.

Digitized by Google

où il faut observer que dans la branche descendante les fonctions $\xi(\theta')$ et $\xi(\theta)$ doivent être prises avec des signes contraires.

Si θ' diffère peu de θ, on obtiendra la partie correspondante Δx de l'abscisse et celle Δy de l'ordonnée des expressions

$$\Delta\chi = \frac{2g.\,\mathrm{Log}\,e}{k^2}\Delta x = \mathrm{Log}\frac{\frac{k^2}{2V_1^2} + \xi(\varphi) - \xi(\theta')}{\frac{k^2}{2V_1^2} + \xi(\varphi) - \xi(\theta)} \cdot \cos\frac{\theta+\theta'}{2},$$

$$\Delta\eta = \frac{2g.\,\mathrm{Log}\,e}{k^2}\Delta y = \mathrm{Log}\frac{\frac{k^2}{2V_1^2} + \xi(\varphi) - \xi(\theta')}{\frac{k^2}{2V_1^2} + \xi(\varphi) - \xi(\theta)} \cdot \sin\frac{\theta+\theta'}{2},$$

où pour la branche descendante les fonctions $\xi(\theta')$ et $\xi(\theta)$ doivent être prises avec des signes contraires.

Le général Otto a calculé dans la branche ascendante et dans la branche descendante, pour chacune des diverses valeurs de $\frac{k^2}{2V_1^2} + \xi(\varphi) = \xi(\psi)$, très proches l'une de l'autre, ou plutôt pour chacune des diverses valeurs de ψ, les valeurs de $\Delta\chi$ et de $\Delta\eta$ correspondant aux arcs d'une étendue de $\theta' - \theta = 1°$, pour des valeurs consécutives de θ à partir de $\theta = 0$, et a pris les sommes consécutives $\Sigma\Delta\chi$ et $\Sigma\Delta\eta$ séparément dans la branche ascendante et dans la branche descendante.

Pour trouver la portée d'après les valeurs connues de φ, V et k, il faut déterminer $\frac{k^2}{2V_1^2} + \xi(\varphi) = \xi(\psi)$, et chercher dans la table des $\xi(\theta)$ (que M. Otto a calculé de minute en minute pour les valeurs de θ de 0 à 87°) la valeur de ψ qui correspond à la valeur calculée de $\xi(\psi)$; puis, au moyen de la table des $\Sigma\Delta\chi$ et $\Sigma\Delta\eta$ correspondant à la valeur trouvée de ψ, chercher dans la partie relative à la branche ascendante la valeur de $\Sigma\Delta\chi$ et celle de $\Sigma\Delta\eta$ qui correspondent à l'angle de projection φ, et prendre dans la partie relative à la branche descendante la valeur de $\Sigma\Delta\chi$ qui correspond à la valeur précédemment trouvée de $\Sigma\Delta\eta$. En faisant la somme de ces deux valeurs de $\Sigma\Delta\chi$ et en la représentant par χ, on aura la portée cherchée

$$x = \frac{k^2}{2g.\,\mathrm{Log}\,e} \cdot \chi \cdot$$

Digitized by Google

Si la valeur trouvée de ψ ne se trouve pas intégralement dans les tables, on doit déterminer la valeur de χ pour deux valeurs consécutives de ψ contenues dans les tables, l'une immédiatement inférieure et l'autre immédiatement supérieure à la valeur trouvée de ψ et puis déterminer la valeur cherchée de χ au moyen de parties proportionnelles.

Pour faciliter les recherches, M. Otto a dressé, au moyen de tables des $\Sigma\Delta\chi$ et $\Sigma\Delta\eta$, une autre table dans laquelle il a inséré, pour différents angles de projection de 5° en 5°, depuis $\varphi = 30°$ jusqu'à $\varphi = 90°$, les valeurs de χ qui correspondent à diverses valeurs de ψ, de 10 minutes en 10 minutes, depuis $\psi = \varphi + 1°$ jusqu'à $\psi = 87°$.

69. *La limite inférieure et la limite supérieure de la portée diffèrent peu l'une de l'autre.* On a pour l'obus de 80^l, projeté sous l'angle de 45° avec une vitesse initiale de $115^{m:s}$,

$$\frac{k^2}{2g} = \frac{c}{1 + \frac{V^2}{r^2}} = \frac{3353}{1 + \left(\frac{115}{186}\right)^2} = 2426^m,$$

$$\xi(\psi) = \frac{k^2}{2V_1^2} + \xi(\varphi) = 3,6019 + 1,1478 = 4,7497.$$

On trouve, dans la table des $\xi(\theta)$, la valeur $\psi = 69° 41',1$ correspondante à $\xi(\psi) = 4,7497$, et la table des valeurs de χ donne pour $\varphi = 45°$ et $\psi = 69° 41',1$ la valeur de $\chi = 0,1995$. On obtiendra la portée

$$x = \frac{k^2}{2g \,.\, \mathrm{Log}\, e} \cdot \chi = 1114^m.$$

Cette limite inférieure de la portée ne diffère pas beaucoup de la limite supérieure égale (*n°* 66) à 1141^m.

70. *Portée dans le cas où le point de chute n'est pas à hauteur de la bouche à feu.* Soit b l'élévation du point de chute au-dessus de la bouche. La portée sera déterminée par l'équation (*n°* 51, éq. 1)

$$b = x \,\mathrm{tang}\, \varphi - \frac{gx^2}{2V_1^2} \mathfrak{P}(z, V_0^2),$$

où $z = \frac{ax}{c}$, $V_0^2 = \left(\frac{aV_1}{r}\right)^2$.

Digitized by Google

On résoudra cette équation au moyen de la table des valeurs de $\mathfrak{P}(z, V_0^2)$, en la mettant sous la forme

$$\frac{c}{a} \cdot \operatorname{tang} \varphi \,.\, z - \frac{gc^2}{2a^2 V_1^2} \cdot \mathfrak{P}(z, V_0^2) \,.\, z^2 = b$$

et essayant successivement plusieurs valeurs de z, prises dans la table, jusqu'à ce qu'on ait trouvé deux valeurs du premier membre de l'équation, assez rapprochées, entre lesquelles soit comprise la valeur de b; on aura alors la valeur cherchée de z au moyen de parties proportionnelles, et on obtiendra la portée en multipliant z par $\frac{c}{a}$.

71. *Déterminer la vitesse initiale d'un projectile, tiré sous un angle de projection donné* φ, *qui doit toucher un point donné* (a, b). Prenons l'équation (1), $n°$ 51

$$b = a \operatorname{tang} \varphi - \frac{ga^2}{2V_1^2} \mathfrak{P}(z, V_0^2),$$

où $z = \frac{ax}{c}$, $V_0^2 = \left(\frac{aV_1}{r}\right)^2$.

En divisant les deux membres de l'équation par a, et posant

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tang} \varepsilon,$$

où ε est l'angle d'élévation du point à battre, on aura

$$\frac{2r^2}{a^2} \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \varepsilon}{ga} V_0^2 = \mathfrak{P}(z, V_0^2).$$

Faisant, pour abréger,

$$\frac{2r^2}{a^2} \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \varepsilon}{ga} = Q,$$

et observant que ($n°$ 51)

$$\mathfrak{P}(z, V_0^2) = (1 + V_0^2) F(z) - V_0^2,$$

on trouve

$$V_0 = \sqrt{\frac{F(z)}{Q - F(z) + 1}}.$$

Après avoir calculé la valeur de V_0, au moyen de la table de $F(z)$,

Digitized by Google

où $\varepsilon = \frac{\alpha x}{c}$, on obtient la vitesse initiale cherchée V, en multiplian V_0 par $\frac{r}{\alpha \cos\varphi}$.

Si le point à battre est à hauteur de la bouche à feu, on a $b = 0$ et $\varepsilon = 0$.

72. *Déterminer l'angle de projection* φ *sous lequel un projectile, tiré avec une vitesse initiale donnée* V, *doit toucher un point donné* (a, b). Prenons l'équation (1), n° 51

$$b = a \operatorname{tang}\varphi - \frac{ga^2}{2V^2\cos^2\varphi}\,\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha a}{c}, \left(\frac{\alpha V\cos\varphi}{r}\right)^2\right).$$

Remplaçant $\frac{1}{\cos^2\varphi}$ dans le facteur $\frac{ga^2}{2V^2\cos^2\varphi}$ par $1 + \operatorname{tang}^2\varphi$, on a

$$\operatorname{tang}^2\varphi - \frac{2V^2}{ga\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha a}{c}, \frac{\alpha^2V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right)}\cdot\operatorname{tang}\varphi + \frac{2V^2b}{ga^2\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha a}{c}, \frac{\alpha^2V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right)} + 1 = 0,$$

d'où l'on tire pour tang φ deux valeurs

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{V^2}{ga\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha a}{c}, \frac{\alpha^2V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right)} \pm \sqrt{\frac{V^2}{ga^2\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha a}{c}, \frac{\alpha^2V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right)}\left[\frac{V^2}{g\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha a}{c}, \frac{\alpha^2V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right)} - 2b\right] - 1},$$

dont l'une correspond à un angle plus grand et l'autre à un angle plus petit que celui de plus grande portée.

On cherchera d'abord les deux valeurs de φ en posant $\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha a}{c}, \frac{\alpha^2V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right) = 1$; ces deux valeurs de φ serviront à calculer les deux valeurs de $\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tang}\varphi}$ et les deux valeurs de $\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha a}{c}, \frac{\alpha^2V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right)$. En mettant ensuite la plus grande valeur de $\mathfrak{P}$ dans l'expression de tang φ prise avec le signe plus devant le radical, on obtiendra la valeur de φ supérieure à l'angle de plus grande portée, et en mettant la plus petite valeur de $\mathfrak{P}$ dans l'expression de tang φ prise avec le signe moins devant le radical, on obtiendra la valeur de φ inférieure à l'angle de plus grande portée.

Digitized by Google

Si le point de chute est à hauteur de la bouche à feu, il faut poser $y = 0$ dans l'équation (1), $n°$ 51, et l'on aura

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{gx}{2V^2\cos^2\varphi}\,\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha x}{c}, \frac{\alpha^2 V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right),$$

d'où

$$2\operatorname{tang}\varphi.\cos^2\varphi = \frac{gx}{V^2}\,\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha x}{c}, \frac{\alpha^2 V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right)$$

et

$$\sin 2\varphi = \frac{gx}{V^2}\,\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha x}{c}, \frac{\alpha^2 V^2\cos^2\varphi}{r^2}\right).$$

Cette expression donne deux valeurs de l'angle φ. On les cherchera d'abord en posant $\mathfrak{P} = 1$; elles serviront à calculer les deux valeurs de $\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tang}\varphi}$ et les deux valeurs de $\mathfrak{P}$. Mettant ensuite dans l'expression de sin 2 φ la plus petite valeur de $\mathfrak{P}$ on en tirera la valeur de φ inférieure à l'angle de plus grande portée, et en mettant la plus grande valeur de $\mathfrak{P}$ on en tirera la valeur de φ supérieure à l'angle de plus grande portée.

73. *Déterminer l'angle et la vitesse de chute, la durée du trajet et la hauteur totale du jet.*

L'angle de chute est donné par la formule (éq. 2, $n°$ 51)

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{gx}{V_1^2}\,\mathfrak{I}(z, V_0^2).$$

Dans l'exemple cité au $n°$ 66, on a $x = 1141^m$, $\varphi = 45°$, $V = 115^{m:s}$, $z = \frac{\alpha x}{c} = 0{,}3906$, $V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2} = 0{,}2518$; on trouve, à l'aide de la table des valeurs de $\mathfrak{I}(z, V_0^2)$,

$$\mathfrak{I}(z, V_0^2) = 1{,}2796$$

et

$$\operatorname{tang}\theta = -1{,}1681,$$

d'où

$$\theta = -49° 26'.$$

La vitesse de chute est donnée par la formule ($n°$ 51, éq. 4)

$$v = \frac{V}{\mathcal{V}(z, V_0^2)} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

Digitized by Google

Dans l'exemple précédent, on a, à l'aide de la table des valeurs de $\mathcal{V}(z, V_0^2)$,

$$\mathcal{V}(z, V_0^2) = 1{,}263$$

et

$$v = 99^{m:s}0.$$

La durée du trajet est donnée par la formule ($n°$ 51, éq. 5).

$$t = \frac{x}{V_1}\mathfrak{C}(z, V_0^2).$$

Dans l'exemple précédent on a, à l'aide de la table des valeurs de $\mathfrak{C}(z, V_0^2)$,

$$\mathfrak{C}(z, V_0^2) = 1{,}129$$

et

$$t = 15''84.$$

Pour avoir la hauteur totale du jet, on prendra l'équation (2), $n°$ 51 et, en posant tang $\theta = 0$, on la mettra sous la forme

$$z\mathfrak{Z}(z, V_0^2) = \frac{\alpha}{c} \cdot \frac{V^2 \sin 2\varphi}{2g}.$$

Cette équation servira à trouver la valeur de z, à l'aide de la table des valeurs de $z\mathfrak{Z}(z, V_0^2)$, comme on l'a fait voir au $n°$ 60.

En multipliant la valeur trouvée de z par $\frac{c}{\alpha}$, on aura l'abscisse x' qui correspond à la hauteur totale du jet.

En mettant la valeur x' à la place de x dans l'équation ($n°$ 51, éq. 1) de la trajectoire, on aura

$$y' = x' \text{ tang } \varphi - \frac{gx'^2}{2V_1^2}\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha x'}{c}, \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}\right)$$

la hauteur cherchée du jet.

Dans l'exemple précédent on trouve

$$z\mathfrak{Z}(z, V_0^2) = 0{,}2306$$

et connaissant $V_0^2 = 0{,}2518$, on obtient, à l'aide de la table des valeurs de $z\mathfrak{Z}(z, V_0^2)$,

$$z = 0{,}2030.$$

Digitized by Google

et

$$x' = 0{,}2030 \cdot \frac{c}{a} = 593^{m},0.$$

Ayant $z = \frac{ax'}{c} = 0{,}2030$ et $V_0^2 = 0{,}2518$, on trouve, à l'aide de la table des valeurs de $\mathfrak{P}(z, V_0^2)$,

$$\mathfrak{P}(z, V_0^2) = 1{,}0891$$

et l'équation de la trajectoire donne la hauteur totale du jet

$$y' = 308^{m},6.$$

74. *L'angle de plus grande portée.* Pour déterminer l'angle qui correspond à la plus grande portée, il faut avoir l'équation de la trajectoire du projectile dans l'air. L'expression exacte de y en fonction de x n'étant trouvée que dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle à la première puissance de la vitesse, prenons cette expression ($n°$ 48, éq. 4) pour discuter l'angle de plus grande portée. On aura la portée sur un plan horizontal passant par la bouche à feu en faisant $y = o$ dans l'équation (4), $n°$ 48, et l'on trouvera

$$(1)\ldots\ldots x\left(\operatorname{tang}\varphi + \frac{k}{V\cos\varphi}\right) + \frac{k^2}{g}\log\left(1 - \frac{gx}{kV\cos\varphi}\right) = 0.$$

Pour déterminer la plus grande portée égalons à zéro la dérivée $\frac{dx}{d\varphi}$ de cette équation, c'est-à-dire faisons

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{x\left[gx\sin\varphi - V\left(V\cos\varphi - \frac{gx}{k}\right)\right]}{V\sin\varphi\cos\varphi\left(V\cos\varphi - \frac{gx}{k}\right) - gx\cos\varphi} = 0.$$

La seconde dérivée $\frac{d^2x}{d\varphi^2}$, quand $\frac{dx}{d\varphi} = 0$, est

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = -\frac{gx\cos\varphi + V^2\sin\varphi}{x\cos^3\varphi}.$$

L'angle de projection φ, pour un point de chute à hauteur de la bouche à feu, est toujours positif et la dérivée $\frac{d^2x}{d\varphi^2}$ est négative.

Digitized by Google

Par suite la valeur de

$$x = \frac{V^2 \cos\varphi}{g\left(\sin\varphi + \frac{V}{k}\right)},$$

tirée de la condition $\frac{dx}{d\varphi} = 0$, est la valeur de la plus grande portée, et mise dans l'équation (1) donne

$$\left(1 + \frac{V}{k\sin\varphi}\right)\log\left(1 + \frac{V}{k\sin\varphi}\right) - \frac{V}{k\sin\varphi} = \frac{V^2}{k^2}$$

l'expression qui détermine la relation de l'angle de plus grande portée et de la valeur de $\frac{V}{k}$.

En posant, pour abréger,

$$\sin\varphi = z, \frac{V}{k} = u,$$

la dernière équation devient

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{u}{z}\right)\log\left(1+\frac{u}{z}\right) - \frac{u}{z} = u^2.$$

Pour faire voir plus facilement la relation de l'angle de plus grande portée φ ou de $\sin\varphi = z$ et de la valeur $\frac{V}{k} = u$, prenons la dérivée $\frac{dz}{du}$ de l'équation (2) et égalons-la à zéro, c'est-à-dire faisons

$$\frac{dz}{du} = \frac{z\left[\log\left(1+\frac{u}{z}\right) - 2uz\right]}{u\log\left(1+\frac{u}{z}\right)} = 0.$$

Pour que cette expression soit égale à zéro, il faut que ou

$$1^\circ\ldots\log\left(1+\frac{u}{z}\right) = 2uz, \text{ ou } 2^\circ\ldots z = 0, \text{ ou } 3^\circ\ldots u = \infty.$$

Si l'on a

$$1^\circ. \qquad \log\left(1+\frac{u}{z}\right) = 2uz,$$

l'équation (2) donne

$$u = \frac{1-2z^2}{z};$$

Digitized by Google

en mettant cette valeur dans l'expression $\log\left(1+\frac{u}{z}\right)=2uz$, on obtient

$$\log\left(1+\frac{1-2z^2}{z^2}\right)=2\,(1-2z^2)$$

ou

$$\left(1+\frac{1-2z^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2(1-2z^2)}}=e,$$

ce qui nécessite que

$$1-2z^2=0$$

ou que

$$z^2=\frac{1}{2},$$

et par suite, comme le fait voir l'expression $u=\frac{1-2z^2}{z}$, il faut que

$$u=0.$$

Si l'on a

$2°\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z=0,$

l'équation (2) mise sous la forme

$$\log\left(1+\frac{u}{z}\right)+\frac{u}{z}\left[\log\left(1+\frac{u}{z}\right)-1\right]=u^2$$

donne

$$u=\infty,$$

Si l'on a

$3°\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u=\infty$

les deux termes du premier membre de l'équation (2) mise sous la forme

$$\frac{\log\left(1+\frac{u}{z}\right)}{\left(\frac{u}{z}\right)^2}+\frac{\log\left(1+\frac{u}{z}\right)-1}{\frac{u}{z}}=z^2$$

se réduisent à $\frac{\infty}{\infty}$; mais en prenant les dérivées par rapport à u du

Digitized by Google

numérateur, ainsi que du dénominateur de chacun de ces deux termes, on obtient

$$\frac{1}{2\left(1+\frac{u}{z}\right)\frac{u}{z}}+\frac{1}{1+\frac{u}{z}}=z^2,$$

ce qui, pour $u=\infty$, donne

$$z=0$$

et fait voir que les conditions 2° et 3° sont identiques.

La valeur de $\frac{V}{k}=u$ peut varier dans les limites

$$\text{de } u=0 \qquad \text{à } u=\infty$$

et l'on voit par ce qui précède que la dérivée $\frac{dz}{du}$ ne se réduit à zéro que pour ces limites, pour lesquelles $\sin\varphi=z$ prend les valeurs de

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad 0.$$

Par conséquent l'angle de plus grande portée atteint sa limite supérieure, égale à 45°, quand $\frac{V}{k}=0$, et sa limite inférieure, égale à zéro, quand $\frac{V}{k}=\infty$, et s'écarte en général d'autant plus de 45° que $\frac{V}{k}$ est plus grand.

Pour appliquer les équations du mouvement déduites dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle à la première puissance de la vitesse au cas d'une loi quelconque de la résistance, il faut égaler le coefficient constant $\frac{1}{k}$ à une certaine valeur moyenne (différente pour chacune des équations) entre toutes celles que prend l'expression $\frac{f(v)}{v}$ dans les limites de $v=V$ à v. La fonction $f(v)$ croît avec la résistance, ainsi que le rapport $\frac{f(v)}{v}$ (toutes les fois que le degré de $f(v)$ surpasse le premier), et par suite croît aussi le coefficient $\frac{1}{k}$. Donc, quelle que soit la loi de la résistance, l'angle de plus grande portée est d'autant plus inférieur à 45° que la résistance et la vitesse initiale sont plus grandes.

Digitized by Google

75. *Calcul de l'angle de plus grande portée.* Pour calculer l'angle de plus grande portée et la plus grande portée d'un projectile donné, tiré avec une vitesse initiale donnée, il faut calculer plusieurs portées correspondantes à autant d'angles de projection choisis les uns au-dessus, les autres au-dessous de l'angle de plus grande portée, et trouver par interpolation la valeur de la plus grande portée et de l'angle de projection correspondant. Mais de pareils calculs, sous de grands angles de projection, étant très longs, parce qu'ils exigent la division de la trajectoire en parties, nous exposerons une méthode approximative pour trouver l'angle de plus grande portée, lorsqu'on connaît la portée sous un angle quelconque voisin de celui de plus grande portée.

Soit à trouver l'angle de plus grande portée d'un boulet sphérique de 24^{l}, tiré avec une vitesse initiale de $522^{m:s}$. On a calculé au n° 66 la portée dans ce cas sous l'angle de projection de 30° et on l'a trouvée de 3893^{m}. On cherchera, dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse, à l'aide des tables de M. Otto, comme on l'a exposé aux n^{os} 68 et 69, en essayant plusieurs valeurs de $\frac{k^2}{2g}$, une valeur de $\frac{k^2}{2g}$ telle qu'elle donne, sous l'angle de 30°, une portée de 3893^{m}. On aura pour cette valeur

$$\frac{k^2}{2g} = 1137^{m},$$

et on la supposera constante pour le calcul de toutes les portées sous des angles voisins de celui de plus grande portée. On calculera ainsi, à l'aide des tables de M. Otto, la portée sous l'angle de 35° et celle sous l'angle de 40°, et l'on aura

$$\varphi' = 30^{\circ}, \qquad \varphi'' = 35^{\circ}, \qquad \varphi''' = 40^{\circ},$$

$$x' = 3893^{m}, \quad x'' = 3934^{m}; \quad x''' = 3912^{m}.$$

En posant en général

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x = a + b\varphi + c\varphi^2$$

on déterminera les valeurs de a, b, c au moyen des trois valeurs ob-

Digitized by Google

tenues de x correspondantes aux trois angles φ, et, observant que pour la plus grande valeur de x on a

$$\frac{dx}{d\varphi} = b + 2c\varphi = 0,$$

on trouvera l'angle de plus grande portée

$$\varphi = -\frac{b}{2c},$$

et on obtiendra la plus grande portée en substituant cette valeur dans l'équation (1).

Si la différence entre les angles φ', φ'', φ'' est constante et égale à 5°, comme cela a lieu dans les tables de M. Otto, on aura, en posant $x'' - x' = \Delta x'$, $x''' - x'' = \Delta x''$, $\Delta x'' - \Delta x' = \Delta^2 x'$,

l'angle de plus grande portée

$$\varphi = \frac{\varphi' + \varphi''}{2} - \frac{5\Delta x'}{\Delta^2 x'},$$

et la plus grande portée

$$x = x' + \frac{\varphi - \varphi'}{5}\left(\Delta x' - \frac{\varphi'' - \varphi}{10}\Delta^2 x'\right).$$

Dans notre exemple $\Delta x' = 41^m$, $\Delta x'' = -22^m$, $\Delta^2 x' = -63^m$,

l'angle de plus grande portée $\varphi = 35°46'$,

la plus grande portée $x = 3935^m$.

Soit à trouver, pour second exemple, l'angle de plus grande portée et la plus grande portée d'un obus de 80[l], projeté avec une vitesse initiale de 115 $^{m:s}$. On a trouvé pour ce cas (n^{os} 66 et 69) que la portée sous l'angle de 45° est comprise entre 1141^m et 1114^m. Soit $1127^m,5$ la vraie valeur de la portée. On trouvera, à l'aide des tables de M. Otto, la valeur de $\frac{k^2}{2g}$ pour $\varphi = 45°$ et $x = 1127^m,5$ et l'on aura $\frac{k^2}{2g} = 2617^m$; en supposant cette valeur constante pour le

Digitized by Google

calcul des portées sous les angles de 40° et de 35°, on obtiendra, à l'aide des tables de M. Otto,

$$\varphi' = 35°, \qquad \varphi'' = 40°, \qquad \varphi''' = 45°,$$

$$x = 1081^{m},6, \; x'' = 1120^{m},8, \; x''' = 1127^{m},5,$$

et l'on aura $\Delta x' = 39^{m},2$, $\Delta x'' = 6^{m},7$, $\Delta^2 x' = -32^{m},5$,

l'angle de plus grande portée $\varphi = 43° 32'$

la plus grande portée $x = 1128^{m},9$.

III. Tir direct.

§ I.

TIR DIRECT À VITESSES INITIALES DÉPASSANT $376^{m:s}$.

76. *Exposé.* La résistance de l'air au mouvement des projectiles sphériques est exprimée (*n*° 28), pour des vitesses dépassant $376^{m:s}$, par un monome proportionnel au carré de la vitesse, et pour des vitesses inférieures à $376^{m:s}$ par un binome dont le premier terme est proportionnel au carré de la vitesse et le second à la quatrième puissance de la vitesse. Par conséquent, il est nécessaire de diviser la trajectoire en parties toutes les fois que, la vitesse initiale dépassant $376^{m:s}$, la vitesse de chute est inférieure à $376^{m:s}$. Mais le tir direct ayant lieu sous des angles de projection qui ne dépassent pas 15°, on simplifie beaucoup les calculs, en ne déterminant la trajectoire par parties que sous un seul angle de projection, soit celui de 5°, et en rapportant les points obtenus de la trajectoire aux coordonnées obliques, l'une X suivant la tangente au point de départ, et l'autre Y suivant la direction de la pesanteur. On aura les angles de projection, les angles et les vitesses de chute et les durées des trajets correspondants à diverses portées d'après les points calculés de la trajectoire sous l'angle de 5°, en admettant que pour les angles de projection ne dépassant pas 15°, les distances verticales des points d'une trajectoire à sa tangente au point de départ sont indépendantes des angles de projection. Discutons d'abord cette supposition.

Digitized by Google

77. *Les distances verticales des points de la trajectoire à sa tangente au point de départ sont indépendantes des angles de projection, lorsque le mouvement a lieu non-seulement dans le vide, mais encore dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la première puissance de la vitesse.* En effet, en mettant dans les équations du mouvement (1), (3), (4) et (6), *n*° 48, obtenues pour un milieu dont la résistance est proportionnelle à la première puissance de la vitesse les expressions

$$x = X\cos\varphi,\ y = X\sin\varphi - Y$$

qui servent à la transformation des coordonnées rectangles x, y en coordonnées obliques X, Y, on trouve

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots v = \left(V - \frac{gX}{k}\right)\frac{\cos\varphi}{\cos\theta},$$

$$(2)\ldots\ldots\ldots \tang\theta = \tang\varphi - \frac{gX}{V^2\cos\varphi\left(1 - \frac{gX}{kV}\right)},$$

$$Y = -\frac{kX}{V} - \frac{k^2}{g}\log\left(1 - \frac{gX}{kV}\right),$$

ou, en développant $\log\left(1 - \frac{gX}{kV}\right)$ en série,

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots Y = \frac{gX^2}{2V^2} + \frac{g^2X^3}{3kV^3} + \frac{g^3X^4}{4k^2V^4} + \ldots,$$

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t = \frac{k}{g}\log\frac{V}{V - \frac{gX}{k}}.$$

Les distances verticales des points de la trajectoire à la tangente au point de départ Y, et les durées des trajets t, comme on le voit des équations (3) et (4), sont indépendantes de l'angle de projection φ.

Les expressions de Y et de $\tang\theta$ font voir que les distances verticales des points de la trajectoire à la tangente au point de départ croissent, et les valeurs absolues des angles d'inclinaison θ diminuent dans la branche ascendante et croissent dans la branche descendante avec l'accroissement de $\frac{1}{k} = \frac{f(v)}{v}$ et par conséquent avec l'accroissement de

Digitized by Google

la résistance, quelle que soit la loi de la résistance, pourvu que le degré de $f(v)$ soit supérieur au premier.

Les équations (3) et (4), qui prouvent que les valeurs de Y et de t ne dépendent pas de l'angle de projection φ dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle à la première puissance de la vitesse, ne font pas voir que cette indépendance a lieu pour d'autres expressions de la résistance. En effet, pour appliquer les expressions (3) et (4) de Y et de t à une autre loi de la résistance, la vitesse v dépendant (éq. 1) des angles φ et θ, il faut, pour une même valeur de X, égaler le coefficient $\frac{1}{k}$ à une valeur moyenne $\frac{f(v)}{v}$ qui change avec l'angle φ.

78. *Limites entre lesquelles sont comprises, pour les mêmes valeurs de X, les ordonnées Y de deux trajectoires correspondantes à deux angles différents de projection, dans l'hypothèse d'une loi quelconque de la résistance.* Quelle que soit la loi de la résistance, la vitesse, la durée du trajet, l'inclinaison et l'équation de la trajectoire sont exprimées, en coordonnées rectangulaires, par les équations (4), (9), (6) et (7) du $n°$ 50.

Si l'on met dans ces équations

$$x = X\cos\varphi,\ y = X\sin\varphi - Y,$$

on obtient

$$(1)\ldots\ldots\ v\cos\theta = \frac{1}{\alpha}\mathcal{G}(\alpha X\cos\varphi,\ \alpha V\cos\varphi),$$

$$(2)\ldots\ldots\ t = \int_0^{\alpha X\cos\varphi} \sqrt{\psi(\alpha X\cos\varphi, \alpha V\cos\varphi)}\,.\,d(\alpha X\cos\varphi),$$

$$(3)\ldots\ldots\ \tan\theta = \tan\varphi - g\alpha\int_0^{\alpha X\cos\varphi} \psi\,(\alpha X\cos\varphi, \alpha V\cos\varphi)\,.\,d(\alpha X\cos\varphi),$$

$$Y = g\int_0^{\alpha X\cos\varphi} d(\alpha X\cos\varphi)\int_0^{\alpha X\cos\varphi} \psi(\alpha X\cos\varphi,\ \alpha V\cos\varphi)\,.\,d(\alpha X\cos\varphi),$$

ou en posant pour abréger

$$g\int_0^{\alpha X\cos\varphi} d\,(\alpha X\cos\varphi)\int_0^{\alpha X\cos\varphi} \psi\,(\alpha X\cos\varphi,\ \alpha V\cos\varphi)\,.\,d\,(\alpha X\cos\varphi) = E(\alpha X\cos\varphi,\ \alpha V\cos\varphi),$$

Digitized by Google

on a

(4)..... $Y = E(\alpha X \cos\varphi,\ \alpha V \cos\varphi)$,

où α, comme on sait, est une certaine valeur moyenne de $\frac{1}{\cos\theta}$ entre les limites de $\theta = \varphi$ à θ.

La dernière équation fait voir que l'ordonnée Y dépend en général de l'angle de projection et de l'étendue de l'arc de la trajectoire.

En égalant α à la plus petite valeur que prend $\frac{1}{\cos\theta}$ sur toute l'étendue de l'arc que l'on considère, la fonction $\frac{f(\alpha v \cos\theta)}{\alpha \cos\theta}$ que l'on substitue à la fonction $f(v)$ pour intégrer par approximation les équations différentielles du mouvement, sera moindre que $f(v)$ (toutes les fois que le degré de la fonction $f(v)$ est plus grand que l'unité), ou, ce qui est tout un, on prendra une valeur trop faible pour la résistance de l'air; par suite on aura ($n°$ 77) des valeurs trop faibles pour les ordonnées Y et des valeurs trop fortes pour tang θ, de manière que la trajectoire passera au-dessus de la trajectoire réelle. Réciproquement on prendra une valeur trop forte pour la résistance de l'air en égalant α à la plus grande valeur que prend $\frac{1}{\cos\theta}$ sur toute l'étendue de l'arc que l'on considère, et la trajectoire passera dans ce cas au-dessous de la trajectoire réelle.

La plus petite valeur que peut prendre $\frac{1}{\cos\theta}$ est l'unité. Donc on prendra une valeur trop faible pour la résistance de l'air sur toute l'étendue de la trajectoire, en posant

$$\alpha = 1$$

et l'expression

(5)..... $E(X\cos\varphi,\ V\cos\varphi)$

donnera pour les ordonnées Y des valeurs trop faibles, sous tous les angles de projection φ.

La plus grande valeur que peut prendre $\frac{1}{\cos\theta}$ sur toute l'étendue de la trajectoire comprise entre $\theta = \varphi$ et $\theta = -\varphi$, est $\frac{1}{\cos\varphi}$. Donc, en posant

$$\alpha = \frac{1}{\cos\varphi},$$

Digitized by Google

l'expression

$$(6)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E\ (X,\ V)$$

donnera des valeurs trop fortes pour les ordonnées Y de la trajectoire comprise entre $\theta = \varphi$ et $\theta = -\varphi$.

Cette seconde limite, comme on voit, est indépendante de l'angle de projection.

Sous de petits angles de projection, les deux limites entre lesquelles est comprise chaque ordonnée Y de la courbe diffèrent peu l'une de l'autre, et l'on peut prendre l'une d'elles pour l'expression des ordonnées Y.

En représentant, pour la trajectoire qui correspond à l'angle de projection φ, par θ_1 le plus petit des angles formés avec l'horizon par les tangentes sur toute l'étendue de l'arc que l'on considère, et par θ_2 le plus grand de ces angles, on voit que les ordonnées Y sur toute l'étendue de cet arc seront comprises entre les limites

$$E\left(\frac{X\cos\varphi}{\cos\theta_1},\ \frac{V\cos\varphi}{\cos\theta_1}\right) \quad \text{et} \quad E\left(\frac{X\cos\varphi}{\cos\theta_2},\ \frac{V\cos\varphi}{\cos\theta_2}\right).$$

De même on aura pour les limites se rapportant à la trajectoire qui correspond à l'angle de projection φ'

$$E\left(\frac{X\cos\varphi'}{\cos\theta'_1},\ \frac{V\cos\varphi'}{\cos\theta'_1}\right) \quad \text{et} \quad E\left(\frac{X\cos\varphi'}{\cos\theta'_2},\ \frac{V\cos\varphi'}{\cos\theta'_2}\right).$$

En appelant l la limite inférieure et L la limite supérieure de la différence entre l'ordonnée de la trajectoire sous l'angle de projection φ et celle de la trajectoire sous l'angle de projection φ', on aura

$$l = E\left(\frac{X\cos\varphi}{\cos\theta_1},\ \frac{V\cos\varphi}{\cos\theta_1}\right) - E\left(\frac{X\cos\varphi'}{\cos\theta'_2},\ \frac{V\cos\varphi'}{\cos\theta'_2}\right),$$

$$L = E\left(\frac{X\cos\varphi}{\cos\theta_2},\ \frac{V\cos\varphi}{\cos\theta_2}\right) - E\left(\frac{X\cos\varphi'}{\cos\theta'_1},\ \frac{V\cos\varphi'}{\cos\theta'_1}\right).$$

Si $\varphi' = 0$ et si l'on ne considère dans la trajectoire sous l'angle

Digitized by Google

de projection φ que l'arc compris entre $\theta = \varphi$ et $\theta = -\varphi$, on a $\theta'_1 = 0$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \varphi$ et

$$l = E(X\cos\varphi,\ V\cos\varphi) - E\left(\frac{X}{\cos\theta'_2},\ \frac{V}{\cos\theta'_2}\right),$$
$$L = 0.$$

La limite supérieure de la différence entre l'ordonnée de la trajectoire sous l'angle de projection φ et celle de la trajectoire sous l'angle de projection 0 étant égale à zéro, on voit que les ordonnées Y de la dernière trajectoire sont plus grandes que celles de la trajectoire sous l'angle de projection φ sur toute l'étendue de l'arc de φ à $-\varphi$.

79. *Cas de petits angles de projection.* Tant que les angles de projection ne sont pas grands, les limites (5) et (6), n° 78, entre lesquelles sont comprises les ordonnées Y de la trajectoire sur l'étendue de $\theta = \varphi$ à $\theta = -\varphi$ diffèrent peu l'une de l'autre, et l'on peut admettre l'indépendance des angles de projection et des distances verticales des points des trajectoires aux tangentes aux points de départ, de manière que l'on peut poser

$$v\cos\theta = \varphi(X, V),$$
$$t = \int_0^X \sqrt{\psi(x, V)}\, dX,$$
$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - g\int_0^X \psi(X, V)\, dX.$$

Donc, si l'on connaît, pour une trajectoire sous l'angle de projection φ', l'inclinaison θ', la vitesse v' et la durée t' qui correspondent à l'abscisse X, on peut prendre pour la trajectoire sous l'angle de projection φ les expressions suivantes de θ, v et t qui correspondent à la même valeur de X

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\theta' - \operatorname{tang}\varphi' + \operatorname{tang}\varphi,$$
$$v = \frac{v'\cos\theta'}{\cos\theta},$$
$$t = t'.$$

Digitized by Google

80. *Calculer par parties la trajectoire sous un certain angle de projection et déterminer, d'après les résultats obtenus, les angles de projection, les angles et les vitesses de chute et les durées qui correspondent à différentes portées.* Soit φ' l'angle de projection de la trajectoire que l'on calcule par parties.

1°. On choisira le premier arc de la trajectoire (fig. 10) du point de départ 0, où la vitesse initiale V est plus grande que $376^{m:s}$ jusqu'au point M où la vitesse $V' = 376^{m:s}$ et on le calculera dans l'hypothèse (*n*° 52)

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc},$$

où

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}\pi R^2 g} \cdot \frac{\Pi_1}{\Pi}$$

et, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités (*n*° 28),

$$\mathfrak{A} = 0{,}061.$$

On déterminera d'abord la valeur approchée de l'angle d'inclinaison φ'' de la trajectoire au point M, à l'aide de la formule (6), *n*° 52

$$\operatorname{tang}\varphi'' = \operatorname{tang}\varphi' - \frac{1}{\alpha}\frac{gc}{V_1'^2}\left(1 - \frac{V_1'^2}{V_1^2}\right),$$

en posant $\alpha = \frac{1}{\cos\varphi'}$, $V_1 = V\cos\varphi'$, $V_1' = V'\cos\varphi'$, et ayant cette valeur approchée de φ'', on obtiendra α de la formule (*n*° 61)

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi') - \xi(\varphi'')}{\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\varphi''}.$$

On aura la valeur de φ'' suffisamment précise, en mettant dans l'expression précédente de tang φ'' la valeur de α et en posant dans $V_1' = V'\cos\varphi''$ pour φ'' sa valeur approchée.

Connaissant la valeur de φ'' et celle de α, on trouve

$x' = OQ$ à l'aide de la formule (3), *n*° 52

$$x' = \frac{2c}{\alpha} \cdot \frac{1}{Log\, e} \cdot Log \frac{V\cos\varphi'}{V'\cos\varphi''},$$

Digitized by Google

$y' = MQ$ à l'aide de la formule (1), $n°$ 52

$$y' = x' \operatorname{tang} \varphi' - \frac{gx'^2}{2V^2 \cos^2 \varphi'} F\left(\frac{\alpha x'}{c}\right),$$

la durée t' du trajet du projectile du point O au point M à l'aide de la formule (5), $n°$ 52

$$t' = \frac{x'}{V \cos \varphi'} F_1\left(\frac{\alpha x'}{2c}\right).$$

On aura en coordonnées obliques, l'abscisse $OP = X'$ du point M

$$X' = \frac{x'}{\cos \varphi'},$$

l'ordonnée $MP = Y'$ du point M

$$Y' = X' \sin \varphi' - y'.$$

En admettant l'indépendance des angles de projection et des distances verticales des points de la trajectoire à la tangente au point de départ,

l'angle de projection φ_1 déterminé de l'expression

$$\sin \varphi_1 = \frac{Y'}{X'}$$

doit correspondre à la portée horizontale

$$x_1 = X' \cos \varphi_1.$$

L'angle de chute θ_1, la vitesse de chute v et la durée du trajet t_1 seront définis ($n°$ 79) par

$$\operatorname{tang} \theta_1 = \operatorname{tang} \varphi'' - \operatorname{tang} \varphi' + \operatorname{tang} \varphi_1,$$

$$v = \frac{V' \cos \varphi''}{\cos \theta_1},$$

$$t_1 = t'.$$

2°. On calculera les arcs suivants de la trajectoire sous l'angle de projection φ' dans l'hypothèse de la résistance ($n°$ 51)

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc}\left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right],$$

Digitized by Google

où

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}\pi R^2 g} \cdot \frac{\Pi_1}{\Pi}$$

et, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités (*n*° 28),

$$\mathfrak{A} = 0{,}012\,;\; r = 186^{m:s}$$

Pour calculer le deuxième arc on choisira une valeur quelconque pour $X'' = OP'$; on aura, pour l'abscisse horizontale $MQ' = x''$ du point M'

$$x'' = (X'' - X')\cos\varphi'.$$

On déterminera d'abord la valeur approchée de l'angle d'inclinaison φ''' de la trajectoire au point M' à l'aide de la formule (2), *n*° 51

$$\text{tang}\,\varphi''' = \text{tang}\,\varphi'' - \frac{gx''}{V''^2\cos^2\varphi''}\,\mathfrak{J}\left(\frac{\alpha x''}{c}, \frac{\alpha^2 V''^2\cos^2\varphi''}{r^2}\right)$$

en posant $\alpha = \frac{1}{\cos\varphi''}$, et ayant cette valeur approchée de φ''', on obtiendra α de la formule

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi'') - \xi(\varphi''')}{\text{tang}\,\varphi'' - \text{tang}\,\varphi'''}.$$

Connaissant la valeur de α on aura la valeur de φ''' suffisamment précise en mettant la valeur de α dans l'expression précédente de tang φ''', et l'on trouvera

l'ordonnée $M'Q' = y''$ du point M' à l'aide de la formule (1), *n*° 51

$$y'' = x''\,\text{tang}\,\varphi'' - \frac{g x''^2}{2V''^2\cos^2\varphi''}\,\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha x''}{c}, \frac{\alpha^2 V''^2\cos^2\varphi''}{r^2}\right);$$

la vitesse V'' au point M' à l'aide de la formule (4) *n*° 51

$$V''\cos\varphi''' = \frac{V'\cos\varphi''}{\mathfrak{V}\left(\frac{\alpha x''}{c}, \frac{\alpha^2 V''^2\cos^2\varphi''}{r^2}\right)};$$

la durée t'' du trajet du projectile du point M au point M' à l'aide de la formule (5), *n*° 51

$$t'' = \frac{x''}{V'\cos\varphi''} \cdot \mathfrak{T}\left(\frac{\alpha x''}{c}, \frac{\alpha^2 V''^2\cos^2\varphi''}{r^2}\right);$$

Digitized by Google

la durée du trajet du projectile du point de départ O au point M' sera

$$t' + t''.$$

En coordonnées obliques, l'abscisse OP' du point M' est celle que l'on a choisie X'', et on aura l'ordonnée $M'P' = Y''$ du point M'

$$Y'' = Y' + (X'' - X') \sin \varphi' - y''.$$

L'angle de projection φ_2 déterminé de l'expression

$$\sin \varphi_2 = \frac{Y''}{X''}$$

correspondra à la portée horizontale

$$x_2 = X'' \cos \varphi_2.$$

L'angle de chute θ_2, la vitesse de chute v et la durée totale du trajet t_2 seront définis ($n°$ 79) par

$$\operatorname{tang} \theta_2 = \operatorname{tang} \varphi''' - \operatorname{tang} \varphi' + \operatorname{tang} \varphi_2,$$

$$v = \frac{V'' \cos \varphi'''}{\cos \theta_2},$$

$$t_2 = t' + t''.$$

3°. Pour calculer le troisième arc de la trajectoire sous l'angle de projection φ', on choisira une nouvelle valeur $X''' = OP''$; on aura pour l'abscisse horizontale $M'Q'' = x'''$ du point M''

$$x''' = (X''' - X'') \cos \varphi'.$$

On déterminera les valeurs de $\operatorname{tang} \varphi^{IV}$, de y''', de $V''' \cos \varphi^{IV}$, de t''' de la même manière que les valeurs correspondantes du deuxième arc de la trajectoire.

En coordonnées obliques l'abscisse OP'' du point M'' est celle que l'on a choisie X''', et on aura l'ordonnée $M''P'' = Y'''$ du point M''

$$Y''' = Y'' + (X''' - X'') \sin \varphi' - y'''.$$

L'angle de projection φ_3 déterminé de l'expression

$$\sin \varphi''' = \frac{Y'''}{X'''}$$

Digitized by Google

correspondra à la portée horizontale

$$x_3 = X''' \cos \varphi_3.$$

L'angle de chute θ_3, la vitesse de chute v et la durée totale du trajet t_3 seront définis par

$$\text{tang } \theta_3 = \text{tang } \varphi^{IV} - \text{tang } \varphi' + \text{tang } \varphi_3,$$

$$v = \frac{V''' \cos \varphi^{IV}}{\cos \theta_3}$$

$$t_3 = t' + t'' + t'''.$$

On continuera les calculs de la même manière.

81. *Application.* Dans le tableau suivant on a inséré les résultats du calcul de la trajectoire d'un boulet sphérique tiré d'un canon de $273^{m.m}$ sous l'angle de projection $\varphi' = 5°$, avec une vitesse initiale de $438^{m:s}$.

Le poids du boulet $P = 72^k,48$; son diamètre $2R = 0^m,2695$; on a pris $\Pi = \Pi_1$; $\frac{P}{2\pi R^2 g} = 64,71$; la vitesse initiale $V = 438^{m:s}$.

Trajectoire d'un boulet sphérique tiré du canon de $273^{m.m}$ sous l'angle de projection $\varphi' = 5°$, avec une vitesse initiale de $438^{m:s}$.

Abscisses suivant la tangente au point de départ. X		Distances verticales des points de la trajectoire à la tangente au point de départ. Y	Inclinaison de la trajectoire. θ'	Projections horizontales des vitesses. $v' \cos \theta$	Durées des trajets. $\Sigma t'$
Sagènes.	Mètres.	Mètres.		Mètr. sec.	Secondes.
152,3	324,9	3,00	3°54′	375	0,802
400	853	18,45	1°14′	303	2,381
700	1493	91,6	— 3°33′	250	4,711
1000	2134	222,5	— 10°11′	215	7,473
1300	2774	449,7	— 18°37′	187	10,700
1600	3414	774,1	— 28°30′	163	14,354

En admettant l'indépendance des angles de projection et des distances verticales des points de la trajectoire à la tangente au point de départ, on a calculé, d'après les résultats obtenus, la table suivante.

Digitized by Google

Table de tir direct du canon de 273$^{m.m}$ avec un boulet sphérique animé d'une vitesse initiale de 438$^{m:s}$.

Portées horizontales. x	Angles de projection. φ	Angles de chute. θ	Vitesses de chute. v	Durées. t
Mètres.			Mètr. sec.	Secondes.
324,9	32′	35′	375	0,802
858	1°39′	2° 7′	303	2,881
1491	3°31′	5° 2′	251	4,711
2128	5°59′	9°14′	217	7,473
2738	9° 9′	14°45′	198	10,700
3324	13° 6′	21°41′	176	14,354

On peut obtenir les angles de projection, les angles et les vitesses de chute et les durées qui correspondent aux portées équidistantes, d'après les données insérées dans cette table, à l'aide d'une interpolation graphique.

82. *Degré de précision des résultats obtenus.* Pour faire voir que la table de tir direct ainsi calculée a une précision suffisante, observons que les plus grandes erreurs doivent correspondre aux angles de projection de 32′ et de 13°6′, comme à ceux qui diffèrent le plus de l'angle de projection $\varphi' = 5^c$ sous lequel la trajectoire a été calculée par parties.

En remarquant que pour la portée 324^m,9 la vitesse de chute est près de 376$^{m:s}$ et par suite calculant pour cette portée l'angle de projection φ, l'angle de chute θ, la vitesse de chute v et la durée t, dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse, on trouve $\varphi = 0°32'$, $\theta = 0°35'$, $v = 376^{m:s}$, $t = 0{,}802$, valeurs très proches de celles qui sont insérées dans la table.

En calculant la trajectoire sous l'angle de projection 13°6′ et en la partageant dans ce but en trois arcs: le premier à partir du point de départ jusqu'au point où la vitesse est de 376$^{m:s}$, le second à partir de ce point jusqu'au point de la branche descendante où l'inclinaison de la trajectoire est égale et de signe contraire à l'inclinaison au point où la vitesse est de 376$^{m:s}$, et le troisième arc à partir du dernier point jusqu'au point à hauteur de la bouche à feu, on

Digitized by Google

trouve $x = 3375^{m.s}$, $\theta = 21°49'$, $v = 178^{m.s}$ et $t = 14''498$ des résultats qui ne diffèrent pas beaucoup de ceux qui sont insérés dans la table.

83. *Dans les cas ordinaires du tir direct l'angle de projection rapporté à la ligne qui va de la bouche à feu au point à battre, est sensiblement indépendant de l'élévation de ce point.* Quand les angles de projection ne sont pas grands, on peut poser $\alpha = 1$, et en appelant a la distance horizontale et b la distance verticale du but au point de départ, on mettra l'équation (7), $n°$ 50 de la trajectoire, quelle que soit la loi de la résistance de l'air, sous la forme

$$b = a \operatorname{tang} \varphi - g \int_0^a dx \int_0^a \psi(x, V_1)\, dx.$$

En représentant par ε l'angle d'élévation du but, c'est-à-dire l'angle que fait avec l'horizon la ligne qui va du point de départ au but, on a $\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{b}{a}$ et divisant les deux membres de l'équation de la trajectoire par a on obtient

$$\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \varepsilon = \frac{g}{a} \int_0^a dx \int_0^a \psi(x, V_1)\, dx,$$

ou

$$\frac{\sin(\varphi - \varepsilon)}{\cos \varphi . \cos \varepsilon} = \frac{g}{a} \int_0^a dx \int_0^a \psi(x, V_1)\, dx.$$

Pour de petites valeurs de φ, la projection horizontale V_1 de la vitesse initiale diffère peu de la vitesse initiale V, de sorte que l'on peut considérer le second membre de l'égalité comme indépendant de φ, et le produit $\cos \varphi . \cos \varepsilon$, qui entre dans le premier membre, différant, pour de petites valeurs de φ et de ε, peu de l'unité, on peut poser

$$\sin(\varphi - \varepsilon) = \frac{g}{a} \int_0^a dx \int_0^a \psi(x, V)\, dx.$$

Digitized by Google

Cette expression fait voir que l'angle $(\varphi - \varepsilon)$ formé par la tangente au point de départ avec la ligne qui va du point de départ au but, c'est-à-dire l'angle de projection rapporté à la ligne qui va du point de départ au but, est sensiblement indépendant de l'angle de l'élévation du but, ou de la hauteur du but.

C'est sur l'indépendance de l'angle $(\varphi - \varepsilon)$ et de la hauteur du but qu'est fondé le pointage des bouches à feu au moyen de la hausse.

84. *Cas où la vitesse de chute n'est pas inférieure à* $376^{m.s}$. Il faut dans ce cas calculer la trajectoire, sans la diviser en parties, dans l'hypothèse de la résistance (*n*° 52)

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc},$$

où, en posant $\Pi = \Pi_1$,

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}\pi R^2 g}$$

et, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités (*n*° 28),

$$\mathfrak{A} = 0{,}061.$$

Si la hauteur du but n'est pas considérable, on peut poser $\alpha = 1$, et en appelant a et b la distance horizontale et la verticale du but au point de départ, et ε l'angle d'élévation du but, on a $\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{b}{a}$ et l'équation (1), *n*° 52 donne

$$(\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \varepsilon) \cdot \cos^2 \varphi = \frac{ga}{2V^2} F\left(\frac{a}{c}\right)$$

ou

$$\sin(\varphi - \varepsilon) \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \varepsilon} = \frac{ga}{2V^2} F\left(\frac{a}{c}\right);$$

or, lorsque les angles φ et ε sont petits, on peut poser $\frac{\cos \varphi}{\cos \varepsilon} = 1$ et l'on obtient pour l'angle de projection rapporté à la ligne qui va du point de départ au but l'expression

$$\sin(\varphi - \varepsilon) = \frac{ga}{2V^2} F\left(\frac{a}{c}\right).$$

Digitized by Google

On aura l'angle de chute de la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{ga}{V^2\cos^2\varphi} F_1\left(\frac{a}{c}\right).$$

La vitesse de chute sera

$$v = \frac{V}{e^{\frac{a}{2c}}} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

On aura la durée

$$t = \frac{a}{V\cos\varphi} F_1\left(\frac{a}{2c}\right).$$

85. *Déterminer la vitesse initiale d'après celle que le projectile possède à une petite distance de la bouche à feu.* Si le point de la trajectoire où l'on connaît la vitesse v est à une petite distance de la bouche à feu, la valeur absolue de l'angle de projection φ diffère peu de celle de l'angle d'inclinaison θ en ce point, de sorte que l'on peut poser $\cos\varphi = \cos\theta$ et l'on obtient la vitesse initiale V, dans le cas où v n'est pas inférieure à $376^{m:s}$, de l'expression

$$V = v \cdot e^{\frac{a}{2c}},$$

ou en développant $e^{\frac{a}{2c}}$ en série et en négligeant devant l'unité les termes où $\frac{a}{2c}$ entre à la puissance seconde et aux puissances supérieures, on a

$$V = v\left(1 + \frac{a}{2c}\right).$$

86. *Pour des durées de trajets qui ne dépassent pas 0",15, la vitesse du projectile au point milieu du trajet est sensiblement égale au rapport de la longueur du trajet à sa durée.* Pour un trajet a, qui correspond à une pareille durée, la valeur absolue de l'angle d'inclinaison φ de la trajectoire à l'origine du trajet diffère peu de celle de l'angle d'inclinaison θ à la fin du trajet, de sorte qu'on peut poser $\cos\varphi = \cos\theta$, et appelant V la vitesse du projectile à l'origine

Digitized by Google

du trajet,. on a, si cette vitesse est supérieure à $376^{m:s}$, l'expression suivante de la durée t du trajet a

$$t = \frac{a}{V} F_1\left(\frac{a}{2c}\right),$$

et la vitesse du projectile au milieu du trajet a sera

$$v = \frac{V}{e^{\frac{a}{4c}}}.$$

En éliminant V entre les deux équations, on obtient

$$v = \frac{a}{t} \cdot \frac{F_1\left(\frac{a}{2c}\right)}{e^{\frac{a}{4c}}},$$

ou si l'on observe ($n°$ 52) que $F_1\left(\frac{a}{2c}\right) = \frac{e^{\frac{a}{2c}} - 1}{\frac{a}{2c}}$ et qu'on développe $F_1\left(\frac{a}{2c}\right)$ et $e^{\frac{a}{4c}}$ en séries, en négligeant devant l'unité les termes où $\frac{a}{2c}$ entre à des puissances supérieures à la troisième, on aura la vitesse au milieu du trajet a

$$v = \frac{a}{t}\left[1 + \tfrac{1}{24}\left(\frac{a}{2c}\right)^2\right].$$

Cette formule sert à prouver qu'en mesurant des durées qui ne dépassent pas les limites de 0;10 à 0;15 on peut, sans erreur sensible, prendre le rapport de la longueur du trajet à sa durée pour la vitesse du projectile au milieu du trajet.

§ II.

TIR DIRECT À VITESSES INITIALES INFÉRIEURES A $376^{m:s}$.

87. *Exposé.* Quand la vitesse initiale est inférieure à $376^{m:s}$, on doit calculer la trajectoire dans l'hypothèse de la résistance ($n°$ 51)

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc}\left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right],$$

Digitized by Google

où, en posant $\Pi = \Pi_1$,

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}\pi R^2 g}$$

et, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités (*n*° 28),

$$\mathfrak{A} = 0{,}012\,;\ r = 186^{m.s}.$$

Le tir direct ayant lieu en général sous des angles de projection qui ne dépassent pas 15°, on peut calculer la trajectoire sans la diviser en parties, et poser $\alpha = 1$, quand les angles de projection sont compris entre 0 et 8°, et $\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tang}\varphi}$, quand les angles de projection dépassent 8°.

On résout dans ce cas les problèmes sur le tir direct à l'aide des formules insérées dans la section: tir courbe à faibles charges.

88. *Déterminer la portée connaissant l'angle de projection et la vitesse initiale.*

Le point de chute étant à une hauteur b au-dessus de la bouche à feu, on aura la portée a à l'aide de la formule (*n*° 70)

$$\frac{c}{\alpha}.\operatorname{tang}\varphi.z - \frac{gc^2}{2\alpha^2 V_1^2}.\mathfrak{P}\left(z, V_0^2\right).z^2 = b,$$

où $z = \frac{\alpha a}{c}$, $V_0^2 = \left(\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2$.

En essayant successivement plusieurs valeurs de z, prises dans la table des valeurs de $\mathfrak{P}(z, V_0^2)$, on trouvera deux valeurs du premier membre de l'équation, assez rapprochées, entre lesquelles est comprise la valeur de b, et on aura la valeur cherchée de z au moyen de parties proportionnelles; on obtiendra la portée en multipliant z par $\frac{c}{\alpha}$.

Le point de chute étant à hauteur de la bouche à feu, on aura la portée x à l'aide de la formule (*n*° 66)

$$z\mathfrak{P}\left(z, V_0^2\right) = \frac{\alpha}{c}.\frac{V^2}{g}.\sin 2\varphi,$$

où $z = \frac{\alpha x}{c}$, $V_0^2 = \left(\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2$.

Digitized by Google

Après avoir calculé la valeur du second membre de l'équation, on trouvera la valeur de z à l'aide de la table des $z.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$, comme on l'a exposé au $n°$ 60. En multipliant z par $\frac{c}{\alpha}$ on aura la valeur de la portée cherchée.

89. *Déterminer la vitesse initiale d'un projectile, tiré sous un angle de projection donné* φ, *qui doit toucher un point donné* (a, b). On déterminera la vitesse initiale à l'aide de la formule ($n°$ 71)

$$V_0 = \sqrt{\frac{F(z)}{Q - F(z) + 1}},$$

où $z = \frac{aa}{c}$, $Q = \frac{2r^2}{a^2} \cdot \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varepsilon}{ga}$, $tg\varepsilon = \frac{b}{a}$.

Après avoir calculé la valeur de V_0, à l'aide de la table de $F(z)$, on obtiendra la valeur de la vitesse initiale cherchée V, en multipliant V_0 par $\frac{r}{a\cos\varphi}$.

Si le point à battre est à hauteur de la bouche à feu, on a $b = 0$ et $\varepsilon = 0$.

90. *Déterminer l'angle de projection* φ *sous lequel un projectile, tiré avec une vitesse initiale donnée* V, *doit toucher un point donné* (a, b). On a pour déterminer l'angle de projection φ l'équation ($n°$ 72)

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{V^2}{ga\mathfrak{P}(z, V_0^2)} - \sqrt{\frac{V^2}{ga^2\mathfrak{P}(z, V_0^2)}\left[\frac{V^2}{g\mathfrak{P}(z, V_0^2)} - 2b\right] - 1},$$

où l'on n'a conservé devant le radical que le signe moins, puisque le tir n'a lieu que sous de petits angles de projection. On calculera d'abord la valeur approchée de φ en posant $z = \frac{a}{e}$, $V_0^2 = \frac{V^2}{r^2}$, et puis, s'il le faut, une valeur plus précise, en cherchant α qui correspond à la valeur trouvée de φ et en posant $z = \frac{aa}{c}$, $V_0^2 = \frac{\alpha^2 V^2 \cos^2\varphi}{r^2}$.

Si le point de chute est à hauteur de la bouche à feu, on a ($n°$ 72)

$$\sin 2\varphi = \frac{gx}{V^2}\mathfrak{P}(z, V_0^2)$$

Digitized by Google

et l'on calculera d'abord la valeur approchée de φ en posant $z = \frac{x}{c}$, $V_0^2 = \frac{V^2}{r^2}$, et puis, s'il le faut, une valeur plus précise, en cherchant α qui correspond à la valeur trouvée de φ et en posant $z = \frac{ax}{c}$, $V_0^2 = \frac{a^2 V^2 \cos^2\varphi}{r^2}$.

91. *Déterminer l'angle et la vitesse de chute et la durée du trajet.*

L'angle de chute est donné par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{gx}{V_1^2}\mathfrak{J}(z, V_0^2).$$

La vitesse de chute est donnée par la formule

$$v = \frac{V}{\mathcal{V}(z, V_0^2)} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

La durée du trajet est donnée par la formule

$$t = \frac{x}{V_1}\mathfrak{C}(z, V_0^2).$$

92. *Déterminer la vitesse initiale d'après celle que le projectile possède à une petite distance a de la bouche à feu.* Si le point de la trajectoire où l'on connaît la vitesse v est à une petite distance de la bouche à feu, la valeur absolue de l'angle de projection φ diffère peu de l'angle d'inclinaison θ en ce point, de sorte que l'on peut poser $\cos\varphi = \cos\theta$, et l'on obtient la vitesse initiale V, dans le cas où v est inférieure à $376^{m:s}$, de l'expression

$$V = v.\mathcal{V}\left(\frac{a}{c}, \frac{V^2}{r^2}\right)$$

et comme (n° 51)

$$\mathcal{V}\left(\frac{a}{c}, \frac{V^2}{r^2}\right) = \sqrt{\left(1 + \frac{V^2}{r^2}\right)e^{\frac{a}{c}} - \frac{V^2}{r^2}},$$

on a

$$V = v\sqrt{\frac{e^{\frac{a}{c}}}{1 - \frac{v^2}{r^2}\left(e^{\frac{a}{c}} - 1\right)}}.$$

Digitized by Google

En développant $e^{\frac{a}{c}}$ en série et en se bornant aux membres où $\frac{a}{c}$ entre à la première puissance, on obtient

$$V = v\left[1 + \frac{a}{2c}\left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right)\right].$$

93. *Déterminer l'angle de projection rapporté à la ligne qui va de la bouche à feu au but, lorsque l'élévation du but et l'angle de projection ne sont pas considérables.* L'expression de l'angle de projection d'un projectile qui doit atteindre un objet situé à une distance et à une hauteur déterminées au-dessus de la bouche à feu (*n*° 90) est plus compliquée que dans le cas où l'objet à battre est à la même hauteur; mais elle peut devenir aussi simple dans les cas ordinaires, ceux où l'angle d'élévation du but et l'angle de projection ne sont pas grands. Dans ce cas, on peut poser $\alpha = 1$. En appelant a et b la distance horizontale et la verticale du but au point de départ et ε l'angle d'élévation du but, on a $\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{b}{a}$, et l'équation (1), *n*° 51, après la substitution de $y = b$, $x = a$ et la division des deux membres par a, donne

$$(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varepsilon)\cos^2\varphi = \frac{ga}{2V^2}\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, \frac{V_1^2}{r^2}\right),$$

ou

$$\sin(\varphi - \varepsilon).\frac{\cos\varphi}{\cos\varepsilon} = \frac{ga}{2V^2}\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, \frac{V_1^2}{r^2}\right);$$

or lorsque les angles ε et φ sont petits, on peut poser $\frac{\cos\varphi}{\cos\varepsilon} = 1$ et $\frac{V_1^2}{r^2} = \frac{V^2}{r^2}$, et l'on a sensiblement

$$\sin(\varphi - \varepsilon) = \frac{ga}{2V^2}\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, \frac{V^2}{r^2}\right)$$

pour l'expression de l'angle de projection rapporté à la ligne qui va de la bouche à feu au but — expression indépendante de l'angle d'élévation du but, ainsi qu'on devait s'y attendre (*n*° 83).

94. *Relation entre les hauteurs des hausses, les angles de projection et les angles d'élévation du but.* Soit O (fig. 11) le centre de la tranche de la volée et en même temps le point de départ du pro-

Digitized by Google

jectile; OA le prolongement de l'axe de la bouche à feu que l'on suppose coïncider avec la tangente à la trajectoire au point de départ; M le point à battre, P sa projection sur l'horizontale OP; CB la hauteur du bouton latéral de mire au-dessus de l'axe de la bouche; ED la hauteur au-dessus de l'axe de la bouche du point à partir duquel on compte les hauteurs de la hausse latérale. Le prolongement de la droite MB détermine la hauteur FE de la hausse qui convient à la distance OM. On mène BG parallèle à l'axe AD. L'angle FID que fait la ligne de mire FM avec l'axe de la bouche, angle égal à celui FBG, est l'angle de mire.

L'angle de mire m est déterminé au moyen de l'angle de projection $AOP = \varphi$, de l'angle d'élévation du but $MOP = \varepsilon$ et de l'angle $OMB = i$, sous lequel les points O et B sont vus du but; le triangle IOM donne $AOM = AIM + OMB$, ou $\varphi - \varepsilon = m + i$, d'où

$$m = \varphi - \varepsilon - i.$$

L'angle i, ayant son sommet au but et s'appuyant sur les points O et B, étant toujours assez petit, on peut le négliger et poser

$$m = \varphi - \varepsilon,$$

c'est-à-dire admettre que l'angle de mire est égal à l'angle de projection rapporté à la ligne qui va de la bouche à feu au but.

En représentant BC par r, ED par R, la distance du bouton de mire à la hausse BG par l, la hauteur de la hausse FE par h, on aura du triangle FBG

$$FG = BG \,.\, \text{tang}\, m,$$

ou

$$h + R - r = l \,.\, \text{tang}\, m,$$

d'où

$$h = l \,.\, \text{tang}\, m - (R - r),$$

ou bien

$$h = l \,.\, \text{tang}\, (\varphi - \varepsilon) - (R - r).$$

Si $BC = ED$, c'est-à-dire si $R = r$, comme cela a lieu pour

Digitized by Google

toutes nos bouches à feu rayées et pour la plupart des bouches à feu lisses, on a

$$h = l \,.\, \text{tang}\,(\varphi - \varepsilon).$$

95. *Relation entre les déplacements latéraux de la hausse et les déviations latérales des projectiles.* Si la trajectoire est comprise dans le plan vertical passant par l'axe de la bouche à feu et si la bouche est munie d'une hausse latérale, il faut, pour atteindre (fig. 12) le point M qui se trouve dans ce plan, déplacer la hausse à droite d'une quantité

$$Ff = FB \,.\, \text{tang}\, FBf, \text{ ou } Ff = FB \,.\, \text{tang}\, OMB.$$

Mais l'angle OMB ayant son sommet au but et s'appuyant sur les points O et B est toujours assez petit, de manière qu'on peut le négliger, et l'on ne munit pas de point de visée mobile les hausses latérales des bouches à feu lisses.

Si la trajectoire du projectile est à double courbure (comme celle des projectiles oblongs) et la déviation latérale du projectile à la distance $OM = a$ est $MM' = \varepsilon$, il faut pour atteindre le point M dévier la bouche à feu de l'angle MOM' en déplaçant latéralement le point de visée mobile de la hausse d'une quantité $Ff' = FB \,.\, \frac{nM'}{nB}$. En représentant Ff' par $\mathfrak{d}$, posant, sans erreur sensible, $nM' = MM' = \varepsilon$, $nB = MO = a$, et observant (fig. 11) que $FB = \sqrt{l^2 + [h + R - r]^2}$, on obtient

$$\mathfrak{d} = \frac{\varepsilon}{a} \sqrt{l^2 + [h + R - r]^2}.$$

Si $R = r$ et si h est petit en comparaison de l, on a pour le déplacement latéral du point de visée de la hausse

$$\mathfrak{d} = \frac{\varepsilon}{a} \cdot l.$$

96. *Erreur due au pointage.* En représentant par Δh l'erreur dans la hauteur de la hausse, par $\Delta\mathfrak{d}$ l'erreur dans le déplacement latéral du point de visée de la hausse, et par a la distance du but, on aura approximativement

Digitized by Google

la distance verticale Δy du projectile au but

$$\Delta y = a \cdot \frac{\Delta h}{l},$$

et la distance latérale Δz du projectile au but

$$\Delta z = a \cdot \frac{\Delta \mathfrak{H}}{l}.$$

97. *Erreur due à l'inclinaison des tourillons.* Si la bouche à feu tourne autour de l'axe de l'âme et le tourillon de gauche s'élève de telle sorte que son axe fait un angle α avec la position primitive et horizontale (fig. 13), le sommet du bouton de mire B et le point G (fig. 11) décriront aussi un angle α et se déplaceront en G' sur la figure 13; la hausse dont la direction coïncidait avec FEG perpendiculaire à l'axe de la bouche et à celui des tourillons avant leur rotation, se déplacera en $F'E'G'$, qui sera perpendiculaire à l'axe de la bouche et à la nouvelle position de l'axe des tourillons, la hauteur $F'G'$ étant égale à FG. Pour qu'il n'y ait pas d'erreur dans le pointage par suite de l'inclinaison de l'axe des tourillons, il serait nécessaire que la hausse, nonobstant l'inclinaison de l'axe des tourillons, fût comprise dans le plan vertical parallèle à l'axe de la bouche et passant par le sommet du bouton de mire déplacé, c'est-à-dire que la direction de la hausse coïncidât sur la figure 13 avec $F''G'$. Mais la hausse s'étant déplacée en $F'E'$, il en résulte une erreur $\Delta \mathfrak{H}$ dans le déplacement latéral de la hausse égale à $F'f$ et une erreur Δh dans la hauteur de la hausse égale à $F''f$, et

$$\Delta \mathfrak{H} = F'f = F'G' \cdot \sin \alpha = (h + R - r) \sin \alpha,$$

$$\Delta h = F''f = F'G'(1 - \cos \alpha) = 2F'G' \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2(h + R - r) \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Donc, si l'on pointe une bouche à feu, lorsque le tourillon de gauche est au-dessus de celui de droite, sans avoir fait les corrections correspondantes dans la hausse, le projectile touchera ($n°$ 96) un point situé approximativement à droite du but d'une quantité

$$\Delta z = \frac{a}{l}(h + R - r) \sin \alpha$$

Digitized by Google

et au-dessous du but d'une quantité

$$\Delta y = \frac{a}{l}\,(h + R - r).\,2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Pour le canon obusier de 12[l] lisse, on a $R = r$, $l = 1^m,732$. Soit une roue de son affût au-dessus de l'autre de $0^m,152$; l'écartement des roues étant de $1^m,473$, on a $\sin\alpha = \frac{152}{1473}$ et $\alpha = 5°57'$. Pour un tir à boulet avec une charge de $1^k,126$ de poudre à canon, à une distance de 850^m, la hauteur de la hausse est $h = 0^m,0864$. On aura l'erreur due à l'inclinaison des tourillons

$$\Delta z = 4^m,5,$$

$$\Delta y = 0^m,2.$$

Pour le canon rayé de 4[l] on a $R = r$, $l = 0^m,724$. Soit une roue de son affût au-dessus de l'autre de $0^m,152$; l'écartement des roues étant de $1^m,473$, on a $\sin\alpha = \frac{152}{1473}$ et $\alpha = 5°57'$. Pour un tir à obus avec une charge de $0^k,614$ de poudre à canon, à une distance de 850^m, la hauteur de la hausse est $h = 0^m,0343$. On aura l'erreur due à l'inclinaison des tourillons

$$\Delta z = 3^m,8,$$

$$\Delta y = 0^m,2.$$

A la distance de 1700^m, la hauteur de la hausse est $h = 0^m,0762$, et on aura l'erreur due à la même inclinaison des tourillons

$$\Delta z = 18^m,6,$$

$$\Delta y = 1^m,1.$$

IV. Tir plongeant.

98. *Exposé.* Dans le tir direct et le tir courbe on a pour but de toucher un point donné, et, pour satisfaire à cette condition, on détermine l'angle de projection pour une vitesse initiale donnée, ou la vitesse initiale pour un angle de projection donné. Dans le tir

Digitized by Google

plongeant, la trajectoire doit satisfaire à deux conditions (le projectile doit passer par deux points donnés, ou bien par un point donné sous une inclinaison donnée), et pour que ces conditions soient obtenues, il est indispensable que la vitesse initiale et l'angle de projection aient des valeurs déterminées.

Dans la plupart des cas du tir plongeant, la vitesse initiale est inférieure à $376^{m:s}$; par suite, nous nous occuperons de la solution des problèmes qui s'y rapportent dans l'hypothèse de la résistance de l'air ($n°$ 51)

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc}\left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right],$$

où, en posant $\Pi = \Pi_1$,

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}_0 \pi R^2 g}$$

et, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités,

$$\mathfrak{A}_0 = 0{,}012\,;\ r = 186^{m:s}.$$

Lorsque les vitesses sont considérables, le tir plongeant a lieu sous de petits angles de projection, et même lorsque les vitesses sont petites, les angles de projection ne dépassent pas ordinairement 15°. Par suite, dans les formules du $n°$ 51 qui servent à la solution des problèmes sur le tir plongeant on posera $\alpha = 1$.

99. *Déterminer la vitesse initiale et l'angle de projection d'un projectile qui doit passer par deux points donnés.* Soit a et b la distance horizontale et la verticale de l'un des points à la bouche à feu, a' et b' celles de l'autre point; V et φ étant la vitesse initiale et l'angle de projection cherchés.

Puisque la trajectoire doit passer par le point dont les coordonnées sont a et b, on aura

$$b = a \operatorname{tang} \varphi - \frac{ga^2}{2V_1^2}\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right),$$

d'où

$$\operatorname{tang} \varphi - \frac{b}{a} = \frac{ga}{2V_1^2}\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right).$$

Digitized by Google

De même puisque le second point doit aussi se trouver sur la trajectoire, on aura

$$\text{tang}\,\varphi - \frac{b'}{a'} = \frac{ga'}{2V_1^2}\,\mathfrak{P}\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right);$$

retranchant ces deux équations membre à membre, on aura

$$\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'} = \frac{g}{2V_1^2}\left[a'\mathfrak{P}\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) - a\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)\right]$$

ou

$$\frac{2r^2}{g}\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right).\ V_0^2 = a'\mathfrak{P}\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) - a\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}\,V_0^2\right).$$

Faisant pour abréger

$$\frac{2r^2}{g}\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right) = Q,$$

et observant que

$$\mathfrak{P}\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) = \left(1 + V_0^2\right)F\left(\frac{a'}{c}\right) - V_0^2;\ \mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) = \left(1 + V_0^2\right)F\left(\frac{a}{c}\right) - V_0^2,$$

on obtient

$$V_0 = \sqrt{\frac{a'F\left(\frac{a'}{c}\right) - aF\left(\frac{a}{c}\right)}{Q - \left[a'F\left(\frac{a'}{c}\right) - aF\left(\frac{a}{c}\right)\right] + (a' - a)}}.$$

Connaissant V_0 on déterminera la valeur de la fonction $\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)$ et celle de $\mathfrak{P}\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right)$; alors, en divisant l'une par l'autre les expressions de $\text{tang}\,\varphi - \frac{b}{a}$ et de $\text{tang}\,\varphi - \frac{b'}{a'}$, on aura pour la valeur de φ

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{a'\mathfrak{P}\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right).\frac{b}{a} - a\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right).\frac{b'}{a'}}{a'\mathfrak{P}\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) - a\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)}.$$

Connaissant φ, on déduira V, en multipliant V_0 par $\frac{r}{\cos\varphi}$.

100. *Déterminer la vitesse initiale et l'angle de projection d'un projectile qui doit passer par un point donné sous une incli-*

Digitized by Google

naison donnée. Soit a et b la distance horizontale et la verticale du point donné à la bouche à feu, et θ l'inclinaison de la trajectoire en ce point.

La trajectoire devant passer par le point dont les coordonnées sont a et b, on devra avoir

$$b = a \operatorname{tang} \varphi - \frac{ga^2}{2V_1^2} \mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right),$$

d'où, en faisant $\frac{b}{a} = \operatorname{tang} \varepsilon$,

$$\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \varepsilon = \frac{ga}{2V_1^2} \mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right).$$

La trajectoire devant avoir au point donné l'inclinaison θ, on aura (n° 51, éq. 2).

$$\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \theta = \frac{ga}{V_1^2} \mathfrak{J}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right).$$

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on aura

$$\operatorname{tang} \varepsilon - \operatorname{tang} \theta = \frac{ga}{2V_1^2}\left[2\mathfrak{J}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) - \mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)\right],$$

ou

$$\frac{2r^2}{ga}\left(\operatorname{tang} \varepsilon - \operatorname{tang} \theta\right). V_0^2 = 2\mathfrak{J}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) - \mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right).$$

Faisant pour abréger

$$\frac{2r^2}{ga}\left(\operatorname{tang} \varepsilon - \operatorname{tang} \theta\right) = Q,$$

et observant que

$$\mathfrak{J}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) = \left(1 + V_0^2\right) F_1\left(\frac{a}{c}\right) - V_0^2 ; \mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) = \left(1 + V_0^2\right) F\left(\frac{a}{c}\right) - V_0^2,$$

on obtient

$$V_0 = \sqrt{\frac{2F_1\left(\frac{a}{c}\right) - F\left(\frac{a}{c}\right)}{Q + 1 - \left[2F_1\left(\frac{a}{c}\right) - F\left(\frac{a}{c}\right)\right]}}.$$

Digitized by Google

Connaissant V_0, on calculera $\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)$ et $\mathfrak{I}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)$; puis en divisant l'expression tang φ — tang ε par celle de tang φ — tang θ, on aura pour la valeur de φ

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{2\,\text{tang}\,\varepsilon\,.\,\mathfrak{I}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) - \text{tang}\,\theta\,.\,\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)}{2\,\mathfrak{I}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) - \mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)}.$$

Connaissant φ, on aura V en multipliant V_0 par $\frac{r}{\cos\varphi}$.

Dans le cas du tir plongeant l'angle θ est négatif, et si l'on représente sa valeur par $-\theta_1$, il faudra substituer $-\theta_1$ à θ dans toutes les formules de ce numéro.

101. *Limite de la hauteur à laquelle on peut raser la crête d'un parapet sous une inclinaison donnée.* Soit φ le plus grand angle de projection qu'on peut obtenir de la bouche à feu montée sur son affût, a la distance du but, b la plus grande hauteur qu'il peut avoir, pour que l'inclinaison de la trajectoire en ce point soit θ. La trajectoire devant passer par le point (a, b), on a

$$b = a\,\text{tang}\,\varphi - \frac{ga^2}{2V_1^2}\,\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right).$$

L'inclinaison de la trajectoire au point (a, b) étant θ, on a

$$\text{tang}\,\theta = \text{tang}\,\varphi - \frac{ga}{V_1^2}\,\mathfrak{I}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right);$$

cette équation donne

$$\frac{r^2}{ag}\left(\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\theta\right).\,V_0^2 = \mathfrak{I}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right);$$

posant pour abréger

$$\frac{r^2}{ag}\left(\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\theta\right) = Q$$

Digitized by Google

et observant que $\mathfrak{I}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) = \left(1 + V_0^2\right) F_1\left(\frac{a}{c}\right) - V_0^2$, on obtient

$$V_0 = \sqrt{\frac{F_1\left(\frac{a}{c}\right)}{Q + F_1\left(\frac{a}{c}\right) - 1}}.$$

Connaissant V_0, on détermine V en multipliant V_0 par $\frac{r}{\cos\varphi}$ et on trouve $\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)$. On obtient la valeur de b au moyen de l'équation

$$b = a \operatorname{tang}\varphi - \frac{ga^2}{2V_1^2}\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right).$$

Dans le cas du tir plongeant l'angle θ est négatif, et si l'on représente sa valeur par $-\theta_1$, il faudra substituer $-\theta_1$ à θ dans toutes les formules de ce numéro.

102. *Limite de la hauteur à laquelle on peut, en rasant la crête d'un parapet, toucher un point donné du terre-plein.* Soient a et b les coordonnées de la crête du parapet; α la distance horizontale du point du terre-plein à la crête du parapet, β sa hauteur relative au-dessous de la crête. Le projectile devant raser la crête du parapet et toucher le point donné du terre-plein, on a, en faisant $a' = a + \alpha$,

$$b = a \operatorname{tang}\varphi - \frac{ga^2}{2V_1^2}\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right),$$

$$b - \beta = a' \operatorname{tang}\varphi - \frac{ga'^2}{2V_1^2}\mathfrak{P}\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right).$$

Retranchant ces deux équations membre à membre, on trouve

$$\beta = \frac{g}{2V_1^2}\left[a'^2\mathfrak{P}\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) - a^2\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)\right] - (a' - a)\operatorname{tang}\varphi,$$

ou

$$\frac{2r^2}{g}\left[\beta + (a' - a)\operatorname{tang}\varphi\right].\ V_0^2 = a'^2\mathfrak{P}\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) - a^2\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right).$$

Posant pour abréger

$$\frac{2r^2}{g}\left[\beta + (a' - a)\operatorname{tang}\varphi\right] = Q$$

Digitized by Google

et observant que

$$\mathfrak{P}\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) = \left(1 + V_0^2\right) F\left(\frac{a'}{c}\right) - V_0^2 ; \mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) = \left(1 + V_0^2\right) F\left(\frac{a}{c}\right) - V_0^2,$$

on obtient

$$V_0 = \sqrt{\frac{a'^2 F\left(\frac{a'}{c}\right) - a^2 F\left(\frac{a}{c}\right)}{Q - \left[a'^2 F\left(\frac{a'}{c}\right) - a^2 F\left(\frac{a}{c}\right)\right] + (a'^2 - a^2)}}.$$

Connaissant V_0, on détermine V en multipliant V_0 par $\frac{r}{\cos \varphi}$ et on trouve $\mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)$. On obtient la valeur de b au moyen de l'équation

$$b = a \operatorname{tang} \varphi - \frac{g a^2}{2 V_1^2} \mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right).$$

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

MOUVEMENT DES PROJECTILES OBLONGS DANS L'AIR.

§ I.

MOUVEMENT DE ROTATION DES PROJECTILES OBLONGS.

103. *Équations du mouvement de rotation d'un corps solide.* Le mouvement d'un projectile oblong, comme celui d'un corps solide, peut être décomposé en un mouvement de translation de son centre de gravité et en un mouvement de rotation du projectile autour de son centre de gravité. Examinons d'abord le mouvement de rotation du projectile en supposant son centre de gravité immobile.

Le mouvement de rotation d'un corps solide est déterminé par les trois équations d'Euler. L'origine des coordonnées y est supposée au centre de gravité du corps et les axes des coordonnées sont les axes principaux centrals du corps. Toutes les forces extérieures sont composées en une seule force passant par le centre de gravité du corps et en un seul couple.

Pour obtenir les équations du mouvement de rotation du corps, on doit égaler la somme de l'expression générale de la projection de l'axe du couple des forces tangentielles sur chacun des axes principaux et de celle de la projection de l'axe du couple des forces centripètes sur le même axe, à la projection de l'axe du couple des forces extérieures sur le même axe principal.

En représentant par A, B, C les moments d'inertie du corps autour des axes principaux x, y, z, par θ la vitesse angulaire du corps

Digitized by Google

autour d'un axe instantané, par p, q, r les projections de cette vitesse sur les axes principaux, et par L, M, N les projections de l'axe du couple des forces extérieures sur les mêmes axes, on aura pour les équations générales du mouvement de rotation d'un corps solide

$$A\frac{dp}{dt} + (B - C)\,qr = L,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (C - A)\,pr = M,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (A - B)\,pq = N.$$

Un projectile oblong étant un corps de révolution, l'un de ses axes principaux est son axe de figure, et l'on peut prendre pour les deux autres deux perpendiculaires quelconques situées dans le plan équatorial du projectile, car ses moments d'inertie autour de tous les axes situés dans ce plan sont égaux entre eux. Ces moments d'inertie sont plus grands que celui autour de l'axe de figure du projectile. Prenant l'axe de figure du projectile pour l'axe des x, on a

$$B = C \text{ et } B > A.$$

104. *Projections de l'axe du couple de la résistance de l'air sur les axes principaux d'un projectile oblong.* Dans le mouvement des projectiles oblongs l'accroissement de pression sur certaines parties de leur surface et la diminution sur d'autres, qui se produisent suivant que ces parties ont un mouvement de rotation dans un sens contraire au mouvement de translation ou dans le même sens que ce dernier — cette augmentation et cette diminution de pression ($n°$ 5) ne peuvent être bien grandes. En en faisant abstraction, ainsi que du frottement de l'air contre la surface du projectile, on n'a à considérer, parmi les forces extérieures qui agissent sur le projectile pendant son mouvement dans l'air, que celle de la gravité et celle de la résistance qui s'exerce normalement sur chaque élément de la surface du projectile, soumis à l'action de la résistance. La force de la gravité, comme appliquée au centre de gravité du projectile, ne donne point de couple, et la résistance de l'air donne un couple dont l'axe

Digitized by Google

est perpendiculaire à celui de figure du projectile et à la tangente de la trajectoire.

Rapportons le projectile et ses axes principaux mobiles Ox, Oy, Oz (fig. 14), dont l'axe Ox est celui de figure, aux axes fixes rectangulaires Ox_1, Oy_1, Oz_1, dont l'axe Ox_1 coïncide avec la tangente de la trajectoire, en la supposant d'abord immobile. La ligne ON d'intersection des plans yOz et y_1Oz_1, étant perpendiculaire à l'axe de figure Ox et à la tangente Ox_1, représentera la direction de l'axe du couple de la résistance de l'air. Cet axe sera dirigé dans le sens de ON, car dans les projectiles oblongs le couple de la résistance de l'air ($n°$ 18) tend à éloigner l'axe de figure Ox de la tangente Ox_1*). Appelant K la grandeur de cet axe et η l'angle NOy, on trouve que les projections de cet axe sur les axes principaux du projectile Ox, Oy, Oz sont zéro, $K\cos\eta$ et $-K\sin\eta$.

105. *Expression du couple de la résistance de l'air, quand l'angle δ que fait l'axe de figure du projectile avec la tangente n'est pas grand.* En représentant par ρ_A la composante de la résistance de l'air dans le sens contraire à celui de l'axe de figure du projectile, par ρ_B la composante de cette résistance perpendiculaire à l'axe de figure et située dans le plan passant par l'axe de figure et la tangente, et par ∂ la distance du centre de la résistance au centre de gravité du projectile — distance exprimée en parties du rayon R du projectile, on aura pour le couple K de la résistance l'expression

$$K = \partial . R . \rho_B$$

et comme ($n°$ 17)

$$\rho_B = \frac{Y}{X} \cdot \rho_A ,$$

on a

$$K = \frac{Y}{X} \cdot \partial . R . \rho_A .$$

*) Nous compterons comme positifs les axes des couples et les axes des rotations disposés de manière qu'un spectateur, appuyé contre l'axe et ayant les pieds à l'origine de l'axe, voie la rotation se produire devant lui de droite à gauche.

Digitized by Google

Sur la figure 5 sont tracées les courbes de $\frac{X}{X_0}$, de $\frac{Y}{X_0}$ et de ∂ pour les projectiles semblables à notre obus de 4^1 à chemise en plomb, les angles δ étant pris pour abscisses et les valeurs de $\frac{X}{X_0}$, $\frac{Y}{X_0}$ et ∂ pour ordonnées. On a construit sur la figure 15 la courbe des valeurs de $\frac{Y}{X} \cdot \partial$ qui correspondent à différents angles δ, pour les projectiles semblables à notre obus de 4^1. Cette figure fait voir que quand les angles δ sont petits, ce qui a toujours lieu dans le cas du tir direct, la relation entre les valeurs de $\frac{Y}{X} \cdot \partial$ et les angles δ peut être représentée par

$$\frac{Y}{X} \cdot \partial = h \sin \delta,$$

où, pour les projectiles semblables à notre obus de 4^1, on a

$$h = 2{,}7.$$

La courbe exprimée par cette équation est représentée sur la figure 15 par des traits interrompus.

En mettant la valeur de $\frac{Y}{X} \cdot \partial$ dans l'expression du couple K, on a

$$K = h \,.\, R \,.\, \rho_A \sin \delta.$$

106. *Équations du mouvement de rotation d'un projectile oblong.* Il suit de ce qui a été énoncé que les équations du mouvement de rotation d'un projectile oblong peuvent être mises sous la forme

$$\text{(I).} \begin{cases} A \frac{dp}{dt} = 0, \\ B \frac{dq}{dt} + (B - A) pr = hR\rho_A \sin \delta \,.\, \cos \eta, \\ B \frac{dr}{dt} - (B - A) pq = - hR\rho_A \sin \delta \,.\, \sin \eta. \end{cases}$$

En intégrant ces équations, nous supposerons qu'au moment à partir duquel sont comptées les durées, le plan qui passe par l'axe de figure et la tangente coïncide avec le plan fixe ε, Ox_1, que l'axe

Digitized by Google

de figure fait à ce moment l'angle δ_0 avec la tangente fixe Ox_1, et que c'est dès lors qu'agit le couple de la résistance $K = hR\varrho_A \sin\delta$, dans lequel nous considérerons ϱ_A comme constante.

La position des axes principaux du projectile par rapport aux axes fixes des coordonnées est entièrement déterminée, lorsqu'on connaît (fig. 14) l'angle $xOx_1 = \delta$, l'angle $yON = \eta$ situé dans le plan zOy et l'angle $y_1ON = \nu$ situé dans le plan y_1Oz_1.

En décrivant du point O comme centre une sphère d'un rayon égal à l'unité, on aura: 1) l'angle dièdre $y_1Ny = \delta$ que font entre eux les deux plans zOy et z_1Oy_1, angle compté à partir du plan z_1Oy_1 et mesuré par l'arc x_1x; 2) l'arc $Ny = \eta$ qui mesure l'angle dièdre x_1xz' formé par les plans x_1Ox et $z'Ox$ et compté à partir du plan x_1Ox; 3) l'arc $y_1N = \nu$ qui mesure l'angle dièdre z_1x_1x formé par les plans z_1Ox_1 et xOx_1 et compté à partir du plan z_1Ox_1.

La rotation du corps autour d'un axe quelconque peut être produite par trois rotations successives autour de trois axes qui ne sont pas parallèles à un même plan. On peut prendre pour ces axes ou bien les trois axes principaux du corps x, y, z, ou bien les droites ON, Ox et Ox_1. Les vitesses angulaires autour des trois axes principaux sont p, q, r; les vitesses angulaires autour des axes ON, Ox, Ox_1 sont $\frac{d\delta}{dt}$, $-\frac{d\eta}{dt}$, *) $\frac{d\nu}{dt}$. En décomposant chacune des trois dernières vitesses en trois autres autour des axes x, y, z, et remarquant que la somme algébrique de ces vitesses composantes autour de chacun des axes x, y, z est égale à la vitesse correspondante p, q, r autour du même axe, on aura

$$p = \frac{d\delta}{dt}\cdot\cos(ON, x) - \frac{d\eta}{dt}\cos(x, x) + \frac{d\nu}{dt}\cos(x_1, x),$$

$$p = \frac{d\delta}{dt}\cdot\cos(ON, y) - \frac{d\eta}{dt}\cdot\cos(x, y) + \frac{d\nu}{dt}\cdot\cos(x_1, y),$$

$$r = \frac{d\delta}{dt}\cdot\cos(ON, z) - \frac{d\eta}{dt}\cdot\cos(x, z) + \frac{d\nu}{dt}\cdot\cos(x_1, z).$$

*) La vitesse angulaire $\frac{d\eta}{dt}$ est prise avec le signe —, parce que l'angle η diminue, quand la rotation du corps autour de l'axe Ox est positive, c'est-à-dire quand cette rotation a lieu de droite à gauche pour un spectateur appuyé contre l'axe et ayant les pieds à l'origine de l'axe.

Digitized by Google

Mais: $\cos(ON, x) = 0$, $\cos(x, x) = 1$, $\cos(x_1, x) = \delta$,
$\cos(ON, y) = \cos\eta$, $\cos(x, y) = 0$, $\cos(x_1, y) = \cos(x, y) \cdot \cos(x_1,)x$
$+ \sin(x, y) \cdot \sin(x_1, x) \cdot \cos(yxx_1) = -\sin\delta\sin\eta$,
$\cos(ON, z) = \cos(90° + \eta) = -\sin\eta$, $\cos(x, z) = 0$,
$\cos(x_1, z) = \cos(x, z) \cdot \cos(x, x_1) + \sin(x, z) \cdot \sin(x, x_1)\cos(zxx_1)$
$= -\sin\delta \cdot \cos\eta$.

Par conséquent

$$p = -\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\nu}{dt}\cos\delta,$$

$$q = \frac{d\delta}{dt}\cos\eta - \frac{d\nu}{dt}\sin\eta\sin\delta,$$

$$r = -\frac{d\delta}{dt}\sin\eta - \frac{d\nu}{dt}\cos\eta\sin\delta.$$

Tirant de ces trois dernières équations les valeurs de $\frac{d\delta}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, on obtient

$$\text{(II).}\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = q\cos\eta - r\sin\eta, \\ \frac{d\nu}{dt}\sin\delta = -(q\sin\eta + r\cos\eta), \\ \frac{d\eta}{dt}\sin\delta = -[p\sin\delta + (q\sin\eta + r\cos\eta)\cos\delta]. \end{cases}$$

Ces trois équations avec les trois équations (I) servent à déterminer les angles δ, ν et η en fonction du temps t.

Un projectile oblong étant un corps de révolution, sa position est entièrement déterminée par la position de son axe de figure, qui sera connue, quand on n'aura trouvé que les deux angles δ et ν en fonction du temps t.

107. *La vitesse angulaire autour de l'axe de figure est constante pendant toute la durée du mouvement.* La première des équations (I), n° 106, donne

$$p = p_0,$$

où p_0 est la vitesse angulaire initiale du projectile autour de son axe

Digitized by Google

de figure; ce qui fait voir que la vitesse angulaire autour de l'axe de figure est constante pendant toute la durée du mouvement.

108. *Vitesse angulaire* $\frac{dv}{dt}$ *en fonction de l'angle* δ. Multipliant la seconde des équations (I), $n°$ 106, par $\sin\delta\sin\eta$ et la troisième par $\sin\delta\cos\eta$ et faisant leur somme, on aura

$$Ap\sin\delta(q\cos\eta - r\sin\eta) + B\left[\sin\delta\cos\eta\frac{dr}{dt} + \sin\delta\sin\eta\frac{dq}{dt} - p\sin\delta(q\cos\eta - r\sin\eta)\right] = 0.$$

En y substituant

$$p = p_0$$

et (éq. II $n°$ 106)

$$q\cos\eta - r\sin\eta = \frac{d\delta}{dt},$$

on obtient

$$B\left[\sin\delta\cos\eta\frac{dr}{dt} + \sin\delta\sin\eta\frac{dq}{dt} - p_0\sin\delta\frac{d\delta}{dt}\right] = Ap_0\frac{d\cos\delta}{dt}.$$

Mais

$$\frac{d}{dt}(r\sin\delta\cos\eta + q\sin\delta\sin\eta) = \sin\delta\cos\eta\frac{dr}{dt} + \sin\delta\sin\eta\frac{dq}{dt} + (q\cos\eta - r\sin\eta)\sin\delta\frac{d\eta}{dt} + (q\sin\eta + r\cos\eta)\cos\delta\frac{d\delta}{dt}$$

$$= \text{(éq. II)}\ \sin\delta\cos\eta\frac{dr}{dt} + \sin\delta\sin\eta\frac{dq}{dt} + \sin\delta\frac{d\delta}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt} - \sin\delta\cos\delta\frac{dv}{dt}\cdot\frac{d\delta}{dt}$$

$$= \sin\delta\cos\eta\frac{dr}{dt} + \sin\delta\sin\eta\frac{dq}{dt} - \sin\delta\frac{d\delta}{dt}\left(-\frac{d\eta}{dt} + \frac{dv}{dt}\cos\delta\right)$$

$$= \sin\delta\cos\eta\frac{dr}{dt} + \sin\delta\sin\eta\frac{dq}{dt} - p_0\sin\delta\frac{d\delta}{dt}.$$

Par conséquent

$$B.d(r\sin\delta\cos\eta + q\sin\delta\sin\eta) = Ap_0 d\cos\delta,$$

ou (éq. II)

$$B.d\left(\sin^2\delta\frac{dv}{dt}\right) = -Ap_0 d\cos\delta.$$

Digitized by Google

Pour $t = 0$, on a $\frac{d\delta}{dt} = 0$, $\frac{dv}{dt} = 0$ et, en intégrant la dernière équation, on obtient

$$B \sin^2\delta \frac{dv}{dt} = A p_0 (\cos\delta_0 - \cos\delta),$$

où δ_0 représente la valeur initiale de l'angle δ.

On en tire

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dv}{dt} = \frac{Ap_0}{B} \cdot \frac{\cos\delta_0 - \cos\delta}{\sin^2\delta}.$$

109. *Vitesse angulaire* $\frac{d\delta}{dt}$ *en fonction de l'angle* δ. Multipliant la seconde des équations I, $n°$ 106 par q et la troisième par r et faisant leur somme, on a

$$\tfrac{1}{2} B d(q^2 + r^2) = hR\rho_A \sin\delta (q\cos\eta - r\sin\eta) dt$$
$$= (\text{éq. II}) - hR\rho_A d\cos\delta;$$

mais les équations (II) donnent

$$q^2 + r^2 = \left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \sin^2\delta \left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

par conséquent

$$\tfrac{1}{2} B d\left(\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \sin^2\delta \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right) = - hR\rho_A d\cos\delta.$$

Pour $t = o$, on a $\frac{d\delta}{dt} = o$, $\frac{dv}{dt} = o$ et, en intégrant la dernière équation, on obtient

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \sin^2\delta \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{2hR\rho_A}{B} (\cos\delta_0 - \cos\delta).$$

En éliminant $\frac{dv}{dt}$ de cette équation et de l'équation (1) $n°$ 108, on trouve

$$(2). \frac{d\cos\delta}{dt} = \sqrt{\frac{2hR\rho_A}{B}} \sqrt{(\cos\delta_0 - \cos\delta)\left[1 - \cos^2\delta - \frac{A^2 p_0^2}{2hR\rho_A B}(\cos\delta_0 - \cos\delta)\right]}.$$

Digitized by Google

110. *Angle* δ *en fonction du temps* t. On tire de la dernière équation

$$t = \sqrt{\frac{B}{2hR\rho_A}} \int_{\cos\delta_0}^{\cos\delta} \frac{d\cos\delta}{\sqrt{(\cos\delta_0 - \cos\delta)\left[1 - \cos^2\delta - \frac{A^2p_0^2}{2hR\rho_A B}(\cos\delta_0 - \cos\delta)\right]}}$$

une intégrale elliptique de première espèce.

On peut intégrer cette expression avec une approximation suffisante sans avoir recours aux fonctions elliptiques. En effet, les racines de l'équation

$$1 - \cos^2\delta - \frac{A^2p_0^2}{2hR\rho_A B}(\cos\delta_0 - \cos\delta) = 0$$

sont

$$\cos\delta = \frac{A^2p_0^2}{4hR\rho_A B}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{8hR\rho_A B}{A^2p_0^2}\cos\delta_0 + \left(\frac{4hR\rho_A B}{A^2p_0^2}\right)^2}\right]$$

et

$$\cos\delta = \frac{A^2p_0^2}{4hR\rho_A B}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{8hR\rho_A B}{A^2p_0^2}\cos\delta_0 + \left(\frac{4hR\rho_A B}{A^2p_0^2}\right)^2}\right]$$

Le projectile étant animé d'une grande vitesse de rotation p_0 autour de son axe de figure, on peut développer le radical en série et négliger devant l'unité dans les expressions de $\cos\delta$ les puissances seconde et supérieures de la fraction $\frac{4hR\rho_A B}{A^2p_0^2}$; on obtient ainsi

$$\cos\delta = \frac{A^2p_0^2}{2hR\rho_A B}\left(1 - \frac{2hR\rho_A B}{A^2p_0^2}\cos\delta_0\right)$$

et

$$\cos\delta = \cos\delta_0 - \frac{2hR\rho_A B}{A^2p_0^2}\sin^2\delta_0;$$

par suite

$$1 - \cos^2\delta - \frac{A^2p_0^2}{2hR\rho_A B}(\cos\delta_0 - \cos\delta)$$

$$= \frac{A^2p_0^2}{2hR\rho_A B}\left[1 - \frac{2hR\rho_A B}{A^2p_0^2}(\cos\delta_0 + \cos\delta)\right](\cos\delta - \cos\delta_0 + \frac{2h\rho_A B}{A^2p_0^2}\sin^2\delta_0)$$

Digitized by Google

et

$$t=\frac{B}{Ap_0}\int_{\cos\delta_0}^{\cos\delta}\frac{d\cos\delta}{\sqrt{(\cos\delta_0-\cos\delta)\left(\cos\delta-\cos\delta_0+\frac{2hR\rho_A B}{A^2p_0^2}\sin^2\delta_0\right)\left(1-\frac{2hR\rho_A B}{A^2p_0^2}(\cos\delta_0+\cos\delta)\right)}},$$

ou, en négligeant $\frac{2hR\rho_A B}{A^2p_0^2}(\cos\delta_0+\cos\delta)$ devant l'unité, on a

$$t=\frac{B}{Ap_0}\int_{\cos\delta_0}^{\cos\delta}\frac{d\cos\delta}{\sqrt{-\cos\delta_0\left(\cos\delta_0-\frac{2hR\rho_A B}{A^2p_0^2}\sin^2\delta_0\right)+2\left(\cos\delta_0-\frac{hR\rho_A B}{A^2p_0^2}\sin^2\delta_0\right)\cos\delta-\cos^2\delta}}$$

et l'on tire

$$t=\frac{B}{Ap_0}\left[\arccos\frac{\cos\delta_0-\frac{hR\rho_A B}{A^2p_0^2}\sin^2\delta_0-\cos\delta}{\frac{hR\rho_A B}{A^2p_0^2}\sin^2\delta_0}-\pi\right],$$

d'où l'on obtient

$$\cos\delta=\cos\delta_0-\frac{hR\rho_A B\sin\delta_0}{A^2p_0^2}\left(1-\cos\frac{Ap_0t}{B}\right)\sin\delta_0.$$

La valeur de $\frac{hR\rho_A B\sin\delta_0}{A^2p_0^2}\left(1-\cos\frac{Ap_0t}{B}\right)$ étant petite, on peut prendre son cosinus égal à l'unité et son sinus égal à elle-même, et l'on aura

$$\delta=\delta_0+\frac{hR\rho_A B\sin\delta_0}{A^2p_0^2}\left(1-\cos\frac{Ap_0t}{B}\right).$$

On voit ainsi que l'angle δ est exprimé par une fonction périodique, dont la période correspond au temps $t_1=\frac{B}{Ap_0}\cdot 2\pi$. Par conséquent l'axe de figure Ox tantôt s'éloigne et tantôt s'approche de l'axe fixe Ox_1, et les variations des distances angulaires de l'axe de figure Ox à l'axe fixe Ox_1 se trouvent dans les limites $\delta=\delta_0$ et $\delta=\delta_0+\frac{2h\rho_A B\sin\delta_0}{A^2p_0^2}$.

111. *Vitesse angulaire* $\frac{d\delta}{dt}$ *de l'axe de figure autour de l'axe du*

Digitized by Google

couple de la résistance en fonction du temps t. En prenant la dérivée de l'expression δ par rapport à t, on a

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{hR\rho_{\blacktriangle} \sin \delta_0}{Ap_0} \sin \frac{Ap_0 t}{B}.$$

On voit que la vitesse angulaire $\frac{d\delta}{dt}$ est exprimée par une fonction périodique, et que depuis $t = o$ jusqu'à $t = \frac{B}{Ap_0} \cdot \frac{\pi}{2}$ elle croît de zéro à $\frac{hR\rho_{\blacktriangle} \sin \delta_0}{Ap_0}$, depuis $t = \frac{B}{Ap_0} \cdot \frac{\pi}{2}$ jusqu'à $t = \frac{B}{Ap_0} \cdot \pi$ elle décroît de $\frac{hR\rho_{\blacktriangle} \sin \delta_0}{Ap_0}$ à zéro, depuis $t = \frac{B}{Ap_0} \cdot \pi$ jusqu'à $t = \frac{B}{Ap_0} \cdot \frac{3}{2}\pi$ elle continue de décroître de zéro à $-\frac{hR\rho_{\blacktriangle} \sin \delta_0}{Ap_0}$, depuis $t = \frac{B}{Ap_0} \cdot \frac{3}{2}\pi$ jusqu'à $t = \frac{B}{Ap_0} \cdot 2\pi$ elle croît de $-\frac{hR\rho_{\blacktriangle} \sin \delta_0}{Ap_0}$ jusqu'à zéro, et ainsi de suite.

112. *Vitesse angulaire $\frac{d\nu}{dt}$ de l'axe de figure Ox autour de l'axe fixe Ox_1 en fonction du temps t.*

En mettant $\delta = \delta_0 + \frac{hR\rho_{\blacktriangle} \sin \delta_0}{A^2 p_0^2}\left(1 - \cos \frac{Ap_0 t}{B}\right)$ dans l'équation (1) n° 108 et en négligeant devant l'unité les termes dans lesquels $\frac{hR\rho_{\blacktriangle} \sin \delta_0}{A^2 p_0^2}\left(1 - \cos \frac{Ap_0 t}{B}\right)$ entre à des puissances supérieures à la première, on trouve

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{hR\rho_{\blacktriangle}}{Ap_0}\left(1 - \cos \frac{Ap_0 t}{B}\right).$$

Cette quantité étant positive, l'axe de figure, lorsqu'on regarde du pôle x au centre de gravité O, se meut autour de l'axe fixe Ox_1 de droite à gauche, si la rotation du projectile autour de son axe de figure a lieu dans le même sens.

La vitesse angulaire $\frac{d\nu}{dt}$ est une fonction périodique, dont la période correspond à la même durée $t_1 = \frac{B}{Ap_0} \cdot 2\pi$ que celle de la variation de l'angle δ.

La plus petite et la plus grande valeurs de cette vitesse sont zéro et $\frac{2hR\rho_{\blacktriangle}}{Ap_0}$ et elle les atteint aux moments où la vitesse angulaire $\frac{d\delta}{dt}$ est égale à zéro et l'angle δ est égal à sa plus petite et à sa plus grande valeur.

Digitized by Google

113. *Angle* ν, *que fait le plan vertical* $z_1 Ox_1$ *passant par l'axe fixe* Ox_1 *avec le plan* $x\,Ox_1$ *passant par le même axe fixe* Ox_1 *et l'axe de figure* Ox, *en fonction du temps* t. Cet angle s'obtient en intégrant l'expression $\frac{d\nu}{dt}$ et a pour valeur

$$\nu = \frac{hR\rho_A}{Ap_0}\left(t - \frac{B}{Ap_0}\sin\frac{Ap_0 t}{B}\right)$$

ou

$$\nu = \frac{hR\rho_A B}{A^2 p_0^2}\left(\frac{Ap_0 t}{B} - \sin\frac{Ap_0 t}{B}\right).$$

114. *Équations polaires de la courbe que décrit le pôle de l'axe de figure sur un plan perpendiculaire à l'axe fixe* Ox_1. Soit ce plan mené à une distance OT (fig. 16) du centre de gravité O du projectile et soit OP' une position quelconque de l'axe de figure. Prenons les longueurs $P'T$ pour les rayons vecteurs γ et les angles ν pour les longitudes de la courbe. En désignant par $OP = a$ la position initiale de l'axe de figure, on aura

$$P'T = \gamma = OT.\tang\delta = a\cos\delta_0.\tang\delta.$$

En mettant $\delta = \delta_0 + \frac{hR\rho_A\sin\delta_0}{A^2p_0^2}\left(1 - \cos\frac{Ap_0t}{B}\right)$ et en se bornant aux termes dans lesquels $\frac{hR\rho_A\sin\delta_0}{A^2p_0^2}\left(1 - \cos\frac{Ap_0t}{B}\right)$ entre à la première puissance, on obtient

$$\gamma = a\sin\delta_0 + a\,\frac{hR\rho_A B\tang\delta_0}{A^2p_0^2}\left(1 - \cos\frac{Ap_0t}{B}\right).$$

L'angle ν ($n°$ 113) est

$$\nu = \frac{hR\rho_A B}{A^2p_0^2}\left(\frac{Ap_0t}{B} - \sin\frac{Ap_0t}{B}\right).$$

En posant

$$\rho = a\sin\delta_0,\quad r = a\,\frac{hR\rho_A B\sin\delta_0}{A^2p_0^2},\quad \beta = \frac{Ap_0t}{B},$$

Digitized by Google

on a les équations polaires suivantes de la courbe décrite par le pôle de l'axe de figure sur un plan perpendiculaire à l'axe fixe Ox_1

$$\begin{cases} \gamma = \rho + \frac{r}{\cos \delta_0}\left(1 - \cos \beta\right), \\ \nu = \frac{r}{\rho}(\beta - \sin \beta), \end{cases}$$

ou, pour de petits angles δ_0

$$\begin{cases} \gamma = \rho + r(1 - \cos \beta), \\ \nu = \frac{r}{\rho}(\beta - \sin \beta). \end{cases}$$

Ces équations polaires sont celles de l'épicycloïde ordinaire dont le rayon du cercle fixe est ρ et celui du cercle mobile est r, lorsque le rapport $\frac{r}{\gamma}$ et par suite celui de $\frac{r}{\rho}$ sont petits*).

---

*) L'épicycloïde ordinaire est une courbe AMG (fig. 17) engendrée par un point quelconque M du cercle BCM qui roule sur le cercle fixe ABD. Cherchons ses équations polaires, en prenant le point A pour origine du mouvement. Soit $OM = \gamma$, $MOA = \nu$, $AO = \rho$, $BC = r$, $MCB = \beta$, $COA = \alpha$, $COM = \alpha'$.

Le triangle MCO donne

$$\gamma^2 = (\rho + r)^2 + r^2 - 2(\rho + r)r \cdot \cos \beta$$

ou

$$\gamma^2 = (\rho + r - r \cos \beta)^2 + r^2 \sin^2 \beta,$$

et

$$\gamma = (\rho + r - r \cos \beta)\sqrt{1 + \left(\frac{r \sin \beta}{\rho + r - r \cos \beta}\right)^2}.$$

Lorsque le rapport $\frac{r}{\rho}$ a une faible valeur, on peut négliger devant l'unité les termes dans lesquels $\frac{r \sin \beta}{\rho + r - r \cos \beta}$ entre à la deuxième puissance et aux supérieures; on a dans ce cas

$$\gamma = \rho + r(1 - \cos \beta).$$

L'angle

$$\nu = \alpha - \alpha'.$$

D'après la loi de la génération de l'épicycloïde, l'arc $AB = \rho\alpha$ est égal à l'arc $BM = r\beta$; par suite

$$\alpha = \frac{r}{\rho}\beta$$

Digitized by Google

Par conséquent le pôle de l'axe de figure décrit autour de l'axe fixe Ox_1 une série d'épicycloïdes ordinaires, dont les rayons des cercles fixes sont $a \sin \delta_0$ et les rayons des cercles mobiles sont $a \frac{hR\rho_A B \sin \delta_0}{A^2 p_0^2}$, et l'axe de figure décrit autour de l'axe fixe un cône qui a pour base ces épicycloïdes. A l'origine de ces épicycloïdes (n^{os} 111 et 112) les vitesses angulaires $\frac{d\delta}{dt}$ et $\frac{d\nu}{dt}$ de l'axe de figure autour de l'axe du couple de la résistance et autour de l'axe fixe sont égales à zéro.

115. *Limite de l'accroissement de l'angle* δ *par suite de l'action du couple de la résistance de l'air.* La plus petite valeur de l'angle δ ($n°$ 110) est δ_0; sa plus grande valeur, par suite de l'action du couple de la résistance, est $\delta_0 + \frac{2hR\rho_A B \sin \delta_0}{A^2 p_0^2}$, de sorte que la limite de l'accroissement de cet angle est la

$$\frac{2hR\rho_A B \sin \delta_0}{A^2 p_0^2 \delta_0} \text{ partie de l'angle } \delta_0.$$

En représentant par η la longueur du pas des rayures, exprimée en rayons R du projectile, on a

$$p_0 = \frac{2\pi V}{\eta R}.$$

---

et

$$\nu = \frac{r}{\rho}\beta - \alpha'.$$

Abaissant du point M sur la ligne OC la perpendiculaire ME, on trouve du triangle rectangle MOE

$$\sin \alpha' = \frac{ME}{MO} = \frac{r}{\gamma} \sin \beta$$

et lorsque le rapport $\frac{r}{\gamma}$ est petit

$$\alpha' = \frac{r}{\gamma} \sin \beta.$$

Par conséquent les équations polaires de l'épicycloïde ordinaire, lorsque $\frac{r}{\gamma}$ est petit, sont

$$\begin{cases} \gamma = \rho + r(1 - \cos \beta), \\ \nu = \frac{r}{\rho}(\beta - \sin \beta). \end{cases}$$

Digitized by Google

Le moment d'inertie du projectile autour de son axe de figure est

$$A = \mu . \frac{P}{g} . R^2,$$

où μ est un coefficient qui dépend de la construction du projectile.

Pour les projectiles semblables à notre obus de 4[1], on a $\mu = 0,589$, $\frac{B}{A} = 2,3$, $h = 2,7$, $\frac{P}{g} = 7120\,R^3$.

La résistance de l'air dans le sens contraire à l'axe de figure (n[os] 28 et 29), si l'on prend $\frac{X}{X_0} = 1$ et $\Pi = \Pi_1$, est pour les vitesses au-dessus de 360 mèt:sec.

$$\rho_A = 0,044 . \pi R^2 v^2;$$

pour les vitesses au-dessous de 325 mèt:sec. elle est $\rho_A = 0,012 . \pi R^2 v^2 \left[1 + \left(\frac{v}{488}\right)^2\right]$; mais cette résistance, comme le fait voir la courbe de $\rho' = \frac{\rho_A}{\pi R^2 v^2}$ représentée sur la figure 8 (*E*), ne croît pas beaucoup plus rapidement que le carré de la vitesse, et on peut prendre approximativement pour son expression

$$\rho_A = 0,014\,\pi R^2 . v^2.$$

En mettant ces valeurs dans l'expression $\frac{2hR\rho_A B \sin\delta_0}{A^2 p_0^2 \delta_0}$, on trouve: pour des vitesses qui dépassent 360 mèt:sec.

$$\frac{2hR\rho_A B \sin\delta_0}{A^2 p_0^2 \delta_0} = 0,0000104\,\eta^2 \frac{\sin\delta_0}{\delta_0}$$

et pour des vitesses qui sont inférieures à 325 mèt:sec.

$$\frac{2hR\rho_A B \sin\delta_0}{A^2 p_0^2 \delta_0} = 0,00000336\,\eta^2 \frac{\sin\delta_0}{\delta_0}.$$

Egalant successivement η à 140 et à 82, c'est-à-dire aux limites entre lesquelles sont compris les pas des rayures de nos bouches à feu, on voit que, pour $\eta = 140$, l'accroissement de l'angle δ, par suite de l'action du couple de la résistance de l'air, ne dépasse pas 0,20 de δ_0 quand les vitesses sont supérieures à 360 mèt:sec., et ne dépasse pas 0,064 de δ_0, quand elles sont inférieures à 325 mèt:sec.; pour $\eta = 82$,

Digitized by Google

cet accroissement de l'angle δ ne dépasse pas 0,070 de δ_0, quand les vitesses sont supérieures à 360 mèt:sec., et ne dépasse pas 0,023 de δ_0, quand elles sont inférieures à 325 mèt:sec.

116. *Si la tangente à la trajectoire était immobile et la résistance de l'air constante, l'axe de figure du projectile décrirait sensiblement autour de la tangente un cône circulaire avec une vitesse angulaire moyenne constante.* L'accroissement de l'angle δ, par suite de l'action du couple de la résistance de l'air, étant une très faible partie de l'angle δ_0, on peut prendre, sans erreur sensible, au lieu de la valeur variable ($n°$ 110) $\delta = \delta_0 + \frac{hR\rho_\Delta B \sin \delta_0}{A^2 p_0^2}\left(1 - \cos \frac{Ap_0 t}{B}\right)$ sa valeur moyenne

$$\delta = \delta_0 + \frac{hR\rho_\Delta B \sin \delta_0}{A^2 p_0^2},$$

et substituant cette expression dans l'éq. 1, $n°$ 108, en négligeant devant l'unité les termes qui contiennent $\frac{hR\rho_\Delta B}{A^2 p_0^2}$ à des puissances supérieures à la première, on trouvera

$$\frac{dv}{dt} = \frac{hR\rho_\Delta}{Ap_0}$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{Ap_0 \sin \delta},$$

car ($n°$ 105) $K = hR\rho_\Delta \sin \delta$.

Par conséquent on peut admettre que, si la tangente était immobile et la résistance de l'air constante, l'axe de figure du projectile décrirait sensiblement autour de la tangente un cône circulaire avec une vitesse angulaire constante

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{Ap_0 \sin \delta}.$$

Cette expression a été déduite dans la supposition que $K = hR\rho_\Delta \sin \delta$, c'est-à-dire pour le cas de petits angles δ.

Quand on tire sous de grands angles de projection avec de petites vitesses, les angles δ acquièrent une grande valeur. On ne peut

Digitized by Google

plus alors admettre la proportionnalité des valeurs de $\frac{Y}{X} \cdot \partial$ aux sinus des angles δ, mais on peut poser

$$\frac{Y}{X} \cdot \partial = l \sin \delta \cos \delta,$$

où l'on a pris pour les projectiles semblables à notre obus de 4[1]

$$l = 2{,}6$$

afin de représenter avec une approximation suffisante les valeurs de $\frac{Y}{X} \cdot \partial$ dans les limites de $\delta = o$ à $\delta = 20°$, les angles δ ne dépassant $20°$ que dans le cas de tir avec de très petites charges.

La courbe exprimée par cette équation est pointée sur la figure 15. On aura dans ce cas pour l'expression du couple de la résistance de l'air

$$K = l \,.\, R\rho_A \sin \delta \,.\, \cos \delta.$$

Si on la met dans les équations différentielles générales du mouvement de rotation d'un projectile oblong et si on les intègre, comme on l'a fait pour $K = hR\rho_A \sin \delta$, en posant $\delta = \delta_0 + \varepsilon$ et négligeant les termes affectés des puissances seconde et supérieures de ε, on arrive à la même expression

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{Ap_0 \sin \delta}$$

de la vitesse angulaire constante, avec laquelle l'axe de figure du projectile décrirait sensiblement un cône circulaire autour de la tangente, si celle-ci était immobile et si la résistance était constante.

En mettant $K = hR\rho_A \sin \delta$, $A = \mu \frac{P}{g} R^2$, $p_0 = \frac{2\pi V}{\eta R}$ et $\frac{\rho_A}{P} = f(v)$, on aura pour le cas de petits angles δ

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h\eta g}{2\pi\mu V} f(v),$$

et en mettant $K = lR\rho_A \sin \delta \cos \delta$, $A = \mu \frac{P}{g} R^2$, $p_0 = \frac{2\pi V}{\eta R}$ et $\frac{\rho_A}{P} = f(v)$, on aura pour le cas d'angles δ qui varient de zéro dans de larges limites

$$\frac{dv}{dt} = \frac{l\eta g}{2\pi\mu V} f(v) \cos \delta.$$

Digitized by Google

La tangente à la trajectoire étant mobile et la résistance de l'air étant variable, la vitesse angulaire $\frac{d\nu}{dt}$ varie durant tout le mouvement du projectile. L'angle $\delta\nu$ — que fait le plan passant par la position de la tangente et par celle de l'axe de figure à l'origine de l'élément de temps dt avec le plan passant par la même position de la tangente et par celle de l'axe de figure à la fin de cet élément de temps dt — cet angle aura pour expression

$$d\nu = \frac{K}{Ap_0 \sin\delta} dt,$$

ou

dans le cas de petits angles δ

$$d\nu = \frac{h\eta g}{2\pi\mu V} f(v)\, dt,$$

et *dans le cas d'angles* δ *qui varient de zéro dans de larges limites*

$$d\nu = \frac{l\eta g}{2\pi\mu V} f(v) \cos\delta\, dt.$$

117. *Équations différentielles du mouvement de rotation de l'axe de figure d'un projectile oblong durant tout son trajet dans l'air.* Un projectile oblong décrit dans l'air une trajectoire à double courbure qui tourne sa concavité vers l'horizon, et la tangente à la trajectoire, par suite de l'action de la gravité, s'abaisse durant tout le trajet du projectile. Représentons-nous une sphère dont le centre (fig. 18) est en O. Soit OT la direction de la tangente au bout du temps t; en menant par cette tangente un plan vertical, ce plan sera représenté sur la surface de la sphère par l'arc NTn. Soit OA la direction de l'axe de figure au bout du temps t. L'angle ν, formé par le plan vertical passant par la tangente OT avec le plan passant par la même tangente et l'axe de figure OA, aura pour mesure l'angle dièdre NTA, et l'angle δ que fait l'axe de figure OA avec la tangente OT aura pour mesure l'arc AT. Représentons par OA' la position de l'axe de figure et par OT' celle de la tangente au bout de l'élément du temps suivant. L'accroissement de l'angle δ par suite

Digitized by Google

de l'action du couple de la résistance de l'air étant (n° 115) très faible, on peut admettre que l'arc $A'T$ sera égal à $AT = \delta$ et que l'angle $A'TA$, que nous nommerons dv', aura pour expression (n° 116)

$$dv' = \frac{K}{Ap_0 \sin \delta}\, dt.$$

En appelant ψ l'arc NT, θ l'angle que fait la tangente OT avec l'horizon, ω l'angle que fait le plan vertical passant par la tangente OT avec le plan vertical du tir, on aura $NT = \psi = \frac{\pi}{2} - \theta$, $d\psi = -d\theta$, $NT' = \psi + d\psi = \frac{\pi}{2} - \theta - d\theta$, $TNT' = d\omega$, $A'T' = \delta + d\delta$, $A'T'N = v + dv$.

Il est facile de déduire des triangles sphériques $A'TT'$ et NTT' les expressions de $d\delta$ et de dv en fonction de v, v', δ et ω; mais ces expressions sont compliquées. Pour faciliter les recherches, remarquons que les accroissements de l'angle ω sont bien plus petits que ceux des angles θ et v, de sorte que l'on peut, sans erreur sensible, négliger, dans les expressions de $d\delta$ et dv, les termes infiniment petits du premier ordre contenant le facteur $\frac{d\omega}{d\theta}$ et négliger en outre dans l'expression de dv le terme $\sin \theta . d\omega$. En négligeant ces termes on obtient

$$d\delta = -\cos v\, d\theta,$$

$$dv = dv' - \frac{\operatorname{tang} v}{\operatorname{tang} \delta}\, d\delta.$$

On arrive au même résultat si l'on considère, dans la recherche du mouvement de rotation de l'axe de figure, la trajectoire comme située dans le plan vertical du tir. En effet, dans ce cas l'arc TT' coïncide avec l'arc NTn, et l'on aura (fig. 18[bis]) $TT' = NT' - NT = -d\theta$, $v + dv = AT'T$; le triangle sphérique $A'TT'$ donne

$$\cos A'T' = \cos A'T . \cos TT' + \sin A'T . \sin TT' \cos A'TT'$$

et

$$\frac{\sin A'T'T}{\sin A'TT'} = \frac{\sin A'T}{\sin A'T'},$$

Digitized by Google

ou, en substituant au lieu de $A'T'$, $A'T$, TT', $A'TT'$, $A'T'T$ leurs valeurs $\delta + d\delta$, δ, $-d\theta$, $\pi - \nu - d\nu'$, $\nu + d\nu$, en faisant les réductions nécessaires et en rejetant les infiniment petits du second ordre, on retombe sur les expressions trouvées de $d\delta$ et de $d\nu$.

En considérant la trajectoire comme située dans le plan vertical du tir, la projection de l'accélération suivant la normale intérieure aura pour expression

$$\frac{v^2}{\gamma} = g \cos\theta,$$

où le rayon de courbure $\gamma = -\frac{v dt}{d\theta}$, et par conséquent on aura

$$\frac{d\theta}{\cos\theta} = -\frac{g}{v} dt,$$

ou, divisant les deux membres de l'équation par une valeur constante α choisie de manière que $\alpha \cos\theta$ diffère le moins possible de l'unité *) sur toute l'étendue de l'arc de la trajectoire que l'on considère, et admettant $\alpha \cos\theta = 1$, on obtient

$$d\theta = -\frac{g}{\alpha v} dt.$$

Substituant cette valeur dans l'expression de $d\delta$, on a

$$d\delta = \frac{g}{\alpha v} \cos\nu \, dt.$$

Après avoir mis dans l'expression de $d\nu$ la dernière valeur de $d\delta$ et la valeur de $d\nu'$ ($n°$ 116), et après avoir divisé l'expression de $d\nu$ par celle de $d\delta$, on obtient les équations différentielles suivantes du mouvement de rotation de l'axe de figure du projectile:

dans le cas de petits angles δ

$$(1) \begin{cases} d\nu = \frac{1}{\cos\nu} \left[\frac{h\eta\alpha}{2\pi\mu V} v f(v) - \frac{\sin\nu}{\tan\delta} \right] d\delta, \\ \frac{d\delta}{\cos\nu} = \frac{g}{\alpha v} dt, \end{cases}$$

*) Les valeurs de α sont insérées dans la table I de l'annexe.

Digitized by Google

et *dans le cas d'angles δ qui varient de zéro dans de larges limites*

$$(1_1)\begin{cases} d\nu = \frac{1}{\cos\nu}\left[\frac{l\eta\alpha}{2\pi\mu V} v f(v)\cos\delta - \frac{\sin\nu}{\operatorname{tang}\delta}\right] d\delta, \\ \frac{d\delta}{\cos\nu} = \frac{g}{\alpha v} dt. \end{cases}$$

118. *Intégration, par approximation, des équations différentielles du mouvement de rotation de l'axe de figure du projectile dans le cas du tir direct, pour lequel les angles δ sont toujours petits.* Les équations différentielles du mouvement de rotation de l'axe de figure du projectile contenant des termes qui dépendent de cos ν qui change de signe, leur intégration même approximative, entre des limites quelconques, dans l'état actuel de l'analyse, présente des difficultés insurmontables et il devient indispensable de les intégrer, même approximativement, par parties.

Remplaçons dans les équations (1) *n*° 117 les quantités variables v et $vf(v)$ par certaines valeurs moyennes $(v)_m$ et $[vf(v)]_m$, qu'elles prennent dans les limites de l'intégration, qui doivent être choisies de manière que cos ν ne change pas de signe entre ces limites. Dans ce cas la première des équations (1) *n*° 117, en remarquant que $\cos\nu d\nu = d\sin\nu$, devient

$$\frac{d\sin\nu}{d\delta} = q - \frac{\sin\nu}{\operatorname{tang}\delta},$$

où l'on a posé pour abréger

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q = \frac{h\eta\alpha}{2\pi\mu V}[vf(v)]_m.$$

La seconde des équations (1) *n*° 117 devient

$$\frac{d\delta}{\cos\nu} = \frac{g}{\alpha(v)_m} dt.$$

L'équation

$$\frac{d\sin\nu}{d\delta} = q - \frac{\sin\nu}{\operatorname{tang}\delta}$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Digitized by Google

L'intégrale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = Py + Q,$$

dans laquelle P et Q sont des fonctions quelconques de x, est

$$y = e^{\int P dx}\left[\int e^{-\int P dx} Q\, dx + C\right].$$

En posant $y = \sin \nu$, $x = \delta$, $P = -\frac{1}{\operatorname{tang} \delta}$, $Q = q$, on a

$$\int P dx = -\int \frac{d\delta}{\operatorname{tang} \delta} = -\log \sin \delta,$$

$$e^{\int P dx} = e^{-\log \sin \delta} = \frac{1}{\sin \delta},$$

$$e^{-\int P dx} = e^{\log \sin \delta} = \sin \delta,$$

$$\int e^{-\int P dx} Q dx = q \int \sin \delta d\delta = -q \cos \delta$$

et

$$\sin \nu = \frac{1}{\sin \delta}(-q \cos \delta + C).$$

En développant sin δ et cos δ en séries et en se bornant aux termes dans lesquels δ entre à la seconde puissance, on obtient

$$\sin \nu = \frac{1}{\delta}\left(-q + \frac{q}{2}\delta^2 + C\right).$$

En représentant par ν_i et δ_i les angles ν et δ qui correspondent au temps t_i, on a

$$\delta . \sin \nu = \frac{q}{2}\delta^2 + \delta_i\left(\sin \nu_i - \frac{q}{2}\delta_i\right).$$

Le tir direct ayant lieu avec des vitesses initiales assez considérables, la valeur de $\frac{q}{2}$(éq. 1) est toujours bien plus grande que l'unité.

Déterminant δ de la dernière équation, on trouve

$$\delta = \frac{1}{q}\left[\sin \nu \pm \sqrt{\sin^2 \nu - q\delta_i\,(2 \sin \nu_i - q\delta_i)}\right]$$

Digitized by Google

ou

$$(2)\ldots\ldots\delta=\frac{1}{q}\left[\sin\nu\pm\sqrt{1-q\delta_i\,(2\sin\nu_i-q\delta_i)-\cos^2\nu}\right]$$

et

$$d\delta=\frac{1}{q}\left[\cos\nu d\nu\pm\frac{\sin\nu.\cos\nu d\nu}{\sqrt{1-q\delta_i\,(2\sin\nu_i-q\delta_i)-\cos^2\nu}}\right].$$

En mettant cette expression dans l'équation

$$\frac{d\delta}{\cos\nu}=\frac{g}{\alpha\,(v)_m}dt,$$

on obtient

$$d\nu\pm\frac{\sin\nu d\nu}{\sqrt{1-q\delta_i(2\sin\nu_i-q\delta_i)-\cos^2\nu}}=\frac{gq}{\alpha\,(v)_m}dt$$

ou, en substituant à q sa valeur (éq. 1),

$$d\nu\mp\frac{d\cos\nu}{\sqrt{1-q\delta_i\,(2\sin\nu_i-q\delta_i)-\cos^2\nu}}=\frac{h\nu g\,[vf(v)]_m}{(v)_m}dt.$$

Dans l'hypothèse de la résistance de l'air proportionnelle à la n^{me} puissance de la vitesse on a $f(v)=\dfrac{\mathfrak{h}\pi R^2v^n}{P}=\dfrac{v^n}{2gc^{n-1}}$, où $c^{n-1}=\dfrac{P}{2\mathfrak{h}\pi R^2g}$. En supposant la trajectoire située dans le plan vertical du tir, la projection de l'accélération suivant l'axe horizontal des x est $\dfrac{dv_1}{dt}=-gf(v)\cos\theta$, et en substituant à $f(v)$ la fonction $\dfrac{f(\alpha v_1)}{\alpha\cos\theta}$ on obtient $\dfrac{dv_1}{dt}=-\dfrac{g}{\alpha}f(\alpha v_1)=-\dfrac{\alpha^{n-1}}{2c^{n-1}}{v_1}^n$, d'où l'on tire

$$\alpha v_1=\frac{\alpha V_1}{\left[1+\frac{n-1}{2}\left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1}t\right]^{\frac{1}{n-1}}},\quad f(v)=f(\alpha v_1)=\frac{(\alpha V_1)^n}{2gc^{n-1}}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{n-1}{2}\left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1}t\right]^{\frac{n}{n-1}}},$$

$$\alpha v_1.f(\alpha v_1)=\frac{(\alpha V_1)^{n+1}}{2gc^{n-1}}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{n-1}{2}\left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1}t\right]^{\frac{n+1}{n-1}}},$$

et l'on peut substituer aux valeurs moyennes $(v)_m=(\alpha v_1)_m$, $[f(v)]_m=[f(\alpha v_1)]_m$, $[vf(v)]_m=[\alpha v_1 f(\alpha v_1)]_m$, que prennent les

Digitized by Google

quantités v, $f(v)$, $vf(v)$ dans les limites des durées de $t=t_i$ à t, les valeurs que l'on obtient des expressions de αv_1, $f(\alpha v_1)$ et $\alpha v_1 . f(\alpha v_1)$ en remplaçant t par $\frac{t+t_i}{2}$. Dans ce cas on a $\frac{[vf(v)]_m}{(v)_m} = [f(v)]_m$, et par suite

$$dv \mp \frac{d\cos\nu}{\sqrt{1-q\delta_i(2\sin\nu_i - q\delta_i)-\cos^2\nu}} = \frac{h\eta g}{2\pi\mu V}[f(v)]_m\, dt,$$

et

$$(3)\ldots\ldots \frac{dv}{dt} = \frac{\frac{h\eta g}{2\pi\mu V}[f(v)]_m}{1 \pm \frac{\sin\nu}{\sqrt{1-q\delta_i(2\sin\nu_i - q\delta_i)-\cos^2\nu}}},$$

où le signe + se rapporte au cas du signe positif devant le radical de l'expression δ et le signe — au cas du signe négatif devant le radical de l'expression δ.

Intégrant l'avant-dernière équation entre les limites de $t=t_i$ à t et de $\nu=\nu_i$ à ν, on obtient:

dans le cas du signe positif devant le radical de l'expression δ

$$(4)\ldots \nu - \nu_i + \arccos\frac{\cos\nu}{\sqrt{1-q\delta_i(2\sin\nu_i - q\delta_i)}} - \arccos\frac{\cos\nu_i}{\sqrt{1-q\delta_i(2\sin\nu_i - q\delta_i)}} = \frac{h\eta g}{2\pi\mu V}[f(v)]_m (t-t_i),$$

et dans le cas du signe négatif devant le radical de l'expression δ

$$(4_1)\ldots \nu - \nu_i + \arcsin\frac{\cos\nu}{\sqrt{1-q\delta_i(2\sin\nu_i - q\delta_i)}} - \arcsin\frac{\cos\nu_i}{\sqrt{1-q\delta_i(2\sin\nu_i - q\delta_i)}} = \frac{h\eta g}{2\pi\mu V}[f(v)]_m (t-t_i).$$

Les formules (2), (3), (4) et (4_1) ne peuvent être employées, comme on l'a remarqué, que dans des limites entre lesquelles $\cos\nu$ ne change pas de signe.

Au point de départ on a $\nu_i = \nu_1 = o$, $\delta_i = \delta_1 = o$, $t_i = o$.

Considérons l'intervalle depuis $\nu = o$ *jusqu'à* $\nu = \frac{\pi}{2}$. Appelant q_I et $[f(v)]_{m_1}$ les valeurs moyennes q et $[f(v)]_m$ dans cet intervalle, on a (éq. 2)

$$\delta = \frac{1}{q_1}\left(\sin\nu + \sqrt{1-\cos^2\nu}\right) = \frac{2}{q_1}\sin\nu,$$

Digitized by Google

où l'on a pris le signe positif devant le radical, parce que la dérivée $\frac{d\delta}{dt} = \frac{g}{av}\cos\nu$ est positive, lorsque cos ν est positif, et par conséquent l'angle δ augmente avec le temps tant que cos ν reste positif.

La dérivée (éq. 3)

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{h\eta g}{4\pi\mu V}[f(v)]_{m_1}$$

étant positive, l'angle ν croît de zéro à $\frac{\pi}{2}$.

Désignant par $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,1\right)}$ et t_1 l'angle δ et le temps t qui correspondent à l'angle $\nu = \frac{\pi}{2}$, on trouve (éq. 2)

$$\delta\left(\tfrac{\pi}{2},\,1\right) = \frac{2}{q_1};$$

la formule (4) donne

$$\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{h\eta g}{2\pi\mu V}[f(v)]_{m_1}.t_1,$$

d'où l'on tire

$$t_1 = \frac{2\pi^2\mu V}{h\eta g\,[f(v)]_{m_1}}.$$

Considérons l'intervalle depuis $\nu = \frac{\pi}{2}$ *jusqu'à l'angle limite* $\nu = \nu_2 > \frac{\pi}{2}$. Appelant q_2 et $[f(v)]_{m_2}$ les valeurs moyennes q et $[f(v)]_m$ dans tout l'intervalle de temps, à partir de t_1, durant lequel cos ν reste négatif, on a (éq. 2)

$$\delta = \frac{1}{q_2}\left[\sin\nu + \sqrt{\left(\frac{2q_2}{q_1} - 1\right)^2 - \cos^2\nu}\right].$$

La valeur de cos ν étant négative, la dérivée $\frac{d\delta}{dt} = \frac{g}{av}\cos\nu$ fait voir que l'angle δ, à partir de $\delta = \delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,1\right)}$, décroît, lorsque t augmente.

La dérivée (éq. 3)

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\frac{h\eta g}{2\pi\mu V}[f(v)]_{m_2}}{1 + \frac{\sin\nu}{\sqrt{\left(\frac{2q_2}{q_1} - 1\right)^2 - \cos^2\nu}}}$$

Digitized by Google

étant positive entre $\nu = \frac{\pi}{2}$ et $\nu = \pi$, l'angle ν ne peut cesser de croître que si $\frac{d\nu}{dt}$ devient imaginaire. Les quantités v et $f(v)$ décroissant à mesure que le temps augmente, on a $q_2 < q_1$ et $[f(v)]_{m_2} < [f(v)_{m_1}$; par suite $\left(\frac{2q_2}{q_1} - 1\right)^2$ est moindre que l'unité et la dérivée $\frac{d\nu}{dt}$ n'est réelle qu'autant que $\cos^2 \nu < \left(\frac{2q_2}{q_1} - 1\right)^2$. Par conséquent l'angle ν ne peut augmenter au-delà de la limite définie par l'équation

$$\cos \nu_2 = -\left(\frac{2q_2}{q_1} - 1\right).$$

Ainsi l'angle limite ν_2 est plus petit que π et plus grand que $\frac{\pi}{2}$. La quantité $\frac{2q_2}{q_1} - 1$ se réduisant à zéro pour $\frac{2q_2}{q_1} = 1$ et l'angle ν_2 à $\frac{\pi}{2}$, on voit que le rapport $\frac{q_2}{q_1}$, qui est moindre que 1, est plus grand que $\frac{1}{2}$ *).

Désignant par δ_2 l'angle δ qui correspond à l'angle $\nu = \nu_2$ et par t'_2 le temps depuis l'origine du mouvement jusqu'au moment où $\nu = \nu_2$ et $\delta = \delta_2$, on trouve (éq. 2)

$$\delta_2 = \frac{1}{q_2} \sin \nu_2;$$

la formule (4) donne

$$\nu_2 - \frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{h\eta g}{2\pi\mu V}[f(v)]_{m_2}(t'_2 - t_1),$$

d'où l'on tire

$$t'_2 - t_1 = \frac{2\pi\mu V}{h\eta g [f(v)]_{m_2}} \cdot \nu_2.$$

La dérivée $\frac{d\delta}{dt}$, comme on l'a observé, fait voir que

$$\delta_2 < \delta\left(\frac{\pi}{2}, 1\right).$$

*) S'il en était autrement, cela indiquerait que l'on ne devait choisir pour q_2 que la valeur de q correspondant à un intervalle de temps moindre que tout l'intervalle, à partir de t_1, durant lequel cos ν reste négatif.

Digitized by Google

Considérons l'intervalle depuis $\nu = \nu_2$ *jusqu'à* $\nu = \frac{\pi}{2}$. La formule (2) donne

$$\delta = \frac{1}{q_2}\left[\sin\nu - \sqrt{\cos^2\nu_2 - \cos^2\nu}\right],$$

où l'on a pris le signe négatif devant le radical, parce que, cos ν étant négatif, la dérivée $\frac{d\delta}{dt} = \frac{g}{av}\cos\nu$ fait voir que l'angle δ doit continuer de décroître, lorsque t augmente.

On obtient de la formule (3)

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\frac{h\eta g}{2\pi\mu V}[f(v)]_{m_2}}{1 - \frac{\sin\nu}{\sqrt{\cos^2\nu_2 - \cos^2\nu}}},$$

où l'on a pris le signe — devant le radical, parce que le radical de l'expression δ est affecté du signe négatif.

La valeur de $\cos^2\nu_2$ étant moindre que l'unité et par suite $\sqrt{\cos^2\nu_2 - \cos^2\nu}$ étant moindre que sin ν, le rapport $\frac{\sin\nu}{\sqrt{\cos^2\nu_2 - \cos^2\nu}}$ est plus grand que l'unité, et la dérivée $\frac{d\nu}{dt}$ est négative. Par conséquent l'angle ν diminue à partir de $\nu = \nu_2$.

Désignant par $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\ 2\right)}$ l'angle δ qui correspond à $\nu = \frac{\pi}{2}$, et par t_2 le temps depuis l'origine du mouvement jusqu'au moment où $\nu = \frac{\pi}{2}$ et $\delta = \delta_{\left(\frac{\pi}{2},\ 2\right)}$, on a (éq. 2)

$$\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\ 2\right)} = \frac{1}{q_2}(1 + \cos\nu_2) = \frac{1}{q_2}\left(1 - \cos(\pi - \nu_2)\right).$$

La formule (4_1) donne

$$\frac{\pi}{2} - \nu_2 + \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{h\eta g}{2\pi\mu V}[f(v)]_{m_2}(t_2 - t'_2),$$

d'où l'on tire

$$t_2 - t'_2 = \frac{2\pi\mu V}{h\eta g\,[f(v)]_{m_2}} \cdot (\pi - \nu_2).$$

Digitized by Google

Les expressions $t'_2 - t_1$ et $t_2 - t'_2$ font voir que

$$t_2 - t_1 = \frac{2\pi^2 \mu V}{hng\,[f(v)]_{m_2}}$$

et

$$t'_2 - t_1 = \frac{\nu_2}{\pi}(t_2 - t_1),\ t_2 - t'_2 = \frac{\pi - \nu_2}{\pi}(t_2 - t_1).$$

La fonction $[f(v)]_{m_1}$ étant plus grande que $[f(v)]_{m_2}$, on a

$$t_2 - t_1 > t_1.$$

La dérivée $\frac{d\delta}{dt}$, comme on l'a observé, fait voir que

$$\delta_2 > \delta\left(\frac{\pi}{2},\ 2\right).$$

Considérons l'intervalle depuis $\nu = \frac{\pi}{2}$ *jusqu'à l'angle limite* $\nu = \nu_3 < \frac{\pi}{2}$. Appelant q_3 et $[f(v)]_{m_3}$ les valeurs moyennes q et $[f(v)]_m$ dans tout l'intervalle de temps, à partir de t_2, durant lequel cos ν reste positif, on a (éq. 2)

$$\delta = \frac{1}{q_3}\left[\sin\nu - \sqrt{\left(1 - \frac{q_2}{q_2}(1 - \cos(\pi - \nu_2))\right)^2 - \cos^2\nu}\right],$$

et cos ν étant positif, la dérivée $\frac{d\delta}{dt} = \frac{g}{\alpha v}\cos\nu$ fait voir que l'angle δ, à partir de $\delta = \delta\left(\frac{\pi}{2},\ 2\right)$, croît avec le temps.

La dérivée (éq. 3)

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\frac{hng}{2\pi\mu V}[f(v)]_{m_3}}{1 - \frac{\sin\nu}{\sqrt{\left(1 - \frac{q_2}{q_2}(1 - \cos(\pi - \nu_2))\right)^2 - \cos^2\nu}}}$$

étant négative entre $\nu = \frac{\pi}{2}$ et $\nu = 0$, l'angle ν ne peut cesser de décroître que si $\frac{d\nu}{dt}$ devient imaginaire, ce qui a lieu quand $\cos^2\nu > \left(1 - \frac{q_2}{q_2}(1 - \cos(\pi - \nu_2))\right)^2$. Par conséquent l'angle ν ne

Digitized by Google

peut diminuer au-delà de la limite déterminée par l'équation

$$\cos \nu_3 = 1 - \frac{q_3}{q_2}\left(1 - \cos(\pi - \nu_2)\right),$$

et comme $1 - \frac{q_3}{q_2}\left(1 - \cos(\pi - \nu_2)\right)$ est plus petit que l'unité et plus grand que $\cos(\pi - \nu_2)$, il suit que l'angle limite ν_3 est plus grand que zéro et plus petit que $(\pi - \nu_2)$.

Désignant par δ_3 l'angle δ qui correspond à l'angle limite ν_3 et par t'_3 le temps depuis l'origine du mouvement jusqu'au moment où $\nu = \nu_3$ et $\delta = \delta_3$, on a (éq. 2)

$$\delta_3 = \frac{1}{q_3} \sin \nu_3;$$

la formule (4_1) donne

$$\nu_3 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - o = \frac{h\eta g}{2\pi\mu V}\left[f(v)\right]_{m_3}(t'_3 - t_2),$$

d'où l'on tire

$$t'_3 - t_2 = \frac{2\pi\mu V}{h\eta g\left[f(v)\right]_{m_3}} \cdot \nu_3.$$

La dérivée $\frac{d\delta}{dt}$, comme on l'a observé, fait voir que

$$\delta\left(\frac{\pi}{2},\ 2\right) < \delta_3.$$

Considérons l'intervalle depuis $\nu = \nu_3$ *jusqu'à* $\nu = \frac{\pi}{2}$. La valeur de $\cos \nu$ étant positive, la dérivée $\frac{d\delta}{dt} = \frac{q}{\alpha v} \cos \nu$ fait voir que l'angle δ doit continuer de croître avec t et que par suite il faut prendre le signe positif devant le radical de l'expression δ (éq. 2). La dérivée $\frac{d\nu}{dt}$ (éq. 2) est positive et par conséquent l'angle ν croît à partir de $\nu = \nu_3$.

Désignant par $\delta\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right)$ l'angle δ qui correspond à $\nu = \frac{\pi}{2}$, et par t_3 le temps depuis l'origine du mouvement jusqu'au moment où $\nu = \frac{\pi}{2}$ et $\delta = \delta\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right)$, on a (éq. 2)

$$\delta\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right) = \frac{1}{q_3}(1 + \cos \nu_3).$$

Digitized by Google

La formule (4) donne

$$\frac{\pi}{2} - \nu_3 + \frac{\pi}{2} - o = \frac{h\eta g}{2\pi\mu V}[f(v)]_{m_3}.(t_3 - t'_3),$$

d'où l'on tire

$$t_3 - t'_3 = \frac{2\pi\mu V}{h\eta g\,[f(v)]_{m_3}}(\pi - \nu_3).$$

Les expressions $t'_3 - t_2$ et $t_3 - t'_3$ font voir que

$$t_3 - t_2 = \frac{2\pi^2\mu V}{h\eta g\,[f(v)]_{m_3}},$$

et

$$t'_3 - t_2 = \frac{\nu_3}{\pi}(t_3 - t_2) \text{ et } t_3 - t'_3 = \frac{\pi - \nu_3}{\pi}(t_3 - t_2).$$

La fonction $[f(v)]_{m_2}$ étant plus grande que $[f(v)]_{m_3}$, on a

$$t_3 - t_2 > t_2 - t_1.$$

La dérivée $\frac{d\delta}{dt}$, comme on l'a observé, fait voir que

$$\delta_3 < \delta\left(\frac{\pi}{2}, 3\right).$$

Considérons l'intervalle depuis $\nu = \frac{\pi}{2}$ *jusqu'à l'angle limite* $\nu_4 > \frac{\pi}{2}$. Représentons par δ_4 l'angle δ qui correspond à ν_4 et par t'_4 le temps depuis l'origine du mouvement jusqu'au moment où $\nu = \nu_4$ et $\delta = \delta_4$, et appelons q_4 et $[f(v)]_{m_4}$ les valeurs moyennes q et $[f(v)]_m$ pendant tout l'intervalle de temps, à partir de t_3, durant lequel cos ν reste négatif. En procédant comme on l'a fait précédemment, on trouvera d'après la formule (3) que l'angle limite ν_4 est défini par l'équation

$$\cos\nu_4 = -\left[\frac{q_4}{q_3}(1 + \cos\nu_3) - 1\right]$$

et que cet angle, étant plus grand que $\frac{\pi}{2}$, est moindre que $(\pi - \nu_3)$. La quantité $\frac{q_4}{q_3}(1 + \cos\nu_3) - 1$ se réduisant à zéro pour $\frac{q_4}{q_3} = \frac{1}{1 + \cos\nu_3}$ et l'angle ν_4 à $\frac{\pi}{2}$, on voit que le rapport $\frac{q_4}{q_3}$ est plus grand que $\frac{1}{1 + \cos\nu_3}$.

Digitized by Google

Cherchons la condition nécessaire pour que l'angle ν_4 soit moindre que l'angle ν_2 ou que $\pi-\nu_4 > \pi-\nu_2$ ou que $\cos(\pi-\nu_4) < \cos(\pi-\nu_2)$.

Les expressions de cos ν_4 et de cos ν_3 donnent

$$\cos(\pi-\nu_4) = \frac{q_4}{q_3}\left[2-\frac{q_3}{q_2}(1+\cos\nu_2)\right]-1,$$

et observant que $\cos(\pi-\nu_3) = \frac{2q_2}{q_1} - 1$, la condition $\cos(\pi-\nu_4) < \cos(\pi-\nu_2)$ se réduit à la suivante

$$\frac{q_4}{q_3} < \frac{\frac{q_2}{q_1}}{1-\frac{q_3}{q_2}\left(1-\frac{q_2}{q_1}\right)},$$

et $\frac{\frac{q_2}{q_1}}{1-\frac{q_3}{q_2}\left(1-\frac{q_2}{q_1}\right)}$ étant plus grand que $\frac{q_2}{q_1}$, on voit que si la condition

$$\frac{q_4}{q_3} < \frac{q_2}{q_1}$$

est satisfaite, on aura à fortiori $\cos(\pi-\nu_4) < \cos(\pi-\nu_2)$.

Mais durant le mouvement des projectiles oblongs dans l'air $\frac{q_2}{q_1} > \frac{q_3}{q_2} > \frac{q_4}{q_3} > \ldots > \frac{q_i}{q_{i-1}}$ *); par conséquent $\cos(\pi-\nu_4) < \cos(\pi-\nu_2)$ et

$$\nu_4 < \nu_2.$$

---

*) Pour démontrer que $\frac{q_2}{q_1} > \frac{q_3}{q_2} > \ldots > \frac{q_i}{q_{i-1}}$, supposons que la résistance de l'air soit exprimée par un monome proportionnel à la n^{me} puissance de la vitesse. Dans ce cas, comme on l'a vu, on peut prendre pour $[f(v)]_{m_i}$ et $[vf(v)]_{m_i}$ les expressions

$$[f(v)]_{m_i} = \frac{(\alpha V_1)^n}{2gc^{n-1}} \cdot \frac{1}{\left[1+\frac{n-1}{4}\cdot\left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1}(t_i+t_{i-1})\right]^{\frac{n}{n-1}}},$$

$$[vf(v)]_{m_i} = \frac{(\alpha V_1)^{n-1}}{2gc^{n-1}} \cdot \frac{1}{\left[1+\frac{n-1}{4}\left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1}(t_i+t_{i-1})\right]^{\frac{n+1}{n-1}}}.$$

Digitized by Google

La formule (2) donne

$$\delta_4 = \frac{1}{q_4} \sin \nu_4.$$

L'expression $t_1 = \frac{2\pi^2 \mu V}{h\eta g\,[f(v)]_{m_1}}$ devient

$$t_1 = \frac{4\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} \cdot \left(\frac{c}{\alpha V_1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{n-1}{4} \cdot \left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1} t_1\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Pour les projectiles semblables à notre obus de 4[1] et pour le pas des rayures $\eta = 82$, on a $\frac{\pi^2\mu}{h\eta} = 0{,}0263$. En se bornant aux termes qui contiennent $\frac{\pi^2\mu}{h\eta}$ à la première et à la seconde puissances, on aura

$$t_1 = \frac{4\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} \left(\frac{c}{\alpha V_1}\right)^{n-1} + n \frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} t_1,$$

d'où l'on tire

$$t_1 = \frac{4\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} \left(\frac{c}{\alpha V_1}\right)^{n-1} \left(1 + n \frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right).$$

L'expression $t_2 - t_1 = \frac{2\pi^2\mu V}{h\eta g\,[f(v)]_{m_2}}$ devient

$$t_2 - t_1 = \frac{4\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} \cdot \left(\frac{c}{\alpha V_1}\right)^{n-1} + n \frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} (t_2 + t_1),$$

et, substituant à t_1 sa valeur, on tire

$$t_2 = 2 \frac{4\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} \left(\frac{c}{\alpha V_1}\right)^{n-1} \left(1 + 2n \frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right).$$

On obtiendra de même

$$t_3 = 3 \frac{4\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} \left(\frac{c}{\alpha V_1}\right)^{n-1} \left(1 + 3n \frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right),$$

. . . . . .

$$t_i = i \frac{4\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} \left(\frac{c}{\alpha V_1}\right)^{n-1} \left(1 + in \frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right).$$

La valeur $q_i = \frac{h\eta\alpha}{2\pi\mu V}\,[vf(v)]_{m_i}$ devient

$$q_i = \frac{h\eta\alpha^2\cos\varphi}{4\pi\mu} \cdot \frac{(\alpha V_1)^n}{gc^{n-1}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \frac{n-1}{4}\left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1} (t_i + t_{i-1})\right]^{\frac{n+1}{n-1}}}.$$

Digitized by Google

On obtient de la formule (4)

$$t'_4 - t_3 = \frac{2\pi\mu V}{h\eta g\,[f(v)]_{m_4}} \cdot \nu_4.$$

La valeur de cos ν étant négative, la dérivée $\frac{d\delta}{dt} = \frac{g}{\alpha v}\cos\nu$ fait voir que l'angle δ à partir de $\delta = \delta_{\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right)}$ décroît lorsque le temps augmente et que

$$\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right)} > \delta_4.$$

Considérons l'intervalle depuis $\nu = \nu_4$ *jusqu'à* $\nu = \frac{\pi}{2}$. Désignons par $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\ 4\right)}$ l'angle δ qui correspond à $\nu = \frac{\pi}{2}$, et par t_4 le temps depuis l'origine du mouvement jusqu'au moment où $\nu = \frac{\pi}{2}$ et $\delta = \delta_{\left(\frac{\pi}{2},\ 4\right)}$.

En substituant à i et à $t_i + t_{i-1}$ leurs valeurs successives, on trouve

$$\frac{q_2}{q_1} = \left[\frac{1 + \frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\left(1 + n\,\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right)}{1 + \frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\left(3 + 5n\,\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right)}\right]^{\frac{n+1}{n-1}}$$

$$= \left[1 - 2\,\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} - 2\,(2n-3)\left(\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right)^2\right]^{\frac{n+1}{n-1}}$$

ou

$$\frac{q_2}{q_1} = 1 - 2\,\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} - 2\,\frac{2n^3-3n^2-4n+1}{(n-1)^2}\left(\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right)^2,$$

$$\frac{q_3}{q_2} = 1 - 2\,\frac{n+1}{n-1}\,\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} - 2\,\frac{4n^3-5n^2-6n+3}{(n-1)^2}\left(\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right)^2,$$

$$\frac{q_4}{q_3} = 1 - 2\,\frac{n+1}{n-1}\,\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} - 2\,\frac{6n^3-7n^2-8n+5}{(n-1)^2}\left(\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right)^2,$$

. . . . . .

$$\frac{q_i}{q_{i-1}} = 1 - 2\,\frac{n+1}{n-1}\,\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi} - 2\,\frac{(2i-2)n^3-(2i-1)n^2-2in+(2i-3)}{(n-1)^2}\left(\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right)^2.$$

Ces expressions font voir que, pour les degrés de la résistance $n \geqq 2$, on a $\frac{q_2}{q_1} > \frac{q_3}{q_2} > \ldots > \frac{q_i}{q_{i-1}}$.

Digitized by Google

La formule (2) donne

$$\delta\left(\frac{\pi}{2}, 4\right) = \frac{1}{q_4}(1 + \cos \nu_4) = \frac{1}{q_4}\left(1 - \cos(\pi - \nu_4)\right).$$

On obtient de la formule (4_1)

$$t_4 - t'_4 = \frac{2\pi\mu V}{h\eta g\,[f(v)]_{m_4}}\,(\pi - \nu_4).$$

Les expressions $t'_4 - t_3$ et $t_4 - t'_4$ font voir que

$$t_4 - t_3 = \frac{2\pi^2\mu V}{h\eta g\,[f(v)]_{m_4}}$$

et

$$t'_4 - t_3 = \frac{\nu_4}{\pi}(t_4 - t_3),\ t_4 - t'_4 = \frac{\pi - \nu_4}{\pi}\,(t_4 - t_3).$$

La fonction $[f(v)]_{m_3}$ étant plus grande que $[f(v)]_{m_4}$, on a

$$t_4 - t_3 > t_3 - t_2.$$

La valeur de cos ν étant négative, la dérivée $\frac{d\delta}{dt} = \frac{g}{av}\cos\nu$ fait voir que

$$\delta_4 > \delta\left(\frac{\pi}{2}, 4\right).$$

Considérons l'intervalle depuis $\nu = \frac{\pi}{2}$ *jusqu'à l'angle limite* $\nu = \nu_5 < \frac{\pi}{2}$. Désignons par q_5 et $[f(v)]_{m_5}$ les valeurs moyennes q et $[f(v)]_m$ dans tout l'intervalle du temps à partir de t_4 durant lequel cos ν reste positif.

La formule (3) fait voir que l'angle limite ν_5 est déterminé par l'équation

$$\cos\nu_5 = 1 - \frac{q_5}{q_4}\left(1 - \cos(\pi - \nu_4)\right),$$

et comme $1 - \frac{q_5}{q_4}\left(1 - \cos(\pi - \nu_4)\right)$ est toujours plus petit que l'unité et plus grand que $\cos(\pi - \nu_4)$, il suit que l'angle limite ν_5 est plus grand que zéro et plus petit que $(\pi - \nu_4)$.

Cherchons la condition nécessaire pour que l'angle ν_5 soit plus grand que l'angle ν_3 ou que $\cos\nu_5 < \cos\nu_3$.

Digitized by Google

Les expressions de $\cos\nu_5$, $\cos\nu_4$, $\cos\nu_3$ et $\cos\nu_2$ donnent $\cos\nu_5 = 1 - \frac{2q_5}{q_4}\left\{1 - \frac{q_4}{q_3}\left[1 - \frac{q_3}{q_2}\left(1 - \frac{q_2}{q_1}\right)\right]\right\}$, $\cos\nu_3 = 1 - \frac{2q_3}{q_2}\left(1 - \frac{q_2}{q_1}\right)$, et la condition $\cos\nu_5 < \cos\nu_3$ se réduit à la suivante

$$\frac{1 - \frac{q_2}{q_1}}{1 - \frac{q_4}{q_3}\left[1 - \frac{q_3}{q_2}\left(1 - \frac{q_2}{q_1}\right)\right]} < \frac{\frac{q_5}{q_4}}{\frac{q_3}{q_2}},$$

et $\frac{1 - \frac{q_2}{q_1}}{1 - \frac{q_4}{q_3}\left[1 - \frac{q_3}{q_2}\left(1 - \frac{q_2}{q_1}\right)\right]}$ étant moindre que $\frac{1 - \frac{q_2}{q_1}}{1 - \frac{q_4}{q_3}}$ on voit que, si la condition

$$\frac{1 - \frac{q_2}{q_1}}{1 - \frac{q_4}{q_3}} < \frac{\frac{q_5}{q_4}}{\frac{q_3}{q_2}}$$

est satisfaite, on aura à fortiori $\cos\nu_5 < \cos\nu_3$.

Mais durant le mouvement des projectiles oblongs dans l'air cette condition est toujours satisfaite *); par conséquent $\cos\nu_5 < \cos\nu_3$ et

$$\nu_5 > \nu_3.$$

---

*) En effet, les expressions de $\frac{q_2}{q_1}, \frac{q_3}{q_2}, \ldots, \frac{q_i}{q_{i-1}}$ donnent

$$\frac{1 - \frac{q_2}{q_1}}{1 - \frac{q_4}{q_3}} = 1 - 4(n-1)\frac{\pi^2\mu}{h\eta x\cos\varphi},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1 - \frac{q_{i-2}}{q_{i-4}}}{1 - \frac{q_{i-1}}{q_{i-2}}} = 1 - 4(n-1)\frac{\pi^2\mu}{h\eta a\cos\varphi},$$

et

$$\frac{\frac{q_5}{q_4}}{\frac{q_3}{q_2}} = 1 - 8(n-1)\left(\frac{\pi^2\mu}{h\eta a\cos\varphi}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\frac{q_i}{q_{i-1}}}{\frac{q_{i-2}}{q_{i-3}}} = 1 - 8(n-1)\left(\frac{\pi^2\mu}{h\eta a\cos\varphi}\right)^2$$

Digitized by Google

Désignant par δ_5 l'angle δ qui correspond à l'angle limite ν_5 et par t'_5 le temps depuis l'origine du mouvement jusqu'au moment où $\nu = \nu_5$ et $\delta = \delta_5$, on a de la formule (2)

$$\delta_5 = \frac{1}{q_5} \sin \nu_5,$$

et la formule (4_1) donne

$$t'_5 - t_4 = \frac{2\pi\mu V}{h\eta g\,[f(v)]_{m_5}} \cdot \nu_5.$$

La valeur de cos ν étant positive, la dérivée $\frac{d\delta}{dt} = \frac{g}{\alpha v} \cos \nu$ fait voir que l'angle δ, à partir de $\delta = \delta\left(\frac{\pi}{2}, 4\right)$, croît avec le temps et que

$$\delta\left(\frac{\pi}{2}, 4\right) < \delta_5.$$

Et ainsi de suite.

Démontrons en outre que:

1°. . . . . $\delta\left(\frac{\pi}{2}, 4\right) > \delta\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$.

En effet:

$$\frac{\delta\left(\frac{\pi}{2}, 4\right)}{\delta\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)} = \frac{q_2}{q_4} \cdot \frac{1 - \cos(\pi - \nu_4)}{1 - \cos(\pi - \nu_2)};$$

---

de sorte que $\dfrac{1 - \frac{q_{i-2}}{q_{i-4}}}{1 - \frac{q_{i-1}}{q_{i-2}}}$ est inférieur à l'unité d'une quantité qui a pour facteur $\frac{\pi^2\mu}{h\eta}$, tandis que $\dfrac{\frac{q_i}{q_{i-1}}}{\frac{q_{i-2}}{q_{i-3}}}$ n'est inférieur à l'unité que d'une quantité qui a pour facteur $\left(\frac{\pi^2\mu}{h\eta}\right)^2$; par conséquent

$$\frac{1 - \frac{q_{i-3}}{q_{i-4}}}{1 - \frac{q_{i-1}}{q_{i-2}}} < \frac{\frac{q_i}{q_{i-1}}}{\frac{q_{i-2}}{q_{i-3}}}.$$

Digitized by Google

on a vu que $\cos(\pi-\nu_4)<\cos(\pi-\nu_2)$; par suite $1-\cos(\pi-\nu_4)>1-\cos(\pi-\nu_2)$ et comme $\frac{q_2}{q_4}>1$, on voit que $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,4\right)}>\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,2\right)}$.

$2°\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,3\right)}>\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,1\right)}$.

En effet:

$$\frac{\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,3\right)}}{\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,1\right)}}=\frac{q_1}{q_3}\,\frac{1+\cos\nu_3}{2}=\frac{1-\frac{q_3}{q_2}\left(1-\frac{q_2}{q_1}\right)}{\frac{q_2}{q_1}};$$

en posant $\frac{q_3}{q_2}=1$ on diminue le numérateur de sorte que $1-\frac{q_3}{q_2}\left(1-\frac{q_2}{q_1}\right)>\frac{q_2}{q_1}$,

et comme $\frac{\frac{q_2}{q_1}}{\frac{q_3}{q_1}}=\frac{q_2}{q_3}>1$, on voit que $\frac{\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,3\right)}}{\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,1\right)}}>1$ et $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,3\right)}>\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,1\right)}$;

et ainsi de suite.

Cet examen fait voir que, dans le cas du tir direct, l'axe de figure du projectile a un mouvement d'oscillation autour de la tangente de la trajectoire. L'angle ν, que fait le plan vertical passant par la tangente avec le plan passant par la même tangente et l'axe de figure, augmente d'abord de zéro à $\frac{\pi}{2}$, et l'angle δ que fait l'axe de figure avec la tangente croît lentement de zéro jusqu'à une certaine limite $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,1\right)}$. Ensuite l'angle ν continue d'augmenter jusqu'à une certaine limite ν_2 moindre que π, tandis que l'angle δ diminue jusqu'à une certaine valeur δ_2. L'angle ν, après avoir atteint la limite ν_2, diminue jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, et l'angle δ continue de décroître jusqu'à une certaine limite $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,2\right)}$. Au-delà l'angle ν continue de diminuer jusqu'à une certaine limite ν_3 plus grande que zéro et moindre que $\pi-\nu_2$, tandis que l'angle δ augmente jusqu'à une certaine valeur δ_3. L'angle ν, après avoir atteint la limite ν_3, augmente de

Digitized by Google

nouveau jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, et l'angle δ continue de croître jusqu'à une certaine limite $\delta_{\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)}$ plus grande que la limite $\delta_{\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)}$ qu'il avait atteinte lors de l'augmentation précédente de l'angle ν. Ensuite l'angle ν continue d'augmenter jusqu'à la limite ν_4 moindre que ν_2, tandis que l'angle δ diminue jusqu'à une certaine valeur δ_4. L'angle ν, après avoir atteint la limite ν_4, diminue jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, et l'angle δ continue de décroître jusqu'à une certaine limite $\delta_{\left(\frac{\pi}{2}, 4\right)}$ plus grande que la limite $\delta_{\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)}$ qu'il avait atteinte lors de la diminution précédente de l'angle ν. Au-delà l'angle ν continue de diminuer jusqu'à une certaine limite ν_5 plus grande que ν_3 et moindre que $\pi - \nu_4$, tandis que l'angle δ croît jusqu'à une certaine valeur δ_5. L'angle ν après avoir atteint la limite ν_5 augmente de nouveau et l'angle δ continue d'augmenter; et ainsi de suite.

Les durées $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$, $t_4 - t_3$, . . ., qui correspondent chacune à deux valeurs successives de l'angle ν égales à $\frac{\pi}{2}$, vont en augmentant.

Les valeurs des angles limites ν_2, ν_3, ν_4. . . . ne dépendant que des rapports $\frac{q_2}{q_1}$, $\frac{r_3}{q_2}$, $\frac{q_4}{q_3}$. . . . et ceux-ci ne dépendant que des quantités μ, h, η, n, et de $\alpha \cos \varphi$ qui ne diffère pas beaucoup de l'unité, on voit que les angles limites ν_2, ν_3, . . . sont les mêmes pour des projectiles semblables tirés des bouches à feu ayant les pas des rayures proportionnels aux calibres, et que par suite les valeurs de ces angles limites sont, pour une même expression de la résistance, indépendantes des vitesses initiales, pourvu que celles-ci soient assez considérables, comme cela a toujours lieu dans le tir direct.

119. *Oscillation moyenne de l'axe de figure.* Si l'on se borne dans les expressions de $\frac{q_2}{q_1}$, $\frac{q_3}{q_2}$, ... aux termes qui contiennent $\frac{\pi^2\mu}{h\eta}$ à la première puissance, on aura

$$\cos(\pi - \nu_2) = \cos\nu_3 = \cos(\pi - \nu_4) = \cos\nu_5 = \ldots = \cos\nu_i$$
$$= 1 - 4\frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi},$$

Digitized by Google

et

$$\sin \nu_i = \sqrt{8 \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{\pi^2 \mu}{h \eta \alpha \cos \varphi}}.$$

On peut appeler une pareille oscillation de l'axe de figure — *oscillation moyenne.*

Dans chaque demi-oscillation moyenne les valeurs de sin ν seront comprises entre les limites de 1 et de $\sqrt{8 \frac{n+1}{n-1} \frac{\pi^2 \mu}{h \eta \alpha \cos \varphi}}$.

Les angles δ seront exprimés:
dans le mouvement ascendant de l'axe de figure par

$$\delta = \frac{1}{q} \left[\sin \nu - \sqrt{\sin^2 \nu - 8 \frac{n+1}{n-1} \frac{\pi^2 \mu}{h \eta \alpha \cos \varphi}} \right]$$

et dans le mouvement descendant de cet axe par

$$\delta = \frac{1}{q} \left[\sin \nu + \sqrt{\sin^2 \nu - 8 \frac{n+1}{n-1} \frac{\pi^2 \mu}{h \eta \alpha \cos \varphi}} \right],$$

où:

$$q = \frac{h \eta \alpha}{2 \pi \mu V} [vf(v)]_m,$$

et $[vf(v)]_m$ est une valeur moyenne du produit $vf(v)$ sur toute l'étendue de la trajectoire; le produit $vf(v)$ étant sensiblement égal (n° 11) à

$$\alpha v_1 . f(\alpha v_1) = \frac{(\alpha V_1)^{n+1}}{2gc^{n-1}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \frac{n-1}{2} \left(\frac{\alpha V_1}{c} \right)^{n-1} t \right]^{\frac{n+1}{n-1}}},$$

on peut poser

$$[vf(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^{n+1}}{2gc^{n-1}} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \frac{dt}{\left[1 + \frac{n-1}{2} \left(\frac{\alpha V_1}{c} \right)^{n-1} t \right]^{\frac{n+1}{n-1}}}$$

ou

$$[vf(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^2}{2gt} \left[1 - \frac{1}{\left[1 + \frac{n-1}{2} \left(\frac{\alpha V_1}{c} \right)^{n-1} t \right]^{\frac{2}{n-1}}} \right].$$

Digitized by Google

Les angles δ_l qui correspondent aux angles limites $\nu = \nu_l$ auront pour valeur

$$\delta_l = \frac{1}{q}\sqrt{8\,\frac{n+1}{n-1}\,\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}}.$$

Les angles $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,a\right)}$ qui correspondent à l'angle $\nu = \frac{\pi}{2}$ dans le mouvement ascendant de l'axe de figure auront pour valeur

$$\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,a\right)} = \frac{4}{q}\,\frac{n+1}{n-1}\,\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi},$$

et les angles $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,d\right)}$ qui correspondent à l'angle $\nu = \frac{\pi}{2}$ dans le mouvement descendant de cet axe auront pour valeur

$$\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,d\right)} = \frac{1}{q}\left(2 - 4\,\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right).$$

On aura pour la durée moyenne τ, correspondante à deux valeurs successives de l'angle ν égales à $\frac{\pi}{2}$, l'expression

$$\tau = \frac{2\pi^2\mu V}{h\eta g\,[f(v)]_m},$$

où $[f(v)]_m$ est la valeur moyenne de la fonction $f(v)$ sur toute l'étendue de la trajectoire; la fonction $f(v)$ étant sensiblement égale (n° 118) à

$$f(\alpha v_1) = \frac{(\alpha V_1)^n}{2gc^{n-1}}\,\frac{1}{\left[1 + \frac{n-1}{2}\left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1} t\right]^{\frac{n}{n-1}}},$$

on peut poser

$$[f(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^n}{2gc^{n-1}}\cdot\frac{1}{t}\int_0^t \frac{dt}{\left[1 + \frac{n-1}{2}\left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1} t\right]^{\frac{n}{n-1}}}$$

ou

$$[f(v)]_m = \frac{\alpha V_1}{gt}\left[1 - \frac{1}{\left[1 + \frac{n-1}{2}\left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1} t\right]^{\frac{1}{n-1}}}\right].$$

Digitized by Google

120. Exemple. *Recherche du mouvement d'oscillation de l'axe de figure d'un obus de 4^l tiré sous l'angle de projection de 10° avec une vitesse initiale de 305^m.* On peut admettre, pour faciliter les calculs, que la résistance de l'air suivant l'axe de figure est exprimée (*n°* 115) par

$$\rho_A = 0{,}014\,\pi R^2 v^2,$$

et en posant

$$2c = \frac{P}{0{,}014.\,\pi R^2.g},$$

on aura

$$f(v) = \frac{\rho_A}{P} = \frac{v^2}{2gc};$$

pour l'obus de 4^l, $c = 3514^m$.

En calculant la projection verticale de la trajectoire dans l'hypothèse que la résistance de l'air est tangentielle à la trajectoire et est en grandeur égale à la composante de la résistance suivant l'axe de figure, ce qui donne, comme on le verra plus loin, une approximation suffisante, on aura la portée au moyen de la formule (1) *n°* 52, en y faisant $y = 0$, et cette portée sera de 2516^m; la durée du trajet (éq. 1, *n°* 52) sera de 9;92.

Dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse on peut prendre (*n°* 118) pour v_{m_i}, $[f(v)]_{m_i}$ et $[v(fv)]_{m_i}$ les expressions

$$(v)_{m_i} = \frac{\alpha V_1}{1 + \frac{\alpha V_1}{4c}(t_i + t_{i-1})}, \quad [f(v)]_{m_i} = \frac{(\alpha V_1)^2}{2gc}\,\frac{1}{\left[1 + \frac{\alpha V_1}{4c}(t_i + t_{i-1})\right]^2},$$

$$[vf(v)]_{m_i} = \frac{(\alpha V_1)^3}{2gc}\cdot\frac{1}{\left[1 + \frac{\alpha V_1}{4c}(t_i + t_{i-1})\right]^3}.$$

Le temps depuis l'origine du mouvement jusqu'au moment où $\nu = \frac{\pi}{2}$ (*n°* 118)

$$t_1 = \frac{2\pi^2 \mu V}{h\eta g\,[f(v)]_{m_1}}$$

Digitized by Google

sera exprimé par

$$t_1 = \frac{4\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\cdot\frac{c}{\alpha V_1}\cdot\left(1+\frac{\alpha V_1}{4c}t_1\right)^2,$$

d'où l'on tire

$$t_1 = \frac{2h\eta\alpha\cos\varphi}{\pi^2\mu}\cdot\frac{c}{\alpha V_1}\left[1-2\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}-\sqrt{1-4\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}}\right].$$

L'intervalle de temps depuis le moment où $\nu = \frac{\pi}{2}$ jusqu'au moment où ν est de nouveau égal à $\frac{\pi}{2}$ ($n°$ 118)

$$t_2 - t_1 = \frac{2\pi^2\mu V}{h\eta g\,[f(v)]_{m_2}}$$

sera exprimé par

$$t_2 - t_1 = \frac{4\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\cdot\frac{c}{\alpha V_1}\cdot\left[1+\frac{\alpha V_1}{4c}(t_2+t_1)\right]^2$$

d'où l'on tire

$$t_2 = \frac{2h\eta\alpha\cos\varphi}{\pi^2\mu}\cdot\frac{c}{\alpha V_1}\left[1-2\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\left(1+\frac{\alpha V_1}{4c}t_1\right)-\sqrt{1-4\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\left(1+\frac{\alpha V_1}{2c}t_1\right)}\right].$$

On aura de même

$$t_3 = \frac{2h\eta\alpha\cos\varphi}{\pi^2\mu}\cdot\frac{c}{\alpha V_1}\left[1-2\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\left(1+\frac{\alpha V_1}{4c}t_2\right)-\sqrt{1-4\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\left(1+\frac{\alpha V_1}{2c}t_2\right)}\right],$$

. . . . . .

On a calculé successivement, d'après ces formules, les durées $t_1, t_2, \ldots$ et t_6; la durée t_6 a été obtenue de 10;582. Les valeurs de $q_1, q_2, \ldots q_6$ ont été calculées au moyen de la formule

$$q_i = \frac{h\eta\alpha}{2\pi\mu V}[vf(v)]_{m_i} = \frac{h\eta\alpha^2\cos\varphi}{4\pi\mu}\cdot\frac{(\alpha V_1)^2}{gc}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{\alpha V_1}{4c}(t_i+t_{i-1})\right]^3}.$$

Les valeurs de $\nu_2, \nu_3, \ldots \nu_6$; $\delta\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \delta_2, \delta\left(\frac{\pi}{2}, 2\right), \delta_3, \ldots \delta_6, \delta\left(\frac{\pi}{2}, 6\right)$; $t'_2, t'_3, \ldots t'_6$ ont été obtenues au moyen des formules du $n°$ 118.

Digitized by Google

On a inséré dans le tableau suivant les valeurs numériques qui caractérisent le mouvement d'oscillation de l'axe de figure de l'obus de 4[1], tiré avec la vitesse initiale de $305^{m:s}$, sous l'angle de projection de 10°, d'un canon dont le pas des rayures est $\eta = 82$.

t	q_i	$\frac{q_i}{q_{i-1}}$	ν	δ
Secondes				
0	74,316		0	0
1,273		0,8461	90°	1° 32′
2,342	62,881		133° 49′	0 39
2,711		0,8383	90°	0 17
3,085	52,715		42° 6′	0 44
4,308		0,8298	90°	1 54
5,478	43,745		116° 28′	1 10
6,116		0,8197	90°	0 44
6,766	35,858		56° 56′	1 20
8,178		0,8074	90°	2 28
9,585	28,950		104° 21′	1 55
10,582			90°	1 29

121. *Intégration, par approximation, des équations différentielles du mouvement de rotation de l'axe de figure du projectile, quand le tir a lieu sous de grands angles de projection.* Les angles δ peuvent varier dans de larges limites, lorsque le tir a lieu sous de grands angles de projection. Prenons les équations (1_1) $n°$ 117 et substituons-y aux quantités v et $vf(v)$ certaines valeurs moyennes qu'elles prennent dans les limites de l'intégration qui doivent être choisies de manière que $\cos\nu$, $\cos\delta$, tang δ ne changent pas de signe entre ces limites. Dans ce cas la première des équations (1_1) $n°$ 117 devient

$$\frac{d\sin\nu}{d\delta} = q\cos\delta - \frac{\sin\nu}{\operatorname{tang}\delta},$$

où l'on a posé pour abréger

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q = \frac{l\eta\alpha}{2\pi\mu\overline{V}}\,[vf(v)]_m.$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont l'intégrale est

$$\sin\nu = \frac{1}{\sin\delta}\left(\frac{q}{2}\sin^2\delta + C\right).$$

Digitized by Google

En désignant par ν_i et δ_i les angles ν et δ qui correspondent au temps t_i, on a

$$\sin\delta . \sin\nu = \frac{q}{2}\sin^2\delta + \sin\delta_i\left(\sin\nu_i - \frac{q}{2}\sin\delta_i\right),$$

d'où l'on tire

$$(2)\ldots \sin\delta = \frac{1}{q}\left[\sin\nu \pm \sqrt{1 - q\sin\delta_i(2\sin\nu_i - q\sin\delta_i) - \cos^2\nu}\right].$$

Cette équation ne diffère de l'équation (2) $n°$ 118 qu'en ce qu'elle ne contient que sin δ et sin δ_i au lieu de δ et δ_i.

La seconde des équations (1_1) $n°$ 117 devient

$$\frac{d\delta}{\cos\nu} = \frac{g}{\alpha(v)_m}dt.$$

Le tir courbe ayant lieu avec des charges considérables et avec de très petites charges, la valeur de $\frac{q}{2}$ peut être plus grande que l'unité, égale à l'unité, ou plus petite que l'unité.

122. *Cas du tir courbe quand* $\frac{q}{2} > 1$.

En prenant la différentielle de l'équation (2), $n°$ 121 on a

$$\cos\delta\, d\delta = \frac{1}{q}\left[\cos\nu\,\delta\nu \pm \frac{\sin\nu\cos\nu\, d\nu}{\sqrt{1 - q\sin\delta_i(2\sin\nu_i - q\sin\delta_i) - \cos^2\nu}}\right],$$

et en la substituant dans l'équation

$$\frac{d\delta}{\cos\nu} = \frac{g}{\alpha(v)_m}dt,$$

on obtient

$$\frac{1}{\cos\delta}\left[d\nu \pm \frac{d\cos\nu}{\sqrt{1 - q\sin\delta_i(2\sin\nu_i - q\sin\delta_i) - \cos^2\nu}}\right] = -\frac{lng}{2\kappa\mu V}[f(v)]_m\, dt.$$

L'intégration de cette équation serait très difficile, si l'on substituait à cos δ sa valeur en fonction de ν tirée de l'éq. (2) $n°$ 121. Pour faciliter les recherches, remplaçons cos δ par sa valeur moyenne $(\cos\delta)_m$ qu'il prend dans les limites de l'intégration depuis $t = t_i$ jusqu'à t et depuis $\nu = \nu_i$ jusqu'à ν, limites qui, comme on l'a observé, doivent être choisies de manière que cos ν et cos δ ne changent pas de signe entre elles. On obtient ainsi:

Digitized by Google

dans le cas du signe positif devant le radical de l'expression sin δ

$$(3)..\nu-\nu_i+\arccos\frac{\cos\nu}{\sqrt{1-q\sin\delta_i(2\sin\nu_i-q\sin\delta_i)}}-\arccos\frac{\cos\nu_i}{\sqrt{1-q\sin\delta_i(2\sin\nu_i-q\sin\delta_i)}}$$
$$=\frac{l\eta g\,[f(v)]_m(\cos\delta)_m}{2\pi\mu V}(t-t_i).$$

et dans le cas du signe négatif devant le radical de l'expression sin δ

$$(3_1)..\nu-\nu_i+\arcsin\frac{\cos\nu}{\sqrt{1-q\sin\delta_i(2\sin\nu_i-q\sin\delta_i)}}-\arcsin\frac{\cos\nu_i}{\sqrt{1-q\sin\delta_i(2\sin\nu_i-q\sin\delta_i)}}$$
$$=\frac{l\eta g\,[f(v)]_m(\cos\delta)_m}{2\pi\mu V}(t-t_i).$$

Ces équations ne diffèrent des équations (4) et (4_1) du $n°$ 118 qu'en ce qu'elles ne contiennent dans leurs premiers membres que $\sin\delta_i$ au lieu de δ_i et dans leurs seconds membres que $l\,(\cos\delta)_m$ au lieu de h.

En considérant les mêmes intervalles que ceux du $n°$ 118, on obtient

$$\nu_1=o,\ \sin\delta_1=o,\ t=o;$$

$$\nu=\frac{\pi}{2},\ \sin\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,1\right)}=\frac{2}{q_1},\ t_1=\frac{2\pi^2\mu V}{l\eta g\,[f(v)]_{m_1}(\cos\delta)_{m_1}};$$

$$\cos\nu_2=-\left(\frac{2q_2}{q_1}-1\right),\ \sin\delta_2=\frac{1}{q_2}\sin\nu_2,\ t'_2-t_1=\frac{\nu_2}{\pi}(t_2-t_1);$$

$$\nu=\frac{\pi}{2},\ \sin\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,2\right)}=\frac{1}{q_2}\Big(1-\cos(\pi-\nu_2)\Big),\ t_2-t_1=\frac{2\pi^2\mu V}{l\eta g[f(v)]_{m_2}(\cos\delta)_{m_2}};$$

$$\cos\nu_3=1-\frac{q_3}{q_2}\Big(1-\cos(\pi-\nu_2)\Big),\ \sin\delta_3=\frac{1}{q_3}\sin\nu_3,\ t'_3-t_2=\frac{\nu_3}{\pi}(t_3-t_2);$$

$$\nu=\frac{\pi}{2},\ \sin\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\,3\right)}=\frac{1}{q_3}(1+\cos\nu_3),\ t_3-t_2=\frac{2\pi^2\mu V}{l\eta g\,[f(v)]_{m_3}(\cos\delta)_{m_3}};$$

. . . . . .

Ces formules font voir que tous les angles δ sont moindres que $\frac{\pi}{2}$, et que les propriétés du mouvement d'oscillation de l'axe de figure dans ce cas sont les mêmes que celles déduites au $n°$ 118.

123. *Oscillation moyenne de l'axe de figure.* Si l'on se borne

Digitized by Google

dans les expressions de $\frac{q_2}{q_1}, \frac{q_3}{q_2}, \ldots$ aux termes qui contiennent $\frac{\pi^2\mu}{l\eta}$ à la première puissance, on aura

$$\cos(\pi - \nu_2) = \cos\nu_3 = \cos(\pi - \nu_4) = \cos\nu_5 = \ldots = \cos\nu_l$$
$$= 1 - 4\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}$$

et

$$\sin\nu_l = \sqrt{8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}}.$$

Dans chaque demi-oscillation moyenne de l'axe de figure les valeurs de sin ν seront comprises entre les limites de 1 et de $\sqrt{8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}}$.

Les angles δ seront exprimés:

dans le mouvement ascendant de l'axe de figure par

$$\sin\delta = \frac{1}{q}\left[\sin\nu - \sqrt{\sin^2\nu - 8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}}\right],$$

et dans le mouvement descendant de cet axe par

$$\sin\delta = \frac{1}{q}\left[\sin\nu + \sqrt{\sin^2\nu - 8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}}\right],$$

où:

$$q = \frac{l\eta\alpha}{2\pi\mu V}\,[vf(v)]_m,$$

et $[vf(v)]_m$ étant une valeur moyenne du produit $vf(v)$ sur toute l'étendue de la trajectoire, on peut poser (n° 119)

$$[vf(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^2}{2gt}\left[1 - \frac{1}{\left[1 + \frac{n-1}{2}\left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1} t\right]^{\frac{2}{n-1}}}\right].$$

Les valeurs de sin δ_l et de cos δ_l qui correspondent aux angles limites $\nu = \nu_l$ auront pour expressions

$$\sin\delta_l = \frac{1}{q}\sqrt{8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}},$$

$$\cos\delta_l = 1 - \frac{4}{q^2}\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}.$$

Digitized by Google

Les valeurs de $\sin\delta_{\left(\frac{\pi}{2}, a\right)}$ et de $\cos\delta_{\left(\frac{\pi}{2}, a\right)}$ qui correspondent à l'angle $\nu = \frac{\pi}{2}$ dans le mouvement ascendant de l'axe de figure auront pour expressions

$$\sin\delta_{\left(\frac{\pi}{2}, a\right)} = \frac{4}{q}\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi},$$

$$\cos\delta_{\left(\frac{\pi}{2}, a\right)} = 1,$$

et les valeurs de $\sin\delta_{\left(\frac{\pi}{2}, d\right)}$ et de $\cos\delta_{\left(\frac{\pi}{2}, d\right)}$ qui correspondent à l'angle $\nu = \frac{\pi}{2}$ dans le mouvement descendant de cet axe auront pour expressions

$$\sin\delta_{\left(\frac{\pi}{2}, d\right)} = \frac{1}{q}\left(2 - 4\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}\right),$$

$$\cos\delta_{\left(\frac{\pi}{2}, d\right)} = \left(1 - \frac{2}{q^2}\right) + \frac{8}{q^2}\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}.$$

On aura pour la durée moyenne τ, correspondante à deux valeurs successives de l'angle ν égales à $\frac{\pi}{2}$, l'expression

$$\tau = \frac{2\pi^2\mu V}{l\eta g\,[f(v)]_m\,(\cos\delta)_m},$$

dans laquelle:

les valeurs de $\cos\delta$ étant comprises dans l'intervalle d'une demi-oscillation ascendante de l'axe de figure entre les limites de 1 et de $1 - \frac{4}{q^2}\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}$, et dans l'intervalle d'une demi-oscillation descendante de cet axe entre les limites de $1 - \frac{4}{q^2}\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}$ et de $\left(1 - \frac{2}{q^2}\right) + \frac{8}{q^2}\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}$, on peut prendre pour $(\cos\delta)_m$ la moyenne arithmétique de ces quatre valeurs et par suite poser

$$(\cos\delta)_m = 1 - \frac{1}{2q^2};$$

Digitized by Google

$[f(v)]_m$, étant une valeur moyenne de la fonction $f(v)$ sur toute l'étendue de la trajectoire, on peut poser ($n°$ 119)

$$[f(v)]_m = \frac{\alpha V_1}{gt}\left[1 - \frac{1}{\left[1 + \frac{n-1}{2}\left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1} t\right]^{\frac{1}{n-1}}}\right].$$

124. *Cas du tir courbe, quand* $\frac{q}{2} \lessgtr 1$. La formule (2) $n°$ 121 donne, depuis l'origine du mouvement où $\delta = o$, $\nu = o$, jusqu'aux valeurs quelconques de δ et ν comprises entre zéro et $\frac{\pi}{2}$,

$$\sin\delta = \frac{2}{q}\sin\nu$$

et par conséquent

(4)..... $\sin\nu = \frac{q}{2}\sin\delta,$

$$\cos\nu = \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 \sin^2\delta}.$$

Pour $\frac{q}{2} = 1$, on a $\delta = \nu$; pour $\frac{q}{2} < 1$, on a $\delta > \nu$ et l'angle δ atteint $\frac{\pi}{2}$ avant l'angle ν.

En mettant la valeur de $\cos\nu$ dans l'expression ($n°$ 121)

$$\frac{d\delta}{\cos\nu} = \frac{g}{\alpha(v)_m}dt,$$

on obtient

(5)..... $$\int_o^\delta \frac{d\delta}{\sqrt{1 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 \sin^2\delta}} = \frac{g}{\alpha(v)_m}t.$$

L'intégrale $\int_o^\delta \frac{d\delta}{\sqrt{1 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 \sin^2\delta}} = F\left(\delta, \frac{q}{2}\right)$ est une intégrale elliptique de première espèce dont l'amplitude est δ et l'angle du mo-

Digitized by Google

dule $\theta = \arcsin \frac{q}{2}$. Legendre a calculé des tables de cette intégrale, au moyen desquelles, connaissant la valeur de $\frac{g}{\alpha (v)_m} t$ et la valeur de $\frac{q}{2}$ et par suite celle de θ, on trouve la valeur correspondante de δ. L'angle ν est déterminé par l'éq. 4.

En se basant sur la transformation de Landen, à défaut de tables, on peut, sans grande erreur, poser:

dans le cas de $\frac{q}{2} > 0{,}75$

$$\int_0^{\delta} \frac{d\delta}{\sqrt{1 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 \sin^2 \delta}} = \frac{2}{1 + \frac{q}{2}} \log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right),$$

où ψ est lié avec l'angle δ par la relation

$$\sin (2\psi - \delta) = \frac{q}{2} \sin \delta \text{ ou } \operatorname{tang} (\delta - \psi) = \frac{1 - \frac{q}{2}}{1 + \frac{q}{2}} \operatorname{tang} \psi,$$

et dans le cas de $\frac{q}{2} < 0{,}75$

$$\int_0^{\delta} \frac{d\delta}{\sqrt{1 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 \sin^2 \delta}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}\right) \operatorname{tang} \delta}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} \operatorname{tang}^2 \delta}.$$

En mettant dans la formule (5) la valeur approchée de l'intégrale dans le cas de $\frac{q}{2} > 0{,}75$, on tire

$$(6) \ldots\ldots\ldots \psi = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arc\,tang} e^{-\frac{1 + \frac{q}{2}}{2} \cdot \frac{gt}{\alpha (v)_m}},$$

et ψ étant connu on obtient δ à l'aide de l'équation

$$(7) \ldots\ldots\ldots \operatorname{tang} (\delta - \psi) = \frac{1 - \frac{q}{2}}{1 + \frac{q}{2}} \operatorname{tang} \psi.$$

Digitized by Google

Pour $\frac{q}{2} = 1$ on a $\psi = \delta$ et l'on voit que δ ne peut atteindre $\frac{\pi}{2}$ qu'après un temps infini. Pour $\frac{q}{2} = 0{,}75$ l'angle δ est moindre que $\frac{\pi}{2}$, quand $\psi < 69° 18'$ et par suite (éq. 6) quand

$$0{,}875 \frac{gt}{\alpha (v)_m} < \frac{\text{Log cot } 10°21'}{\text{Log } e}$$

ou

$$0{,}875 \cdot \frac{gt}{\alpha (v)_m} < 1{,}7,$$

et cette condition est toujours remplie, lorsque le tir a lieu sous des angles de projection qui ne dépassent pas 45 *).

---

*) En effet, le cas que l'on considère supposant une petite vitesse initiale, on peut prendre pour la résistance de l'air (n° 120) l'expression proportionnelle au carré de la vitesse, c'est-à-dire poser $f(v) = \frac{v^2}{2gc}$ et l'on peut négliger, devant l'unité, les termes qui contiennent $\frac{x}{c}$ et $\frac{V^2}{gc}$ à des puissances supérieures à la première. En calculant la projection verticale de la trajectoire dans l'hypothèse que la résistance de l'air est tangentielle à la trajectoire et est en grandeur égale à la composante de la résistance suivant l'axe de figure, ce qui donne pour des angles de projection qui ne dépassent pas 45°, comme on le verra plus loin, une approximation suffisante pour la pratique, on aura la portée sur un terrain à hauteur de la bouche à feu au moyen de la formule (1), n° 52, en y faisant $y = o$, et l'on obtiendra

$$\frac{V^2 \sin 2\varphi}{g} = x F\left(\frac{\alpha x}{c}\right);$$

observant (n° 52) que $F\left(\frac{\alpha x}{c}\right) = \frac{e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{\alpha x}{c} - 1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^2}$ et développant cette fonction en série, en négligeant devant l'unité les termes qui contiennent $\frac{x}{c}$ à des puissances supérieures à la première, on aura

$$\frac{V^2 \sin 2\varphi}{g} = x\left(1 + \frac{\alpha x}{3c}\right),$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{V^2 \sin 2\varphi}{g}\left(1 - \frac{\alpha V^2 \sin 2\varphi}{3gc}\right).$$

Digitized by Google

En mettant dans la formule (5) la valeur approchée de l'intégrale dans le cas de $\frac{q}{2} < 0{,}75$, on trouve

$$\frac{\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)\operatorname{tang}\delta}{1-\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\operatorname{tang}^2\delta} = \operatorname{tang}\left[\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)\frac{\alpha}{\alpha(v)_m}t\right],$$

On obtiendra la durée au moyen de la formule (5) n° 52

$$t = \frac{s}{V_1} F_1\left(\frac{\alpha x}{2c}\right)$$

et en développant $F_1\left(\frac{\alpha x}{2c}\right) = \dfrac{e^{\frac{\alpha x}{2c}} - 1}{\frac{\alpha x}{2c}}$ en série, on aura

$$t = \frac{x}{V_1}\left(1+\frac{\alpha x}{4c}\right).$$

En substituant à x sa valeur et en négligeant devant l'unité les termes qui contiennent $\frac{V^2}{gc}$ à des puissances supérieures à la première on trouve

$$t = \frac{2V\sin\varphi}{g}\left(1-\frac{\alpha V^2\sin 2\varphi}{12gc}\right).$$

Les valeurs de $v, f(v), vf(v)$ étant

$$v = \alpha v_1 = \frac{\alpha V_1}{1+\frac{\alpha V_1}{2c}t}, f(v) = f(\alpha v_1) = \frac{(\alpha V_1)^2}{2gc}\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha V_1}{2c}t\right)^2}, vf(v) = \frac{(\alpha V_1)^3}{2gc}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha V_1}{2c}t\right)^3},$$

on peut poser

$$(v)_m = \frac{\alpha V_1}{t}\int_0^t \frac{dt}{1+\frac{\alpha V_1}{2c}t}, [f(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^2}{2gc.t}\int_0^t \frac{dt}{\left(1+\frac{\alpha V_1}{2c}t\right)^2}, [vf(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^3}{2gct}\int_0^t \frac{dt}{\left(1+\frac{\alpha V_1}{2c}t\right)^3}$$

ou

$$(v)_m = \frac{2c}{t}\log\left(1+\frac{\alpha V_1}{2c}t\right), [f(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^2}{2gc}\cdot\frac{1}{1+\frac{\alpha V_1}{2c}t}, [vf(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^3}{2gc}\cdot\frac{1+\frac{\alpha V_1}{4c}t}{\left(1+\frac{\alpha V_1}{2c}t\right)^2}.$$

En développant $\log\left(1+\frac{\alpha V_1}{2c}t\right)$ en série et en substituant à t sa valeur, on obtient

Digitized by Google

d'où l'on tire

$$(8)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \operatorname{tang}\delta =$$

$$= \frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\operatorname{tg}\left[\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)\frac{g}{\alpha(v)_m}t\right]}\left[\sqrt{1+\frac{4\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\operatorname{tg}^2\left[\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)\frac{g}{\alpha(v)_m}t\right]}{\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)^2}}-1\right].$$

L'avant-dernière équation fait voir que l'angle δ est moindre que $\frac{\pi}{2}$, quand

$$\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)\frac{g}{\alpha(v)_m}t < \pi.$$

Cette condition est toujours satisfaite, lorsque le tir a lieu sous

---

$$(v)_m = \alpha V_1\left(1-\frac{\alpha V^2\sin 2\varphi}{4gc}\right),\ [f(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^2}{2gc}\left(1-\frac{\alpha V^2\sin 2\varphi}{2gc}\right),$$

$$[vf(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^3}{2gc}\left(1-\frac{3\alpha V^2\sin 2\varphi}{4gc}\right).$$

La valeur de $q = \frac{l\eta\alpha}{2\pi\mu V}[vf(v)]_m$ donne

$$\frac{q}{2} = \frac{l\eta\alpha^2\cos\varphi}{8\pi\mu}\frac{(\alpha V_1)^2}{gc}\left(1-\frac{3\alpha V^2\sin 2\varphi}{4gc}\right),$$

d'où l'on tire

$$\frac{V^2}{gc} = \frac{8\pi\mu}{l\eta\alpha^4\cos^3\varphi}\cdot\frac{q}{2}\left(1+\frac{6\pi\mu\sin 2\varphi}{l\eta\alpha^3\cos^3\varphi}\cdot\frac{q}{2}\right).$$

En posant $\frac{q}{2} = 0{,}75$ et en mettant cette valeur de $\frac{V^2}{gc}$ dans les expressions de t et $(v)_m$, on trouve que la condition

$$0{,}875\,\frac{gt}{\alpha(r)_m} < 1{,}7$$

se réduit à la suivante

$$0{,}875\,\frac{2\sin\varphi}{\alpha^2\cos\varphi}\left(1+\frac{\pi\mu\sin 2\varphi}{l\eta\alpha^3\cos^3\varphi}\right) < 1{,}7$$

qui est toujours satisfaite, quand $\varphi \leqq 45°$.

Digitized by Google

des angles de projection qui ne dépassent pas 45° *).

Donc, lorsque $\frac{q}{2} \leqq 1$ et le tir a lieu sous des angles de projection qui ne dépassent pas 45°, les angles δ et ν, croissant à partir de zéro, n'atteignent pas $\frac{\pi}{2}$, et la dérivée $\frac{d\delta}{dt} = \frac{g}{\alpha v} \cos \nu$ fait voir qu'il n'y a pas de mouvement d'oscillation de l'axe de figure.

§ II.

CALCUL DE LA TRAJECTOIRE D'UN PROJECTILE OBLONG DANS L'AIR.

125. *Équations différentielles du mouvement de translation d'un projectile oblong dans l'air.* Prenons pour origine des coordonnées le lieu du centre de gravité du projectile à son départ de la bouche à feu; pour l'axe des x l'horizontale qui est située dans le plan vertical passant par la tangente au point de départ et qui est dirigée dans le sens du tir; pour l'axe des y la verticale dirigée de bas en haut; pour l'axe des z l'horizontale qui est perpendiculaire au plan des xy et qui est dirigée à droite du spectateur, placé au point de départ et observant la trajectoire. Soit O (fig. 19) le lieu du centre de gravité du projectile après le temps t. Menons par le point O les

*) En effet, en mettant la valeur de

$$\frac{V^2}{gc} = \frac{8\pi\mu}{l\eta\alpha^4\cos^3\varphi} \cdot \frac{q}{2}\left(1 + \frac{6\pi\mu \sin 2\varphi}{l\eta\alpha^3\cos^3\varphi} \cdot \frac{q}{2}\right)$$

dans les expressions de

$$t = \frac{2V\sin\varphi}{g}\left(1 - \frac{\alpha V^2 \sin 2\varphi}{12gc}\right) \text{ et de } (v)_m = \alpha V_1\left(1 - \frac{\alpha V^2 \sin 2\varphi}{4gc}\right)$$

on trouve que la condition

$$\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}\right) \frac{g}{\alpha (v)_m} t < \pi$$

se réduit à

$$\frac{2\sin\varphi}{\alpha^2\cos\varphi}\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)\left(1 + \frac{4\pi\mu \sin 2\varphi}{3l\eta\alpha^3\cos^3\varphi} \cdot \frac{q}{2}\right) < \pi$$

qui est toujours satisfaite, quand $\varphi \leqq 45^0$.

Digitized by Google

axes des coordonnées x, y, z parallèles à ceux du point de départ et figurons-nous une sphère dont le centre est en O. Soit OT la direction de la tangente et OA celle de l'axe de figure. Désignons par v la vitesse du projectile au point O, dirigée suivant OT; par θ l'angle que fait la tangente OT avec le plan horizontal zx; on aura $yT = \frac{\pi}{2} - \theta$; représentons par ω l'angle xyT que fait le plan vertical passant par la tangente avec le plan des xy, par δ l'angle AOT que fait l'axe de figure avec la tangente, angle égal à l'arc AT; par ν l'angle ATy que fait le plan vertical passant par la tangente avec le plan passant par la même tangente et l'axe de figure; par g l'accélération de la gravité; par P le poids du projectile.

En faisant abstraction du frottement de l'air contre la surface du projectile ainsi que de l'augmentation de pression sur certaines parties de sa surface et de la diminution sur d'autres, qui résultent du mouvement simultané de translation et de rotation, on n'a à considérer, parmi les forces extérieures qui agissent sur le projectile pendant son mouvement dans l'air, que celle de la gravité et celle de la résistance de l'air qui s'exerce normalement sur chaque élément de la surface du projectile, soumis à l'action de la résistance.

Les résistances normales de l'air sur chaque élément de la surface soumis à l'action de la résistance se réduisent ($n°$ 17) à la résultante ρ située dans le plan $TANT'A'$ qui passe par l'axe de figure du projectile et la tangente et qui fait, dans la plupart des cas, avec la direction OA', contraire à l'axe de figure, un angle $\rho OA'$ plus grand que l'angle $\delta = AT$ formé par l'axe de figure et la tangente. Décomposons dans le plan $TAT'A'$ la résistance résultante ρ en deux: l'une ρ_t dans le sens OT' contraire à celui de la tangente et l'autre ρ_n dans le sens ON perpendiculaire à la tangente. La projection de ρ_t sur l'axe x sera égale à $-\rho_t \cos(Tx)$, et comme le triangle yTx donne $\cos(Tx) = \cos\theta \cos\omega$, on a $-\rho_t \cos(Tx) = -\rho_t . \cos\theta \cos\omega$. La projection de ρ_t sur l'axe y sera égale à $-\rho_t . \cos(yT) = -\rho_t . \sin\theta$. La projection de ρ_t sur l'axe z sera égale à $-\rho_t . \cos(Tz)$ et comme le triangle yTz donne $\cos(Tz) = \cos\theta . \cos(zyT) = \cos\theta . \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \cos\theta \sin\omega$ on a $-\rho_t . \cos(Tz) = -\rho_t \cos\theta \sin\omega$.

Digitized by Google

La projection de ρ_n sur l'axe x sera égale à $\rho_n \cdot \cos(Nx)$; mais le triangle NTx donne $\cos(Nx) = \sin(Tx) \cdot \cos(NTx) = \sin(Tx) \cdot \cos(\nu + yTx) = \sin(Tx)[\cos\nu \cdot \cos(yTx) - \sin\nu \sin(yTx)]$, le triangle yTx donne $\cos(yx) = o = \sin\theta \cos(Tx) + \cos\theta \sin(Tx) \cdot \cos(yTx)$ et on a vu que $\cos(Tx) = \cos\theta \cos\omega$; par suite on a $\rho_n \cdot \cos(Nx) = -\rho_n \cos\nu \sin\theta \cos\omega - \rho_n \sin\nu \sin\omega$. La projection de ρ_n sur l'axe y sera égale à $\rho_n \cdot \cos(Ny)$; mais le triangle NyT donne $\cos(Ny) = \cos\theta \cos\nu$; par suite $\rho_n \cos(Ny) = \rho_n \cos\nu \cos\theta$. La projection de ρ_n sur l'axe z sera égale à $\rho_n \cos(Nz)$; mais le triangle NTz donne $\cos(Nz) = \sin(Tz) \cdot \cos(NTz) = \sin Tz \cdot \cos(yTz - \nu) = \sin(Tz)[\cos(yTz) \cdot \cos\nu + \sin(yTz) \cdot \sin\nu]$, le triangle yTz donne $\cos(yz) = o = \sin\theta \cdot \cos(Tz) + \cos\theta \cdot \sin(Tz) \cdot \cos(yTz)$ et on a vu que $\cos(Tz) = \cos\theta \cdot \sin\omega$; par suite on a $\rho_n \cos(Nz) = \rho_n \sin\nu \cos\omega - \rho_n \cos\nu \sin\theta \sin\omega$.

Les projections de la vitesse v sur les axes x, y, z seront égales à $v \cos\theta \cos\omega$, $v \sin\theta$, $v \cos\theta \sin\omega$; nous les désignerons par v_1, v_y, v_z.

Les équations différentielles du mouvement de translation suivant les axes x, y, z seront

$$\frac{dv_1}{dt} = -g\frac{\rho_t \cos\theta \cos\omega}{P} - g\frac{\rho_n \cos\nu \sin\theta \cos\omega}{P} - g\frac{\rho_n \sin\nu \sin\omega}{P},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - g\frac{\rho_t \sin\theta}{P} + g\frac{\rho_n \cos\nu \cos\theta}{P},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g\frac{\rho_t \cos\theta \sin\omega}{P} + g\frac{\rho_n \sin\nu \cos\omega}{P} - g\frac{\rho_n \cos\nu \sin\theta \sin\omega}{P}.$$

Mais $\rho_t = \rho\cos(\rho, T')$, $\rho_n = \rho\sin(\rho, T')$ et la composante de la résistance en sens contraire de l'axe de figure $\rho_A = \rho\cos(\rho, A')$, de sorte que

$$\rho_t = \rho_A \frac{\cos(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}, \quad \rho_n = \rho_A \frac{\sin(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}.$$

En mettant ces expressions dans les équations du mouvement et désignant $\frac{\rho_A}{P}$ par $f(v)$, ces équations deviennent

$$\frac{dv_1}{dt} = -gf(v)\frac{\cos(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}\cos\theta\cos\omega - gf(v)\frac{\sin(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}\cos\nu\sin\theta\cos\omega - gf(v)\frac{\sin(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}\sin\nu\sin\omega,$$

Digitized by Google

$$\frac{dv_y}{dt} = -g\left(1 + f(v)\,\frac{\cos(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}\sin\theta\right) + gf(v)\,\frac{\sin(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}\cos\nu\cos\theta,$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -gf(v)\frac{\cos(\rho,T')}{\cos(\rho,A')}\cos\theta\sin\omega + gf(v)\frac{\sin(\rho,T')}{\cos(\rho,A')}\sin\nu\cos\omega - gf(v)\frac{\sin(\rho,T')}{\cos(\rho,A')}\cos\nu\sin\theta\sin\omega.$$

La figure 5 représente les courbes des angles (ρ, T') et (ρ, A') en fonction des angles δ pour les projectiles semblables à notre obus de 4^1. A l'aide des valeurs des angles (ρ, T') et (ρ, A') on a calculé celles des rapports $\frac{\cos(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}$ et $\frac{\sin(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}$ que l'on a construites sur les figures 20 et 21, en prenant les angles δ pour abscisses et les rapports $\frac{\cos(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}$ et $\frac{\sin(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}$ pour ordonnées. La courbe des valeurs de $\frac{\cos(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}$ fait voir que, pour de petits angles δ, ces valeurs sont très proches de l'unité et que, par suite, dans le tir direct on peut prendre $\frac{\cos(\rho, T')}{\cos(\rho, A')} = 1$. Dans le tir courbe, quand $\frac{q}{2} > 1$, les angles δ, pour des valeurs de $\frac{q}{2}$ qui surpassent à peine 3, sont inférieurs à 20°, de sorte que dans ce cas la valeur moyenne de $\frac{\cos(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}$ diffère peu de l'unité et on peut la prendre égale à l'unité. Dans le tir courbe, quand $\frac{q}{2} \leqq 1$, les angles δ varient dans de larges limites; mais dans ce cas, qui suppose de petites vitesses initiales, la résistance de l'air varie peu dans le trajet du projectile et l'on peut, pour faciliter les calculs, prendre, au lieu de la valeur variable $\frac{\cos(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}$ qui est assez bien représentée par la formule $\frac{\cos(\rho, T')}{\cos(\rho, A')} = 1 + 3{,}2\,\delta^2$, sa valeur moyenne

$$\beta = \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}(1 + 3{,}2\,\delta^2)\,d\delta = 1 + 1{,}07\,\delta^2.$$

La relation entre les valeurs de $\frac{\sin(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}$ et les angles δ peut être exprimée, dans le cas de petits angles δ, par

$$\frac{\sin(\rho, T')}{\cos(\rho, A')} = k\delta,$$

Digitized by Google

où pour les projectiles semblables à notre obus de 4^1

$$k = 2{,}05.$$

La droite exprimée par cette équation est représentée sur la figure 21 par des traits interrompus.

La relation entre les valeurs de $\frac{\sin(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}$ et les angles δ peut être exprimée, dans le cas d'angles δ qui varient dans de larges limites, par

$$\frac{\sin(\rho, T')}{\cos(\rho, A')} = m \sin\delta \cos\delta,$$

où l'on a pris, pour les projectiles semblables à notre obus de 4^1,

$$m = 2{,}1$$

afin de représenter avec une approximation suffisante les valeurs de $\frac{\sin(\rho, T')}{\cos(\rho, A')}$ dans les limites de $\delta = o$ à $\delta = 20°$, les angles δ ne dépassant $20°$ que dans le cas de tir avec de très petites charges.

La courbe exprimée par cette équation est pointée sur la figure 21.

Les dérivations des projectiles oblongs du plan vertical du tir étant toujours petites relativement aux abscisses x et les angles ω que font les plans verticaux passant par les tangentes avec le plan vertical du tir ayant toujours une faible valeur, on peut poser $\cos\omega = 1$ et $\sin\omega = \text{tang}\,\omega = \omega$.

Les équations différentielles du mouvement de translation deviennent:

dans le cas du tir direct

$$(1)\ldots\ldots\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -gf(v)\cos\theta - kg\delta.\cos\nu f(v)\sin\theta - kg\delta.\sin\nu.\omega f(v), \\ \frac{dv_y}{dt} = -g\left(1 + f(v)\sin\theta\right) + kg\delta.\cos\nu f(v).\cos\theta, \\ \frac{dv_z}{dt} = -g\omega f(v)\cos\theta + kg\delta.\sin\nu.f(v) - kg\delta.\cos\nu.\omega.f(v)\sin\theta, \end{cases}$$

Digitized by Google

dans le cas du tir courbe, quand $\frac{q}{2} > 1$

$$(2)\ldots\ldots\begin{cases}\frac{dv_1}{dt} = -gf(v)\cos\theta - mg\sin\delta\cos\delta\cos\nu f(v)\sin\theta - mg\sin\delta\cos\delta\sin\nu.\omega f(v),\\ \frac{dv_y}{dt} = -g\left(1 + f(v)\sin\theta\right) + mg\sin\delta\cos\delta\cos\nu f(v)\cos\theta,\\ \frac{dv_z}{dt} = -g\omega f(v)\cos\theta + mg\sin\delta\cos\delta\sin\nu.f(v) - mg\sin\delta\cos\delta\cos\nu.\omega f(v)\sin\theta,\end{cases}$$

dans le cas du tir courbe, quand $\frac{q}{2} < 1$

$$(3)\ldots\ldots\begin{cases}\frac{dv_1}{dt} = -g\beta f(v)\cos\theta - mg\sin\delta\cos\delta\cos\nu f(v)\sin\theta - mg\sin\delta\cos\delta\sin\nu\omega f(v),\\ \frac{dv_y}{dt} = -g\left(1 + \beta f(v)\sin\theta\right) + mg\sin\delta\cos\delta\cos\nu f(v)\cos\theta,\\ \frac{dv_z}{dt} = -g\beta\omega f(v)\cos\theta + mg\sin\delta\cos\delta\sin\nu f(v) - mg\sin\delta\cos\delta\cos\nu.\omega f(v)\sin\theta.\end{cases}$$

Ces équations différentielles avec celles du mouvement de l'axe de figure (*n*° 117) déterminent entièrement le mouvement d'un projectile oblong.

Les équations (1) et (2) contenant des termes qui dépendent de cos ν qui change de signe pendant le trajet du projectile, leur intégration, même approximative, depuis l'origine du mouvement jusqu'au point de chute, dans l'état actuel de l'analyse, présente des difficultés insurmontables, et il devient indispensable de les intégrer, même approximativement, par parties. Pour faciliter les calculs nous nous bornerons, dans les équations différentielles du mouvement suivant l'axe des x et celui des y, aux termes qui dépendent de la composante tangentielle de la résistance et de la gravité, et dans l'équation différentielle du mouvement suivant l'axe des z aux deux premiers termes de son second membre. Nous calculerons, comme corrections, les termes négligés qui ont une très faible influence sur les résultats, et, pour se faire une idée plus nette de leur influence, nous déterminerons les corrections en appliquant les calculs à un exemple particulier.

Les termes des équations (3), lorsque les angles de projection ne

Digitized by Google

dépassent pas 45°, ne changent pas de signe; mais dans ce cas, qui suppose une petite vitesse initiale et une faible perte de vitesse sur tout le trajet du projectile, on peut aussi, pour première approximation, se borner dans les équations différentielles du mouvement suivant les axes des x et des y aux termes qui dépendent de la composante tangentielle de la résistance et de la gravité, et dans l'équation différentielle du mouvement suivant l'axe des z aux deux premiers termes de son second membre, en calculant les termes négligés comme corrections.

126. *Intégration, par approximation, des équations différentielles du mouvement de translation dans le cas du tir direct.* En se bornant dans la première et la seconde des équations (1) n° 125 aux termes qui dépendent de la composante tangentielle de la résistance et de la gravité et dans la troisième de ces équations aux deux premiers termes de son second membre, on obtient

$$\frac{dv_1}{dt} = -gf(v)\cos\theta,$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g\left(1 + f(v)\sin\theta\right),$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g\omega f(v)\cos\theta + kg\delta\sin\nu f(v).$$

Les deux premières équations différentielles détcrminent sur le plan vertical du tir le mouvement de translation du projectile comme celui d'un point matériel, dont la masse est égale à celle du projectile, et qui est soumis à l'action de la force verticale de la gravité et à celle de la résistance dirigée en sens contraire de la tangente et égale en grandeur à la composante de la résistance dans le sens contraire à l'axe de figure. Par suite les équations finies du mouvement sur le plan vertical du tir, qui se déduisent de ces équations différentielles, sont données par les formules obtenues dans le chapitre II pour les expressions de la résistance de l'air, qui se rapportent aux projectiles oblongs et où l'on doit prendre pour la fonction $f(v)$ le rapport $\frac{p_A}{P}$ de la résistance de l'air dans le sens contraire à l'axe de figure au poids du projectile.

Digitized by Google

La troisième équation différentielle, après la substitution de $\frac{f(\alpha v_1)}{\alpha \cos \theta}$ à la fonction $f(v)$ dans le premier terme de son second membre et de $f(\alpha v_1)$ *) à la fonction $f(v)$ dans le second terme, devient

$$\frac{dv_z}{dt} = \left[k\delta . \sin \nu - \frac{1}{\alpha}\omega\right] g f(\alpha v_1).$$

Les formules (2), (4) et (4_1) du n° 118, obtenues pour les angles δ et ν, ne pouvant être employées que dans des limites entre lesquelles cos ν ne change pas de signe, on ne peut intégrer la dernière équation que par parties, et encore on n'aurait pu ramener les intégrales qu'aux quadratures dont le calcul serait très difficile. Pour faciliter les calculs et obtenir des résultats suffisamment exacts, nous allons intégrer cette équation par parties dans les limites de t_{i-1} à t_i qui correspondent au commencement et à la fin de chaque demi-oscillation de l'axe de figure, en prenant, dans ces intervalles, au lieu du produit variable $\delta . \sin \nu$ et de l'angle variable ω, leurs valeurs moyennes. Nous aurons ainsi

$$v_{z_i} = v_{z_{i-1}} + \left[k(\delta . \sin \nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right] g \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\alpha v_1)\, dt,$$

$$z_i = z_{i-1} + v_{z_{i-1}}(t_i - t_{i-1}) + \left[k(\delta . \sin \nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right] g \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\alpha v_1)\, dt,$$

$$\omega = \operatorname{tang} \omega = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{v_z}{v_1},$$

ou, en substituant à $g \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\alpha v_1)\, dt$ et à $g \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\alpha v_1)\, dt$ leurs valeurs que l'on obtient en intégrant l'équation différentielle du mouvement

*) α est une constante choisie de manière que le produit $\alpha \cos \theta$ diffère le moins possible de l'unité dans les limites de l'arc de la trajectoire que l'on considère. Les valeurs de α sont données dans la table I de l'annexe.

Digitized by Google

$\frac{dv_1}{dt} = -gf(v)\cos\theta$, après y avoir remplacé la fonction $f(v)$ par $\frac{f(\alpha v_1)}{\alpha\cos\theta}$, on trouve

$$(1)\ldots\ v_{z_i} = v_{z_{i-1}} + \left[k(\delta\,.\,\sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right]\alpha(v_1)_i\left[\frac{(v_1)_{i-1}}{(v_1)_i} - 1\right],$$

$$(2)\ldots z_i = z_{i-1} + v_{z_{i-1}}(t_i - t_{i-1}) + \left[k(\delta.\sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right]\alpha(v_1)_{i-1}\left[(t_i - t_{i-1}) - \frac{x_i - x_{i-1}}{(v_1)_{i-1}}\right],$$

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \omega_i = \frac{v_{z_i}}{(v_1)_i}.$$

Le produit $\delta\,.\,\sin\nu$ est toujours croissant ou décroissant dans tout l'intervalle de chaque demi-oscillation *); par suite on peut prendre

---

*) En effet, en représentant par ν_l l'angle limite ν d'une demi-oscillation, on a (n^o 118) dans le mouvement ascendant de l'axe de figure

$$(a)\ldots\ \delta = \sin\nu - \sqrt{\sin^2\nu - \sin^2\nu_l}$$

et dans le mouvement descendant de cet axe

$$(b)\ldots\ \delta = \sin\nu + \sqrt{\sin^2\nu - \sin^2\nu_l}.$$

Multipliant l'éq. (a) par $\sin\delta$ et prenant la dérivée du produit $\delta\,.\,\sin\nu$ par rapport à $\sin\nu$, on obtient

$$\frac{d(\delta\,.\,\sin\nu)}{d\sin\nu} = 2\sin\nu - \frac{2\sin^2\nu - \sin^2\nu_l}{\sqrt{\sin^2\nu - \sin^2\nu_l}};$$

$\sin\nu$ variant dans l'intervalle d'une demi-oscillation de $\sin\nu_l$ à 1, on trouve, en développant $(\sin^2\nu - \sin^2\nu_l)^{-\frac{1}{2}}$ en série,

$$\frac{d(\delta\,.\,\sin\nu)}{d\sin\nu} = -\frac{1}{4}\frac{\sin^4\nu_l}{\sin^3\nu}\left[1 + \frac{\sin^2\nu_l}{\sin^2\nu} + \frac{3.5}{2.3}\cdot\frac{3}{4.2}\cdot\frac{\sin^4\nu_l}{\sin^4\nu} + \frac{3.5.7}{2.3.4}\cdot\frac{4}{5.2^2}\cdot\frac{\sin^6\nu_l}{\sin^6\nu} + \frac{3.5.7.9}{2.3.4.5}\cdot\frac{5}{6.2^3}\cdot\frac{\sin^8\nu_l}{\sin^8\nu} + \ldots\right]$$

quantité négative.

Par suite, durant le mouvement ascendant de l'axe de figure, $\sin\nu$ croissant dans l'intervalle de $\nu_l > \frac{\pi}{2}$ à $\nu = \frac{\pi}{2}$, le produit $\delta\,.\,\sin\nu$ y est décroissant, et $\sin\nu$ décroissant dans l'intervalle de $\nu = \frac{\pi}{2}$ à $\nu_l < \frac{\pi}{2}$, le produit $\delta\,.\,\sin\nu$ y est croissant.

Digitized by Google

pour $(\delta . \sin \nu)_m$ la moyenne arithmétique des valeurs de $\delta . \sin \nu$ qui correspondent ($n°$ 118) au commencement et à la fin de chaque demi-oscillation. L'accroissement de l'angle ω étant faible durant une demi-oscillation, on peut prendre pour ω_m la valeur de ω_{i-1} correspondante à la fin de la demi-oscillation précédente.

Les équations (1), (2) et (3) définissent la projection de la trajectoire sur le plan horizontal.

Nous déterminerons les corrections fournies par les termes négligés en appliquant les calculs à l'exemple suivant.

127. *Calcul de la trajectoire de l'obus de* 4^1, *tiré sous l'angle de projection de* $10°$, *avec une vitesse initiale de* $305^{m:s}$. On peut poser dans ce cas ($n°$ 115)

$$f(v) = \frac{\rho_\Delta}{P} = \frac{v^2}{2gc},$$

où pour l'obus de 4^1 on a $c = 3514^m$.

Le tableau du $n°$ 120 contient les valeurs numériques qui caractérisent le mouvement d'oscillation de l'axe de figure de l'obus de 4^1 dans ce cas.

Les abscisses x qui correspondent aux durées insérées dans ce tableau seront déterminées au moyen de l'équation (5) $n°$ 52

$$t = \frac{x}{V_1} F_1\left(\frac{ax}{2c}\right) = \frac{x}{V_1} \cdot \frac{e^{\frac{ax}{c}} - 1}{\frac{ax}{c}}$$

Multipliant l'éq. (*b*) par sin δ et prenant la dérivée du produit $\delta . \sin \nu$ par rapport à sin ν, on obtient

$$\frac{d(\delta . \sin \nu)}{d \sin \nu} = 2 \sin \nu + \frac{2 \sin^2 \nu - \sin^2 \nu_l}{\sqrt{\sin^2 \nu - \sin^2 \nu_l}};$$

sin ν variant dans l'intervalle d'une demi-oscillation de sin ν_l à 1, cette dérivée est positive.

Par suite durant le mouvement descendant de l'axe de figure, le produit $\delta . \sin \nu$ croît avec sin ν dans l'intervalle de $\nu_l < \frac{\pi}{2}$ à $\nu = \frac{\pi}{2}$, et décroît avec sin ν dans l'intervalle de $\nu = \frac{\pi}{2}$ à $\nu_l > \frac{\pi}{2}$.

Digitized by Google

qui donne

$$x = \frac{2c}{\alpha \operatorname{Log} e} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t\right).$$

Les ordonnées y qui correspondent à ces abscisses sont données par la formule (1) $n°$ 52, et les angles θ par la formule (2) $n°$ 52.

Les projections v_1 de la vitesse sur l'axe des x sont déterminées par la formule (4) $n°$ 52 ou par la formule ($n°$ 118)

$$v_1 = \frac{V_1}{1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t}.$$

En substituant dans les équations (1), (2) et (3) du $n°$ 126 à v_1 et à x leurs valeurs en fonction de t, ces équations deviennent

$$v_{x_\delta} = v_{x_{i-1}} + \left[k(\delta . \sin \nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right] \alpha V_1 \left(\frac{1}{1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t_{i-1}} - \frac{1}{1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t_i}\right),$$

$$z_\delta = z_{i-1} + v_{x_{i-1}}(t_\delta - t_{i-1}) + \left[k(\delta . \sin \nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right] \alpha V_1 \left[\frac{t_\delta - t_{i-1}}{1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t_{i-1}} - \frac{2c}{\alpha V_1 \operatorname{Log} e} \operatorname{Log} \frac{1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t_\delta}{1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t_{i-1}}\right],$$

$$\omega_\delta = \frac{v_{x_\delta}}{(v_1)_\delta} = \frac{v_{x_\delta}}{V_1}\left(1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t_i\right).$$

Pour calculer v_{x_1}, z_1, ω_1 on mettra dans ces formules (tableau du $n°$ 120) $t_i = t_1 = 1;273$, $t_{i-1} = t_0 = 0$, $v_{x_{i-1}} = v_{x_0} = 0$, $z_{i-1} = z_0 = 0$, $\omega_m = \omega_{i-1} = \omega_0 = 0$; la valeur de $\delta . \sin \nu$ qui correspond à $t_0 = 0$ est zéro; la valeur de $\delta . \sin \nu$ qui correspond à $t_1 = 1;273$ est arc $1°32'.\sin 90° = 0{,}02676$, de sorte que $(\delta . \sin \nu)_m = \frac{0 + 0{,}02676}{2} = 0{,}01338$. Les formules donneront $v_{x_1} = 0^{m:s}{,}4317$; $z_1 = 0^m{,}2719$; $\omega_1 = 5' = 0{,}001517$.

Pour déterminer v_{x_2}, z_2, ω_2 on mettra dans les formules $t_i = t_2 = 2;342$, $t_{i-1} = t_1 = 1;273$, $v_{x_{i-1}} = v_{x_1} = 0^{m:s}{,}4317$, $\omega_m = \omega_{i-1} = \omega_1 = 0{,}001517$; la valeur de $\delta . \sin \nu$ qui correspond à $t_1 = 1;273$ est arc $1°32'.\sin 90° = 0{,}02676$; la valeur de $\delta . \sin \nu$

Digitized by Google

qui correspond à $t_2 = 2'342$ est arc $0°39'$. sin $133°49' = 0{,}008186$, de sorte que $(\delta . \sin \nu)_m = \frac{0{,}02676 + 0{,}00819}{2} = 0{,}01748$. Les formules donneront $v_{z_2} = 0^{m:s},8418$; $z_2 = 0^m,9817$; $\omega_2 = 11' = 0{,}003087$.

Ainsi de suite.

On a inséré dans le tableau suivant les valeurs numériques qui caractérisent le mouvement de translation de l'obus de 4^l, tiré avec la vitesse initiale de $305^{m:s}$, sous l'angle de projection de $10°$.

t	v_t	x	y	θ	v_z	z	ω
0^s	$300^{m:s},0$	0^m	0^m	$10°\ 0'$	$0^{m:s}$	0^m	$0'$
1,273	284 , 6	378	58,6	7 38	0,432	0,272	5
2,342	272 , 7	680	93,0	5 24	0,842	0,982	10
2,711	268 , 7	782	102,0	4 38	0,883	1,296	11
3,085	264 , 9	883	109,5	3 51	0,923	1,635	12
4,308	253 , 0	1205	123,6	1 9	1,389	3,047	19
5,478	242 , 7	1499	122,7	— 1 33	1,878	4,981	27
6,116	237 , 3	1655	116,3	— 3 5	2,006	6,208	29
6,768	232 , 2	1810	106,0	— 4 39	2,134	7,560	32
8,178	221 , 7	2134	69,6	— 8 9	2,709	11,000	42
9,585	212 , 1	2444	15,3	—11 45	3,332	15,254	54
10,582	205 , 8	2656	— 33,6	—14 20	3,609	18,704	$1°\ 0$

Examinons les *corrections* qu'introduisent dans les valeurs de x, y, z les termes négligés dans les équations (1) $n°$ 125.

Le second terme du second membre de la première des équations (1) $n°$ 125 donne pour l'abscisse x, entre les limites de t_{i-1} à t_i, la correction

$$- kg \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} \delta . \cos \nu f(v) \sin \theta \, dt;$$

en substituant à $\cos \nu$ et à δ leurs plus grandes valeurs absolues $(\cos \nu)_{max}$ et δ_{max} dans les limites de l'intégration, la valeur absolue de cette correction sera toujours moindre que

$$k \delta_{max} (\cos \nu)_{max} g \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(v) \sin \theta \, dt;$$

Digitized by Google

en mettant au lieu de $g\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(v)\sin\theta\, dt$ sa valeur que l'on obtient en intégrant deux fois l'équation $\frac{dv_y}{dt} = -g(1 + f(v)\sin\theta)$, la dernière expression devient

$$k\delta_{max}(\cos\nu)_{max}\left\{\left[(v_1)_{i-1}\operatorname{tang}\theta_{i-1} - \tfrac{g}{2}(t_i - t_{i-1})\right](t_i - t_{i-1}) - (y_i - y_{i-1})\right\}.$$

En prenant successivement pour les intervalles $t_i - t_{i-1}$ les durées de chacune des deux demi-oscillations consécutives de l'axe de figure durant lesquelles cos ν conserve le même signe, on peut calculer la limite supérieure et l'inférieure entre lesquelles est comprise la correction. Mais si on calcule dans cet exemple la limite de l'erreur pour la durée entière $t_i = 10^{s},582$, en posant $t_{i-1} = 0$, et par suite $(v_1)_{i-1}\operatorname{tang}\theta_{i-1} = V_1\operatorname{tang}\varphi$, $y_{i-1} = 0$ et en faisant cos ν = 1 et (tableau du n° 120) $\delta = 2°28' = 0{,}0431$, qui est la plus grande valeur de δ sur tout le trajet du projectile, on aura même dans ce cas une correction égale à $3^{m},9$ que l'on peut négliger par rapport à la portée totale.

Le troisième terme du second membre de la première des équations (1) n° 125 donne pour l'abscisse x, entre les limites de $t = o$ à t, la correction

$$-kg\int_o^t dt\int_o^t \delta.\sin\nu.\omega f(v)\, dt;$$

en prenant pour sin ν l'unité et pour δ et ω leurs plus grandes valeurs entre les limites de l'intégration, la valeur absolue de cette correction sera toujours moindre que

$$k\delta_{max}\,\omega_{max}\, g\int_o^t dt\int_o^t f(v)\, dt;$$

en mettant au lieu de $g\int_o^t dt\int_o^t f(v)\, dt = g\int_o^t dt\int_o^t f(\alpha v_1)\, dt$ sa valeur que l'on obtient en intégrant deux fois l'équation $\frac{dv_1}{dt} = -gf(v)\cos\theta$,

Digitized by Google

après y avoir substitué $\frac{f(\alpha v_1)}{\alpha \cos\theta}$ à la fonction $f(v)$, la dernière expression devient

$$k\delta_{max}\,\omega_{max}\,\alpha V_1\left(t-\frac{x}{V_1}\right).$$

Pour la durée entière $t = 10'',582$ on a (tableau du $n°$ 120) $\delta_{max} = 2°28' = 0{,}0431$; $\omega_{max} = 1° = 0{,}0175$ et la dernière expression devient égale à $0^m,8$, de sorte que la correction en portée est moindre que $0^m,8$ et on peut la négliger.

Le second terme du second membre de la seconde des équations (1) $n°$ 125 donne pour l'ordonnée y, entre les limites de t_{i-1} à t_i la correction

$$kg\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\int_{t_{i-1}}^{t_i}\delta.\cos\nu\, f(v)\cos\theta\, dt;$$

en substituant à $\cos\nu$ et à δ leurs plus grandes valeurs absolues $(\cos\nu)_{max}$ et δ_{max} dans les limites de l'intégration, la valeur absolue de cette correction sera toujours moindre que

$$k\delta_{max}(\cos\nu)_{max}\,g\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(v)\cos\theta.\,dt;$$

en mettant au lieu de $g\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(v)\cos\theta.\,dt$ sa valeur que l'on obtient en intégrant deux fois l'équation $\frac{dv_1}{dt} = -gf(v)\cos\theta$, la dernière expression devient

$$k\delta_{max}(\cos\nu)_{max}\,\alpha(v_1)_{i-1}\left[(t_i-t_{i-1})-\frac{x_i-x_{i-1}}{(v_1)_{i-1}}\right].$$

En prenant successivement pour les intervalles t_i-t_{i-1} les durées de chacune des deux demi-oscillations consécutives de l'axe de figure durant lesquelles $\cos\nu$ conserve le même signe, nous calculerons la limite supérieure et l'inférieure, entre lesquelles est comprise la correction.

Digitized by Google

Dans les limites de $t_{i-1} = 0$ à $t_i = 1^s,273$ (tableau du $n°$ 120) l'angle ν varie de zéro à $\frac{\pi}{2}$, de sorte que cos ν est toujours positif et la plus grande valeur de cos ν est l'unité et sa plus petite valeur zéro; la plus grande valeur de δ est $1°32' = 0,0269$; $x_{i-1} = 0$; $x_i = 378^m$; $(v_1)_{i-1} = 300^{m:s}$.

La limite supérieure de la correction dans cet intervalle est $+ 0^m,215$;

la limite inférieure de la correction dans cet intervalle est zéro.

Dans les limites de $t_{i-1} = 1^s,273$ à $t_i = 2^s,711$ l'angle ν varie de 90° à 133°49′et de 133°49′ à 90°, de sorte que la valeur absolue de cos ν est comprise entre 0 et 0,692; la plus grande valeur de δ est $1°32' = 0,0269$; $x_{i-1} = 378^m$, $x_i = 782^m$, $(v_1)_{i-1} = 284^{m:s},6$. Observant que cos ν est négatif dans cet intervalle, on aura:

la limite supérieure de la correction égale à zéro;

la limite inférieure de la correction égale à $- 0^m,196$.

Entre les limites de $t_{i-1} = 2^s,711$ à $t_i = 4^s,308$ on aura:

la limite supérieure de la correction égale à $+ 0^m,311$;

la limite inférieure de la correction égale à zéro.

Entre les limites de $t_{i-1} = 4^s,308$ à $t_i = 6^s,116$ on aura:

la limite supérieure de la correction égale à zéro:

la limite inférieure de la correction égale à $- 0^m,222$.

Entre les limites de $t_{i-1} = 6^s,116$ à $t_i = 8^s,178$ on aura:

la limite supérieure de la correction égale à $+ 0^m,469$;

la limite inférieure de la correction égale à zéro.

Entre les limites de $t_{i-1} = 8^s,178$ à $t_i = 10^s,582$ on aura:

la limite supérieure de la correction égale à zéro;

la limite inférieure de la correction égale à $- 0^m,238$.

On voit que la correction de l'ordonnée y sur tout le trajet du projectile est comprise entre les limites

$$0^m,215 + 0^m,311 + 0^m,469 = 1^m,0$$

et

$$- 0^m,196 - 0^m,222 - 0^m,238 = - 0^m,7.$$

Digitized by Google

La correction de 1^m de l'ordonnée y correspond, pour l'angle de chute de 14°20′, à une correction de 4^m de la portée totale, que l'on peut négliger, d'autant plus que la correction réelle de l'ordonnée y est bien moins grande que ses limites.

Le troisième terme du second membre de la troisième des équations (1) $n°$ 125 donne pour l'ordonnée z, entre les limites de t_{i-1} à t_i la correction

$$-kg\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} \delta . \cos\nu . \omega . f(v) \sin\theta \, dt;$$

en substituant à $\cos\nu$, à δ et à ω leurs plus grandes valeurs absolues dans les limites de l'intégration, la valeur absolue de cette correction sera toujours moindre que

$$k\delta_{max}(\cos\nu)_{max}\,\omega_{max}\,g\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(v)\sin\theta\, dt,$$

ou que

$$k\delta_{max}(\cos\nu)_{max}\,\omega_{max}\left\{\left[(v_1)_{i-1}\tang\theta_{i-1}-\frac{g}{2}(t_i-t_{i-1})\right](t_i-t_{i-1})-(y_i-y_{i-1})\right\}.$$

En prenant successivement pour les intervalles $t_i - t_{i-1}$ les durées de chacune des deux demi-oscillations consécutives de l'axe de figure durant lesquelles $\cos\nu$ conserve le même signe, on peut calculer la limite supérieure et l'inférieure, entre lesquelles est comprise la correction. Mais si on calcule la limite de l'erreur pour la durée entière $t_i = 10^s,582$, en posant $t_{i-1} = 0$ et en faisant $\cos\nu = 1$, $\delta = 2°28' = 0,0431$ et $\omega = 1° = 0,0175$, qui sont les plus grandes valeurs de $\cos\nu$, δ et ω sur tout le trajet du projectile, on aura même dans ce cas une correction égale à $0^m,07$ que l'on peut négliger par rapport à la dérivation totale.

Cet examen fait voir que l'on peut, sans erreur sensible, omettre les termes négligés dans les équations différentielles (1) $n°$ 125 du mouvement de translation d'un projectile oblong.

Digitized by Google

On a construit sur les figures 22 et 23 la projection verticale et la projection horizontale de la trajectoire de l'obus de 4^1 tiré avec une vitesse initiale de $305^{m:s}$, sous l'angle de projection de 10°, en prenant pour les valeurs de x, y, z celles qui sont insérées dans le tableau de ce numéro. Les ordonnées y sont prises à une échelle 8 fois plus grande que celle des abscisses x, et les ordonnées z à une échelle 50 fois plus grande que celle des abscisses x.

128. *Formules simplifiées du mouvement de translation d'un projectile oblong dans le cas du tir direct.* On voit par ce qui précède qu'on peut calculer avec une précision suffisante la projection de la trajectoire sur le plan vertical du tir au moyen des formules obtenues dans le chapitre II pour les expressions de la résistance de l'air qui se rapportent aux projectiles oblongs, et où l'on doit prendre pour la fonction $f(v)$ le rapport $\frac{\varrho_x}{P}$ de la résistance de l'air dans le sens contraire à l'axe de figure au poids du projectile.

On déterminera la projection horizontale de la trajectoire au moyen des formules (1), (2), (3) $n°$ 126; mais les calculs que l'on a à exécuter sont longs.

On peut, avec une approximation suffisante pour la pratique, obtenir la projection horizontale de la trajectoire en intégrant l'équation différentielle du mouvement suivant l'axe des z

$$\frac{dv_z}{dt} = \left[k\delta . \sin\nu - \frac{1}{\alpha}\omega\right] g f(\alpha v_1)$$

depuis l'origine du mouvement jusqu'au temps qui correspond à la portée totale, prenant au lieu de l'angle variable ω sa valeur moyenne ω_m sur toute l'étendue de la trajectoire, et substituant au produit variable $\delta . \sin\nu$ sa valeur moyenne durant deux demi-oscillations moyennes de l'axe de figure: l'une ascendante et l'autre descendante. On obtient ainsi

$$v_z = \left[k(\delta . \sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right] g \int_o^t f(\alpha v_1)\, dt,$$

$$z = \left[k(\delta . \sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right] g \int_o^t dt \int_o^t f(\alpha v_1)\, dt,$$

Digitized by Google

ou, en mettant au lieu de $g\int_0^t f(\alpha v_1)\,dt$ et de $g\int_0^t dt\int_0^t f(\alpha v_1)\,dt$ leurs valeurs que l'on tire de l'équation $\frac{dv_1}{dt} = -gf(v)\cos\theta$ en l'intégrant, après y avoir substitué $\frac{f(\alpha v_1)}{\alpha\cos\theta}$ à la fonction $f(v)$, on trouve

$$v_z = \left[k(\delta.\sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right]\alpha v_1\left(\frac{V_1}{v_1} - 1\right),$$

$$z = \left[k(\delta.\sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right]\alpha V_1\left(t - \frac{x}{V_1}\right),$$

$$\omega = \frac{v_z}{v_1} = \left[k(\delta.\sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right]\alpha\left(\frac{V_1}{v_1} - 1\right).$$

Prenant pour ω_m la moyenne arithmétique des valeurs de $\omega_0 = 0$ et de ω, on aura

$$\omega_m = \frac{1}{2}\left[k(\delta.\sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right]\alpha\left(\frac{V_1}{v_1} - 1\right),$$

d'où l'on tire

$$\omega_m = k(\delta.\sin\nu)_m\,\alpha\,\frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1}.$$

Les valeurs du produit $\delta.\sin\nu$ étant comprises (n° 119) dans l'intervalle d'une demi-oscillation moyenne ascendante de l'axe de figure entre les limites de $\frac{4(n+1)\pi^2\mu}{q(n-1)h\eta\alpha\cos\varphi}\cdot 1$ et de $\frac{1}{q}\sqrt{8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}}\cdot\sqrt{8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}}$, et dans l'intervalle d'une demi-oscillation moyenne descendante de cet axe entre les limites de $\frac{1}{q}\sqrt{8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}}\cdot\sqrt{8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}}$ et de $\frac{1}{q}\left(2-4\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right).1$, on peut prendre pour $(\delta.\sin\nu)_m$ la moyenne arithmétique de ces quatre valeurs, et par suite poser

$$(\delta.\sin\nu)_m = \frac{1}{2q}\left(1+8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right).$$

Digitized by Google

En mettant les valeurs de ω_m et de $(\delta . \sin \nu)_m$ dans les expressions de v_x, z et ω, on trouve

$$(1)\ldots\ldots v_x = \frac{k}{q}\left(1+8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right)\alpha_1 v_1 \frac{\frac{V_1}{v_1}-1}{\frac{V_1}{v_1}+1},$$

$$(2)\ldots\ldots z = \frac{k}{q}\left(1+8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right)\alpha V_1 \frac{t-\frac{x}{V_1}}{\frac{V_1}{v_1}+1},$$

$$(3)\ldots\ldots \omega = \frac{k}{q}\left(1+8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{h\eta\alpha\cos\varphi}\right)\alpha \frac{\frac{V_1}{v_1}-1}{\frac{V_1}{v_1}+1},$$

où

(éq. 1, n° 118)$\ldots\ldots q = \frac{h\eta\alpha[vf(v)]_m}{2\pi\mu V}$,

(n° 119)$\ldots . [vf(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^2}{2gt}\left[1-\frac{1}{\left[1+\frac{n-1}{2}\left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1}t\right]^{\frac{2}{n-1}}}\right]$,

pour des vitesses initiales dépassant $325^{m:s}$ on peut prendre (n° 26) $n=4$ et $2c^3 = \frac{P}{0{,}00000027\,\pi R^2 g}$, et pour des vitesses initiales moindres que $325^{m:s}$ on peut prendre (n° 120) $n=2$ et $2c = \frac{P}{0{,}014\,\pi R^2 g}$,

pour les projectiles semblables à notre obus de 4^1 $\mu = 0{,}589$, $h = 2{,}7$, $k = 2{,}05$,

η est le pas des rayures exprimé en rayons du projectile;

α est une certaine valeur moyenne de la sécante trigonométrique de l'angle θ d'inclinaison de la trajectoire; les valeurs de α sont insérées dans la table I de l'annexe.

En calculant au moyen de ces formules simplifiées la dérivation de l'obus de 4^1 tiré avec une vitesse initiale de $305^{m:s}$, après une durée du trajet de 10",582, on trouve $z = 15^m,4$; une solution plus précise a donné (n° 127) $z = 18^m,7$.

Pour reconnaître facilement l'influence de la longueur du pas des

Digitized by Google

rayures et de la vitesse du projectile sur les dérivations, admettons que la résistance de l'air soit proportionnelle au carré de la vitesse. Dans ce cas

$$v_1 = \frac{V_1}{1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t},$$

$$x = \frac{2c}{\alpha} \log\left(1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t\right)$$

ou, en développant le logarithme en série et se bornant aux deux premiers termes de la série, ce qui est possible, lorsque t n'est pas grand, on trouve

$$x = V_1 t \left(1 - \frac{\alpha V_1}{4c} t\right),$$

et l'on a ($n°$ 119, pour $n = 2$)

$$[vf(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^2}{2gc} \frac{1 + \frac{\alpha V_1}{4c} t}{\left(1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t\right)^2},$$

de sorte que

$$q = \frac{h \eta \alpha^2 \cos\varphi}{4\pi\mu} \cdot \frac{(\alpha V_1)^2}{gc} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha V_1}{4c} t}{\left(1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t\right)^2}.$$

En mettant les valeurs de v_1, x et q dans l'éq. 2 et admettant $\alpha^2 \cos\varphi = 1$, on trouve

$$s = \frac{1}{2} \pi g \frac{k}{h} \cdot \frac{\mu}{\eta} \left(1 + 24 \frac{\pi^2 \mu}{h\eta}\right) t^2 \left(1 + \frac{\alpha V_1}{4c} t\right)^2.$$

Cette équation fait voir que, pour des projectiles semblables, la dérivation latérale diminue lorsque la longueur du pas des rayures augmente, et que la dérivation croît un peu plus rapidement que les carrés des durées. En observant que $t = \frac{x}{V_1} F_1\left(\frac{\alpha x}{2c}\right)$, on voit aussi que la dérivation est en raison inverse du carré de la vitesse initiale du projectile et croît un peu plus rapidement que les carrés des distances. Le coefficient c étant proportionnel au rapport du poids du

Digitized by Google

projectile à sa section transversale, la dérivation diminue lorsque ce rapport augmente, et le coefficient μ étant proportionnel au moment d'inertie du projectile autour de son axe de figure, la dérivation augmente avec ce moment.

129. *Intégration, par approximation, des équations différentielles du mouvement de translation dans le cas du tir courbe, quand* $\frac{q}{2} > 1$. En procédant avec les équations (2) $n°$ 125 comme on l'a fait au $n°$ 126 avec les équations (1) $n°$ 125, on trouvera que les équations finies du mouvement sur le plan vertical du tir sont données par les formules obtenues dans le chapitre II pour les expressions de la résistance de l'air qui se rapportent aux projectiles oblongs, et où l'on doit prendre pour la fonction $f(v)$ le rapport $\frac{\rho_A}{P}$ de la résistance de l'air dans le sens contraire à l'axe de figure au poids du projectile.

Pour déterminer la projection horizontale de la trajectoire, on aura les expressions

$$(1)\ldots v_{x_i} = v_{x_{i-1}} + \left[m(\sin\delta\cos\delta\sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right]\alpha(v_1)_i\left[\frac{(v_1)_{i-1}}{(v_1)_i} - 1\right],$$

$$(2)\ldots x_i = x_{i-1} + v_{x_{i-1}}(t_i - t_{i-1}) + \left[m(\sin\delta\cos\delta\sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right]\alpha(v_1)_{i-1}\left[(t_i - t_{i-1}) - \frac{x_i - x_{i-1}}{(v_1)_{i-1}}\right],$$

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \omega_i = \frac{v_{x_i}}{(v_1)_i},$$

où l'on peut choisir les intervalles $t_i - t_{i-1}$ de manière qu'ils correspondent aux durées des demi-oscillations de l'axe de figure.

On peut reconnaître, au moyen des formules des n^{os} 121 et 122, que le produit $\sin\delta\cos\delta\sin\nu$ est toujours croissant ou décroissant dans tout l'intervalle de chaque demi-oscillation; par suite on peut prendre pour $(\sin\delta\cos\delta\sin\nu)_m$ la moyenne arithmétique des valeurs de $\sin\delta.\cos\delta.\sin\nu$ qui correspondent ($n°$ 122) au commencement et à la fin de chaque demi-oscillation. L'accroissement de l'angle ω étant faible durant une demi-oscillation, on peut prendre pour ω_m la valeur ω_{i-1} correspondante à la fin de la demi-oscillation précédente.

Digitized by Google

On se convaincra par un exemple particulier, en procédant comme on l'a fait au $n°$ 127, que l'on peut négliger, sans erreur sensible, les corrections fournies par les termes qui ont été omis dans les équations différentielles du mouvement de translation.

130. *Formules simplifiées du mouvement de translation d'un projectile oblong dans le cas du tir courbe, quand* $\frac{q}{2} > 1$. La projection de la trajectoire sur le plan vertical du tir peut être calculée, avec une précision suffisante, au moyen des formules obtenues dans le chapitre II pour les expressions de la résistance qui se rapportent aux projectiles oblongs, et où l'on doit prendre pour la fonction $f(v)$ le rapport $\frac{\rho_1}{P}$ de la résistance de l'air dans le sens contraire à l'axe de figure au poids du projectile.

On peut, avec une approximation suffisante pour la pratique, obtenir la projection horizontale de la trajectoire en intégrant l'équation différentielle du mouvement suivant l'axe des z

$$\frac{dv_z}{dt} = \left[m \sin\delta \cos\delta \sin\nu - \frac{1}{\alpha}\omega\right] g f(\alpha v_1)$$

depuis l'origine du mouvement jusqu'au temps qui correspond à la portée totale, prenant au lieu de l'angle variable ω sa valeur moyenne ω_m sur toute l'étendue de la trajectoire, et substituant au produit variable $\sin\delta \cos\delta \sin\nu$ sa valeur moyenne durant deux demi-oscillations moyennes de l'axe de figure: l'une ascendante et l'autre descendante. On obtient ainsi

$$v_z = \left[m (\sin\delta \cos\delta \sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right] g \int_0^t f(\alpha v_1)\, dt,$$

$$z = \left[m (\sin\delta \cos\delta \sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right] g \int_0^t dt \int_0^t f(\alpha v_1)\, dt,$$

ou, en mettant au lieu de $g\int_0^t f(\alpha v_1)\, dt$ et de $g\int_0^t dt\int_0^t f(\alpha v_1)\, dt$ leurs

Digitized by Google

valeurs que l'on tire de l'équation $\frac{dv_1}{dt} = -gf(v)\cos\theta$ en l'intégrant, après y avoir substitué $\frac{f(\alpha v_1)}{\alpha\cos\theta}$ à la fonction $f(v)$, on trouve

$$v_z = \left[m(\sin\delta\cos\delta\sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right]\alpha v_1\left(\frac{V_1}{v_1} - 1\right),$$

$$z = \left[m(\sin\delta\cos\delta\sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right]\alpha V_1\left(t - \frac{x}{V_1}\right),$$

$$\omega = \frac{v_z}{v_1} = \left[m(\sin\delta\cos\delta\sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right]\alpha\left(\frac{V_1}{v_1} - 1\right).$$

Prenant pour ω_m la moyenne arithmétique des valeurs de $\omega_0 = 0$ et de ω, on aura

$$\omega_m = \frac{1}{2}\left[m(\sin\delta\cos\delta\sin\nu)_m - \frac{1}{\alpha}\omega_m\right]\alpha\left(\frac{V_1}{v_1} - 1\right),$$

d'où l'on tire

$$\omega_m = m(\sin\delta\cos\delta\sin\nu)_m\,\alpha\,\frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1}.$$

Les valeurs du produit $\sin\delta\cos\delta\sin\nu$ étant comprises (n° 123) dans l'intervalle d'une demi-oscillation moyenne ascendante de l'axe de figure entre les limites de $\frac{4}{q}\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}$ et de $\frac{1}{q}\sqrt{8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}}\cdot\sqrt{8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}}$, et dans l'intervalle d'une demi-oscillation moyenne descendante de cet axe entre les limites de $\frac{1}{q}\sqrt{8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}}\cdot\sqrt{8\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}}$ et de $\frac{1}{q}\left[2\left(1-\frac{2}{q^2}\right) - 4\left(1-\frac{6}{q^2}\right)\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}\right]$, on peut prendre pour $(\sin\delta\cos\delta\sin\nu)_m$ la moyenne arithmétique de ces quatre valeurs, et par suite poser

$$(\sin\delta\cos\delta\sin\nu)_m = \frac{1}{2q}\left[\left(1-\frac{2}{q^2}\right) + 8\left(1+\frac{3}{2q^2}\right)\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}\right].$$

En mettant les valeurs de ω_m et de $(\sin\delta\cos\delta\sin\nu)_m$ dans les expressions de v_z, z et ω, on trouve

$$(1)\ldots v_z = \frac{m}{q}\left[\left(1-\frac{2}{q^2}\right) + 8\left(1+\frac{3}{2q^2}\right)\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}\right]\alpha v_1\,\frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1},$$

Digitized by Google

$$(2)\ldots\ldots z=\frac{m}{q}\left[\left(1-\frac{2}{q^2}\right)+8\left(1+\frac{3}{2q^2}\right)\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}\right]\alpha V_1\frac{t-\frac{x}{V_1}}{\frac{V_1}{v_1}+1},$$

$$(3)\ldots\omega=\frac{m}{q}\left[\left(1-\frac{2}{q^2}\right)+8\left(1+\frac{3}{2q^2}\right)\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi^2\mu}{l\eta\alpha\cos\varphi}\right]\alpha\frac{\frac{V_1}{v_1}-1}{\frac{V_1}{v_1}+1},$$

où

$$(\text{éq. 1, } n^\circ 121)\ldots\ldots\ldots q=\frac{l\eta\alpha[vf(v)]_m}{2\pi\mu V},$$

$$(n^\circ 119)\ldots.[vf(v)]_m=\frac{(\alpha V_1)^2}{2gt}\left[1-\frac{1}{\left[1+\frac{n-1}{2}\left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^{n-1}t\right]^{\frac{1}{n-1}}}\right],$$

pour des vitesses initiales au-dessus de $325^{m:s}$ on peut prendre (n° 26) $n=4$ et $2c^2=\frac{P}{0{,}00000027\pi R^2 g}$, et pour des vitesses initiales au-dessous de $325^{m:s}$ on peut prendre ($n^\circ 120$) $n=2$ et $2c=\frac{P}{0{,}014\pi R^2 g}$,

pour les projectiles semblables à notre obus de 4^1 $\mu=0{,}589$, $l=2{,}6$, $m=2{,}1$,

η est le pas des rayures exprimé en rayons du projectile;

α est une certaine valeur moyenne de la sécante trigonométrique de l'angle θ d'inclinaison de la trajectoire; les valeurs de α sont données dans la table I de l'annexe.

Dans ce cas, comme dans celui du tir direct, la dérivation latérale diminue, lorsque le pas des rayures et le rapport du poids du projectile à sa section transversale augmentent, et cette dérivation croît avec le moment d'inertie du projectile autour de l'axe de figure, et augmente un peu plus rapidement que les carrés des durées, qui sont en raison inverse du carré de la vitesse initiale du projectile et croissent un peu plus rapidement que les carrés des distances.

131. *Intégration, par approximation, des équations différentielles du mouvement de translation dans le cas du tir courbe, quand* $\frac{q}{2}\gtrless 1$. En se bornant dans la première et la seconde des équations (3) n° 125 aux termes qui dépendent de la composante

Digitized by Google

tangentielle de la résistance et de la gravité et dans la troisième de ces équations aux deux premiers termes de son second membre, on obtient

$$\frac{dv_1}{dt} = -g\beta f(v)\cos\theta,$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g\left(1 + \beta f(v)\sin\theta\right),$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g\beta\omega f(v)\cos\theta + mg\sin\delta\cos\delta\sin\nu f(v).$$

Ce cas supposant une petite vitesse initiale, on peut poser (n°120)

$$f(v) = \frac{v^2}{2gc},$$

où

$$2c = \frac{P}{0{,}014\,\pi R^2 g},$$

et les deux premières équations différentielles donneront

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots y = x\,\text{tang}\,\varphi - \frac{gx^2}{2V_1^2}F\frac{(\alpha\beta x)}{c};$$

pour le point de chute à la hauteur de la bouche à feu on aura

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\alpha\beta x}{c}\cdot F\left(\frac{\alpha\beta x}{c}\right) = \frac{\alpha\beta}{c}\frac{V^2}{g}\sin^2\varphi;$$

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots t = \frac{x}{V_1}F_1\left(\frac{\alpha\beta x}{2c}\right),$$

$$(4)\ldots\ldots\ldots x = \frac{2c}{\alpha\beta\,\text{Log}\,e}\text{Log}\left(1 + \frac{\alpha\beta V_1}{2e}t\right),$$

$$(5)\ldots\ldots\ldots \text{tang}\,\theta = \text{tang}\,\varphi - \frac{gx}{V_1^2}F_1\left(\frac{\alpha\beta x}{c}\right),$$

$$(6)\ldots\ldots\ldots\ldots v_1 = \frac{V_1}{1 + \frac{\alpha\beta V_1}{2c}t}.$$

Les valeurs de v et de $vf(v)$ étant

$$v = \alpha v_1 = \frac{\alpha V_1}{1 + \frac{\alpha\beta V_1}{2c}t},\quad vf(v) = \frac{(\alpha V_1)^3}{2gc}\frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha\beta V_1}{2c}t\right)^3},$$

Digitized by Google

on peut poser

$$(v)_m = \frac{\alpha V_1}{t}\int_0^t \frac{dt}{1+\frac{\alpha\beta V_1}{2c}t}, \quad [vf(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^2}{2gc\,t}\int_0^t \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha\beta V_1}{2c}t\right)^3}$$

ou

$$(7)\ldots\ldots\ldots\ldots (v)_m = \frac{2c}{\beta t}\log\left(1+\frac{\alpha\beta V_1}{2c}t\right),$$

$$[vf(v)]_m = \frac{(\alpha V_1)^3}{2gc}\,\frac{1+\frac{\alpha\beta V_1}{4c}t}{\left(1+\frac{\alpha\beta V_1}{2c}t\right)^2}$$

et

$$(8)\ldots\ldots\ldots q = \frac{l\eta\alpha^2\cos\varphi}{4\pi\mu}\cdot\frac{(\alpha V_1)^2}{gc}\,\frac{1+\frac{\alpha\beta V_1}{4c}t}{\left(1+\frac{\alpha\beta V_1}{2c}t\right)^2}.$$

Pour déterminer β, connaissant la vitesse initiale et l'angle de projection, on commencera par calculer, en posant $\beta = 1$, la valeur de x par la formule (2), celle de t par la formule (3), celle de $(v)_m$ par la formule (7), celle de q par la formule (8) et celle de δ au moyen de la formule (5) $n°$ 124. Cette valeur de δ servira à calculer ($n°$ 125)

$$\beta = 1 + 1{,}07\,\delta^2.$$

Connaissant β, on obtiendra, pour la valeur trouvée de t des valeurs plus approchées de x, y, θ, v_1, $(v)_m$, q et δ; l'équation (4) $n°$ 124 donnera la valeur de ν.

Observant que (éq. 4, $n°$ 124) $\sin\delta = \frac{2}{q}\sin\nu$, on voit que l'équation différentielle suivant l'axe des z peut être mise sous la forme

$$\frac{dv_z}{dt} = \left[\frac{mq}{2}\sin^2\delta\cos\delta - \frac{\beta}{\alpha}\omega\right] gf(\alpha v_1).$$

Les angles ω étant toujours petits et le produit $\sin^2\delta\cos\delta$, dans les limites de $\delta = o$ à $\delta = \frac{\pi}{2}$, ayant sa plus petite valeur égale à zéro et sa plus grande ne dépassant pas 0,385, on ne fera pas une grande erreur, si l'on intègre la dernière équation depuis l'origine

Digitized by Google

du mouvement jusqu'à la valeur trouvée de t en substituant à ω et à $\sin^2\delta\cos\delta$ leurs valeurs moyennes ω_m et $(\sin^2\delta\cos\delta)_m$ sur toute l'étendue de la trajectoire. On obtiendra ainsi

$$v_x = \left[\frac{mq}{2}(\sin^2\delta\cos\delta)_m - \frac{\beta}{\alpha}\omega_m\right]\frac{\alpha}{\beta}v_1\left(\frac{V_1}{v_1} - 1\right),$$

$$x = \left[\frac{mq}{2}(\sin^2\delta\cos\delta)_m - \frac{\beta}{\alpha}\omega_m\right]\frac{\alpha}{\beta}V_1\left(t - \frac{x}{V_1}\right),$$

$$\omega = \frac{v_x}{v_1} = \left[\frac{mq}{2}(\sin^2\delta\cos\delta)_m - \frac{\beta}{\alpha}\omega_m\right]\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{V_1}{v_1} - 1\right).$$

Substituant à ω_m la moyenne arithmétique des valeurs de $\omega_0 = 0$ et de ω, on trouve

$$\omega_m = \frac{1}{2}\left[\frac{mq}{2}(\sin^2\delta\cos\delta)_m - \frac{\beta}{\alpha}\omega_m\right]\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{V_1}{v_1} - 1\right),$$

d'où l'on tire

$$\omega_m = \frac{mq}{2}(\sin^2\delta\cos\delta)_m \frac{\alpha}{\beta}\frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1};$$

posant approximativement $(\sin^2\delta\cos\delta)_m = \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\sin^2\delta\cos\delta\,d\delta$, on trouve

$$(\sin^2\delta\cos\delta)_m = \frac{\sin^3\delta}{3\delta}.$$

Mettant les valeurs de ω_m et de $(\sin^2\delta\cos\delta)_m$ dans les expressions de v_x, x et ω, on obtient

$$(9)\ldots\ldots\ldots\ldots v_x = \frac{mq}{3}\cdot\frac{\sin^3\delta}{\delta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot v_1\frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1},$$

$$(10)\ldots\ldots\ldots\ldots x = \frac{mq}{3}\cdot\frac{\sin^3\delta}{\delta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}V_1\frac{t - \frac{x}{V_1}}{\frac{V_1}{v_1} + 1},$$

$$(11)\ldots\ldots\ldots\ldots \omega = \frac{mq}{3}\cdot\frac{\sin^3\delta}{\delta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1}.$$

Digitized by Google

Les termes négligés dans les équations (3), $n°$ 125 donnent pour les valeurs de x, y, z les corrections suivantes.

Le second terme du second membre de la première des équations (3), $n°$ 125 donne pour l'abscisse x la correction

$$\Delta x = -\frac{m}{\beta}(\sin\delta\cos\delta\cos\nu)_m\left[\left(V_1\operatorname{tang}\varphi - \frac{g}{2}t\right)t - y\right],$$

où l'on peut approximativement poser

$$(\sin\delta\cos\delta\cos\nu)_m = \left(\sin\delta\cos\delta\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2\sin^2\delta}\right)_m = \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\sin\delta.\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2\sin^2\delta}.d\sin\delta$$

$$= \frac{4}{3q^2\delta}\left[1-\left(1-\left(\frac{q}{2}\right)^2\sin^2\delta\right)\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2\sin^2\delta}\right].$$

Le troisième terme du second membre de la première des équations (3) $n°$ 125 donne pour l'abscisse x une correction dont la valeur absolue est moindre que $\omega_{max}.z$ et que l'on peut toujours négliger.

Le deuxième terme du second membre de la deuxième des équations (3) $n°$ 125 donne pour l'ordonnée y la correction

$$\Delta y = +\frac{m}{\beta}(\sin\delta\cos\delta\cos\nu)_m\,aV_1\left(t-\frac{x}{V_1}\right),$$

où l'on peut approximativement poser

$$(\sin\delta\cos\delta\cos\nu)_m = \frac{4}{3q^2\delta}\left[1-\left(1-\left(\frac{q}{2}\right)^2\sin^2\delta\right)\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2\sin^2\delta}\right].$$

Le troisième terme du second membre de la troisième des équations (3) $n°$ 125 donne pour l'ordonnée z une correction dont la valeur absolue est moindre que $\omega_{max}.\Delta x$ que l'on peut toujours négliger.

132. *Exemple.* Soit un obus de 4^l tiré sous l'angle de projection de 45°, avec une vitesse initiale de $50^{m:s}$. On a pour cet obus ($n°$ 120) $c = 3514^m$. En posant $\beta = 1$, on trouve $x = 247^m$, $t = 7''149$, $\frac{q}{2} = 0{,}735$, $\delta = 70°15'$ et par conséquent $\beta = 1 + 1{,}07\delta^2 = 2{,}3$.

Digitized by Google

Pour $t=7^{s},149$ et $\beta=2,3$ on obtient $x=240^{m},7$, $y=-2^{m},0$, $\theta=-47°16'$, $v_1=32^{m},15$, $\frac{q}{2}=0,680$, $\delta=73°18'$, $\nu=40°39'$, $\omega=56'$, $z=2^{m},0$.

Les termes négligés dans les équations (3) $n°$ 125 donnent les corrections

$$\Delta x=-1^{m},11\,,\quad \Delta y=+4^{m},22.$$

On voit ainsi qu'à la durée $t=7^{s},149$ correspondent

$$x=240^{m},7-1^{m},1=239^{m},6,\quad y=-2^{m},0+4^{m},2=2^{m},2,$$

$$z=2^{m},0.$$

La portée sur un terrain à la hauteur de la bouche à feu est approximativement égale à $239^{m},6+\frac{2^{m},2}{\operatorname{tang}\theta}=241^{m},6$ et la durée qui correspond à cette portée est approximativement de $7^{s},149+\frac{241^{m},6-239^{m},2}{v_1}$ $=7^{s},224$.

En comparant la durée et la portée horizontale calculées pour $\beta=2,3$ à celles qui ont été obtenues pour $\beta=1$ on voit qu'elles ne diffèrent pas beaucoup entre elles, de sorte qu'on peut, dans le cas du tir courbe sous des angles de projection qui ne dépassent pas 45°, même avec de petites vitesses initiales, calculer la projection verticale de la trajectoire en supposant la résistance de l'air dirigée dans le sens contraire au mouvement et égale en grandeur à la composante de la résistance dans le sens contraire à l'axe de figure.

En calculant la dérivation latérale z pour $\beta=1$, on la trouve de $2^{m},2$ et elle diffère peu de $z=2^{m},0$ qui a été obtenue pour $\beta=2,3$, de sorte qu'on peut calculer la dérivation latérale, avec une approximation suffisante pour la pratique, en posant $\beta=1$.

133. *Formules simplifiées du mouvement de translation d'un projectile oblong dans le cas du tir courbe, quand* $\frac{q}{2}\lesssim 1$. La projection de la trajectoire sur le plan vertical du tir peut être calculée avec une approximation suffisante pour la pratique au moyen des formules obtenues dans le chapitre II pour les expressions de la ré-

Digitized by Google

sistance de l'air qui se rapportent aux projectiles oblongs, et où l'on doit prendre pour la fonction $f(v)$ le rapport $\frac{\rho_A}{P}$ de la résistance de l'air dans le sens contraire à l'axe de figure au poids du projectile.

La projection horizontale de la trajectoire peut être déterminée par les formules suivantes

$$v_x = \frac{mq}{3} \cdot \frac{\sin^3 \delta}{\delta} \alpha v_1 \frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1},$$

$$x = \frac{mq}{3} \cdot \frac{\sin^3 \delta}{\delta} \alpha V_1 \frac{t - \frac{x}{V_1}}{\frac{V_1}{v_1} + 1},$$

$$\omega = \frac{mq}{3} \cdot \frac{\sin^3 \delta}{\delta} \alpha \frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1},$$

où

$$q = \frac{l \eta \alpha^2 \cos \varphi}{4 \pi \mu} \frac{(\alpha V_1)^2}{gc} \frac{1 + \frac{\alpha V_1}{4c} t}{\left(1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t\right)^2},$$

$$2c = \frac{P}{0{,}014 \pi R^2 g};$$

on trouvera la valeur de δ, à l'aide des tables d'intégrales elliptiques, au moyen de la relation

$$F\left(\delta, \frac{q}{2}\right) = \frac{g}{\alpha (v)_m} t,$$

et à défaut de tables on pourra calculer la valeur approchée de δ, dans le cas de $\frac{q}{2} > 0{,}75$ au moyen des équations

$$\operatorname{tang}(\delta - \psi) = \frac{1 - \frac{q}{2}}{1 + \frac{q}{2}} \operatorname{tang} \psi,$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arc\,tang} e^{-\frac{1 - \frac{q}{2}}{2} \frac{gt}{\alpha (v)_m}},$$

Digitized by Google

et dans le cas de $\frac{q}{2} < 0{,}75$ au moyen de l'équation

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\operatorname{tang}\left[\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)\frac{g}{\alpha(v)_m}t\right]}\left[\sqrt{1+\frac{4\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\operatorname{tang}^2\left[\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)\frac{g}{\alpha(v)_m}t\right]}{\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)^2}}-1\right];$$

$$(v)_m = \frac{2c}{t.\operatorname{Log} e}\operatorname{Log}\left(1+\frac{\alpha V_1}{2c}t\right),$$

pour les projectiles semblables à notre obus de 4^1, $\mu = 0{,}589$, $l = 2{,}6$, $m = 2{,}1$,

η est le pas des rayures exprimé en rayons du projectile,

α est une valeur moyenne de la sécante trigonométrique de l'angle θ d'inclinaison de la trajectoire; les valeurs de α sont données dans la table I de l'annexe.

L'expression de q fait voir que le cas $\frac{q}{2} \gtrless 1$ a lieu pour des valeurs de $\frac{V^2}{gc}$ d'autant moindres que la longueur du pas des rayures est plus grande.

§ III.

IMAGE DE LA TRAJECTOIRE DES PROJECTILES OBLONGS DANS L'AIR.

134. *Image du mouvement de rotation de l'axe de figure d'un projectile oblong.* Tandis que le centre de gravité du projectile décrit une certaine trajectoire dans l'air, le projectile tourne autour de son axe de figure avec une vitesse angulaire sensiblement égale à la vitesse angulaire initiale, et l'axe de figure a un mouvement de rotation autour de la tangente qui s'abaisse pendant toute la durée du mouvement.

Le sens du mouvement de rotation de l'axe de figure dépend du sens de la rotation du projectile autour de son axe de figure et du sens de l'axe du couple de la résistance de l'air. Ordinairement dans les bouches à feu rayées la rotation du projectile a lieu de droite à gauche autour de l'axe de figure, si l'on regarde du pôle au centre

Digitized by Google

de gravité du projectile ou, ce qui est tout un, de gauche à droite, si l'on regarde dans le sens du mouvement de translation du projectile, et le centre de résistance de l'air se trouve en avant du centre de gravité, de sorte que le couple de la résistance de l'air tend à éloigner la pointe du projectile de la tangente à la trajectoire.

Dans ces conditions l'axe de figure commence à se mouvoir autour de la tangente dans le sens de la rotation du projectile autour de son axe de figure *).

Si la vitesse initiale n'est pas très faible, le mouvement de l'axe de figure autour de la tangente est un mouvement d'oscillation. L'angle ν que fait le plan vertical passant par la tangente avec le plan passant par la même tangente et l'axe de figure augmente d'abord de zéro à $\frac{\pi}{2}$ et l'angle δ que fait l'axe de figure avec la tangente croît lentement de zéro jusqu'à une certaine limite $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)}$. Ensuite l'angle ν continue d'augmenter jusqu'à une certaine limite ν_2 moindre que π, tandis que l'angle δ diminue jusqu'à une certaine valeur δ_2. L'angle ν, après avoir atteint la limite ν_2, diminue jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, et l'angle δ continue de décroître jusqu'à une certaine limite $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\ 2\right)}$. Au-delà l'angle ν continue de diminuer jusqu'à une certaine limite ν_3 plus grande que zéro et moindre que $\pi - \nu_2$, tandis que l'angle δ augmente jusqu'à une certaine valeur δ_3. L'angle ν, après avoir atteint la limite ν_3, augmente de nouveau jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, et l'angle δ continue de croître jusqu'à une certaine limite $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right)}$ plus grande que la limite $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)}$ qu'il avait atteinte lors de l'augmentation précédente de l'angle ν. Ensuite l'angle ν continue d'augmenter jusqu'à la limite ν_4 moindre que ν_2, tandis que l'angle δ diminue jusqu'à une certaine valeur δ_4. L'angle ν, après avoir atteint

*) Si le centre de la résistance était en arrière du centre de gravité du projectile, son axe de figure commencerait à se mouvoir autour de la tangente dans le sens contraire à la rotation du projectile autour de son axe de figure.

Digitized by Google

la limite ν_4, diminue jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, et l'angle δ continue de diminuer jusqu'à une certaine limite $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\ 4\right)}$ plus grande que la limite $\delta_{\left(\frac{\pi}{2},\ 2\right)}$ qu'il avait atteinte lors de la diminution précédente de l'angle ν. Au-delà l'angle ν continue de diminuer jusqu'à une certaine limite ν_5 plus grande que ν_3 et moindre que $\pi - \nu_4$, tandis que l'angle δ croît jusqu'à une certaine valeur δ_5. L'angle ν après avoir atteint la limite ν_5 augmente de nouveau et l'angle δ continue d'augmenter; et ainsi de suite. Les durées des oscillations successives vont en augmentant. Les valeurs des angles limites ν_2, ν_3.... sont les mêmes pour des projectiles semblables tirés des bouches à feu ayant les pas des rayures proportionnels aux calibres et sont indépendantes des vitesses initiales des projectiles.

Si les vitesses initiales sont très faibles, l'angle ν croissant depuis zéro n'atteint pas $\frac{\pi}{2}$, et l'angle δ, pour les angles de projection qui ne dépassent pas 45°, ne dépasse pas non plus $\frac{\pi}{2}$, de sorte que l'axe de figure, tournant autour de la tangente, n'a pas de mouvement d'oscillation.

135. *Image du mouvement de translation d'un projectile oblong dans l'air.* Si la résultante ρ de la résistance de l'air était constamment dirigée en sens contraire de la tangente à la trajectoire, cette trajectoire, nonobstant le mouvement de rotation de l'axe de figure autour de la tangente, serait tout entière dans le même plan vertical; car si l'on fait passer un plan vertical par un élément quelconque de la courbe, la force de la pesanteur, ainsi que la résistance de l'air, agissent dans ce plan; il en résulte que le second élément y est également compris, et ainsi de suite.

Mais la résultante ρ de la résistance de l'air fait avec la direction contraire à l'axe de figure, pour les projectiles formés d'un cylindre surmonté d'une surface ogivale, dans les cas ordinaires du tir, un angle plus grand que celui que fait l'axe de figure avec la tangente, et cette résultante ρ, étant toujours située dans le plan qui passe par l'axe de figure et par la tangente, ne se trouve pas, pendant le mouvement de rotation de l'axe de figure autour de la tangente, dans le plan vertical

Digitized by Google

qui passe par la tangente, et par suite la trajectoire que décrit le centre de gravité du projectile est à double courbure.

Décomposons la résultante ρ de la résistance en trois autres résistances: l'une dirigée en sens contraire de la tangente, l'autre perpendiculaire à la tangente dans le plan horizontal et la troisième perpendiculaire à la tangente dans le plan vertical. La composante de la résistance en sens contraire de la tangente ralentit le mouvement de translation du projectile. L'axe de figure du projectile étant toujours à droite du plan vertical passant par la tangente, la composante horizontale de la résistance, qui agit perpendiculairement à la direction de la tangente, fait dévier le centre de gravité du projectile à droite, et cette déviation latérale est connue sous le nom de *dérivation* latérale *). La composante de la résistance qui agit dans le plan vertical perpendiculairement à la direction de la tangente, relève le centre de gravité du projectile, quand l'axe de figure se trouve au-dessus de la tangente, et l'abaisse, quand l'axe de figure se trouve au-dessous de la tangente **).

Dans le cas du tir courbe avec de très faibles vitesses initiales

*) Si le centre de résistance se trouvait en arrière du centre de gravité, l'axe de figure du projectile serait toujours à gauche du plan vertical passant par la tangente, et le centre de gravité du projectile dévierait à gauche.

Si l'angle que fait la résultante de la résistance avec la direction contraire à l'axe de figure du projectile était moindre que celui que fait l'axe du projectile avec la tangente, les déviations latérales auraient lieu dans le sens contraire.

**) Si l'angle que fait la résultante de la résistance avec la direction contraire à l'axe de figure était moindre que l'angle que fait l'axe de figure avec la tangente, la composante de la résistance qui agit dans le plan vertical perpendiculairement à la direction de la tangente, abaisserait le centre de gravité du projectile, pendant que l'axe de figure se trouverait au-dessus de la tangente, et le relèverait pendant que l'axe de figure se trouverait au-dessous de la tangente.

Si le centre de résistance coïncidait avec le centre de gravité, le couple de la résistance serait nul; il n'y aurait pas de mouvement de rotation de l'axe de figure; l'axe de figure resterait, pendant le trajet du projectile, parallèle à lui-même dans l'espace et serait constamment dans le plan vertical qui passe par la tangente; et comme la résultante de la résistance de l'air serait aussi dans ce plan, la trajectoire serait plane et la composante de la résistance perpendiculaire à la direction de la tangente relèverait ou abaisserait le centre de gravité du projectile, selon que l'angle que fait la résultante de la résistance avec la direction contraire à l'axe de figure serait plus grand ou plus petit que celui que fait l'axe de figure avec la tangente.

Digitized by Google

l'angle ν est bien moindre que l'angle δ qui, sous un angle de projection voisin de 45°, atteint au point de chute une valeur pas trop éloignée de $\frac{\pi}{2}$, et par suite le projectile rencontre le sol le culot en avant. Avec un accroissement de vitesse initiale l'angle ν augmente et le projectile tombe sur le flanc. On peut arriver, par une augmentation de vitesse initiale, à faire tomber le projectile la pointe en avant *). Lorsque les vitesses initiales ne sont pas très faibles, les angles que fait l'axe de figure avec la tangente ne sont pas grands; pour des vitesses initiales considérables, comme celles que l'on emploie dans le tir direct, ces angles sont petits, et, si les portées ne sont pas trop petites, l'axe de figure du projectile fait plusieurs oscillations autour de la tangente pendant toute la durée du mouvement du projectile. L'amplitude de ces oscillations est toujours moindre que π et diminue, à mesure que le temps augmente, tandis que leur durée croît avec le temps.

*) Soit (Fig. 24) ZHN le plan vertical mené par la tangente OT au point de chute; cette tangente fait l'angle $HOT = TH = \theta$ avec l'horizon. Soit TAT' le plan passant par la même tangente et par l'axe de figure OA du projectile au point de chute — axe qui fait avec la tangente l'angle $AOT = AT = \delta$; le plan TAT' fait avec le plan vertical ZHT l'angle $ATH = \nu$. Faisons passer par la tangente OT le plan vertical ZAN. Le projectile rencontrera le sol la pointe en avant, si l'arc AN est moindre que $\frac{\pi}{2}$.

Le triangle sphérique ANT donne

$$\cos \overline{AN} = \cos \overline{TA} . \cos \overline{NT} + \sin \overline{AT} . \sin \overline{NT} . \cos \overline{NTA}$$

ou

$$\cos \overline{AN} = \cos \delta . \sin \theta - \sin \delta \cos \theta \cos \nu.$$

Pour que le côté $\overline{AN}$ soit moindre que $\frac{\pi}{2}$ ou que $\cos \overline{AN}$ soit positif, il faut que

$$\cos \delta . \sin \theta > \sin \delta \cos \theta \cos \nu,$$

ou que

$$\cos \nu < \frac{\operatorname{tang} \theta}{\operatorname{tang} \delta}.$$

Si cette condition est satisfaite, le projectile rencontre le sol la pointe en avant. Si $\cos \nu = \frac{\operatorname{tang} \theta}{\operatorname{tang} \delta}$, le projectile tombe sur le flanc. Si $\cos \nu > \frac{\operatorname{tang} \theta}{\operatorname{tang} \delta}$, le projectile rencontre le sol le culot en avant.

Digitized by Google

CHAPITRE V.

SOLUTION DES PROBLÈMES SUR LE TIR DES PROJECTILES OBLONGS.

§ I.

TIR DIRECT.

136. *Tir direct à vitesses initiales dépassant* $360^{m:s}$. La résistance de l'air dans le sens contraire à l'axe de figure des projectiles oblongs est exprimée (*n*° 28) pour des vitesses dépassant $360^{m:s}$ par un monome proportionnel au carré de la vitesse, pour des vitesses comprises entre $360^{m:s}$ et $280^{m:s}$ par un monome proportionnel à la sixième puissance de la vitesse, et pour des vitesses inférieures à $280^{m:s}$ par un binome dont le premier terme est proportionnel à la deuxième puissance de la vitesse et le second à la quatrième puissance de la vitesse.

Par conséquent il est nécessaire de calculer la projection de la trajectoire sur le plan vertical du tir par parties toutes les fois que, la vitesse initiale dépassant $360^{m:s}$, la vitesse de chute est inférieure à $360^{m:s}$. Mais le tir direct ayant lieu sous des angles de projection qui ne dépassent pas 15°, on simplifie beaucoup les calculs, en ne déterminant la projection verticale de la trajectoire par parties que sous un seul angle de projection, soit celui de 5°, et en rapportant les points obtenus de la trajectoire aux coordonnées obliques: l'une X suivant la tangente au point de départ et l'autre Y suivant la direction de la pesanteur. On aura les angles de projection, les angles

Digitized by Google

et les vitesses de chute et les durées des trajets correspondants à diverses portées d'après les points calculés de la projection verticale de la trajectoire sous l'angle de 5°, en admettant (*n*° 79) que, pour les angles de projection ne dépassant pas 15°, les distances verticales des points d'une trajectoire à sa tangente au point de départ sont indépendantes des angles de projection.

Soit φ' l'angle de projection sous lequel on calcule la projection verticale de la trajectoire par parties.

1° On choisira le premier arc de la trajectoire (fig. 25) du point de départ O où la vitesse initiale V est plus grande que $360^{m:s}$ jusqu'au point M où la vitesse $V' = 360^{m:s}$ et on le calculera dans l'hypothèse (*n*° 52)

$$\frac{\rho_A}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc},$$

où

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}_0 \pi R^2 g} \cdot \frac{\Pi_1}{\Pi}$$

et (*n*° 28)

$$\mathfrak{A}_0 = 0{,}044.$$

On déterminera d'abord la valeur approchée de l'angle d'inclinaison φ'' de la trajectoire au point M, à l'aide de la formule (6) *n*° 52

$$\operatorname{tang} \varphi'' = \operatorname{tang} \varphi' - \frac{1}{\alpha} \frac{gc}{V'^2_1} \left(1 - \frac{V'^2_1}{V^2_1}\right),$$

en posant $\alpha = \frac{1}{\cos \varphi'}$, $V_1 = V \cos \varphi'$, $V'_1 = V' \cos \varphi'$, et ayant cette valeur approchée de φ'', on obtiendra α de la formule (*n*° 61)

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi') - \xi(\varphi'')}{\operatorname{tang} \varphi' - \operatorname{tang} \varphi''}.$$

On aura la valeur de φ'' suffisamment précise, en mettant dans l'expression précédente de tang φ'' la valeur de α et en posant dans $V'_1 = V' \cos \varphi''$ pour φ'' sa valeur approchée.

Digitized by Google

Connaissant la valeur de φ'' et celle de α, on trouve

$x' = OQ$ à l'aide de la formule (3) $n°$ 52

$$x' = \frac{2c}{\alpha} \frac{1}{\text{Log } e} \text{Log} \frac{V \cos \varphi'}{V' \cos \varphi''},$$

$y' = MQ$ à l'aide de la formule (1) $n°$ 52

$$y' = x' \text{ tang } \varphi' - \frac{g x'^2}{2 V^2 \cos^2 \varphi'} F\left(\frac{\alpha x'}{c}\right),$$

la durée t' du trajet du projectile du point O au point M à l'aide de la formule (5) $n°$ 52

$$t' = \frac{x'}{V \cos \varphi'} F_1\left(\frac{\alpha x'}{2c}\right).$$

On aura, en coordonnées obliques, l'abscisse $OP = X'$ du point M

$$X' = \frac{x'}{\cos \varphi'},$$

l'ordonnée $MP = Y'$ du point M

$$Y' = X' \sin \varphi' - y'.$$

En admettant l'indépendance des angles de projection et des distances verticales des points de la trajectoire à la tangente au point de départ,

l'angle de projection φ_1 déterminé de l'expression

$$\sin \varphi_1 = \frac{Y'}{X'}$$

doit correspondre à la portée horizontale

$$x_1 = X' \cos \varphi_1.$$

L'angle de chute θ_1, la vitesse de chute v et la durée du trajet t_1 seront définis ($n°$ 79) par

$$\text{tang } \theta_1 = \text{tang } \varphi'' - \text{tang } \varphi' + \text{tang } \varphi_1,$$

$$v = \frac{V' \cos \varphi''}{\cos \theta_1},$$

$$t_1 = t'.$$

Digitized by Google

2°. On calculera les arcs suivants de la trajectoire sous l'angle de projection φ' jusqu'au point $M^{(i)}$ où la vitesse est égale à $280^{m:s}$ dans l'hypothèse de la résistance ($n°$ 53)

$$\frac{\rho_{\Delta}}{P} = f(v) = \frac{v^6}{2gc^5},$$

où

$$c^5 = \frac{P}{2\mathfrak{A}_0 \pi R^2 g} \cdot \frac{\Pi_1}{\Pi}$$

et ($n°$ 28)

$$\mathfrak{A}_0 = 0{,}0000000000026.$$

Pour calculer le deuxième arc on choisira une valeur quelconque pour $X'' = OP'$; on aura pour l'abscisse horizontale $MQ' = x''$ du point M'

$$x'' = (X'' - X')\cos\varphi'.$$

On déterminera d'abord la valeur approchée de l'angle d'inclinaison φ''' au point M', en posant $\alpha = \frac{1}{\cos\varphi''}$, à l'aide de la formule (2) $n°$ 53

$$\operatorname{tang}\varphi''' = \operatorname{tang}\varphi'' - \frac{gx''}{V'^2\cos^2\varphi''}\,\mathfrak{J}(z),$$

où

$$z = \frac{2a^5 V'^4 \cos^4\varphi''.x''}{c^5},$$

et ayant cette valeur approchée de φ''', on obtiendra α de la formule

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi') - \xi(\varphi''')}{\operatorname{tang}\varphi'' - \operatorname{tang}\varphi'''}.$$

Connaissant la valeur de α, on aura la valeur de φ''' suffisamment précise en mettant la valeur de α dans l'expression précédente de $\operatorname{tang}\varphi'''$, et l'on trouvera:

Digitized by Google

l'ordonnée $M'Q' = y''$ du point M' à l'aide de la formule (1) $n°$ 53

$$y'' = x'' \operatorname{tang} \varphi'' - \frac{g x''^2}{2 V'^2 \cos^2 \varphi''} \mathfrak{P}(z);$$

la vitesse V'' au point M' à l'aide de la formule (4) $n°$ 53

$$V'' \cos \varphi'' = \frac{V' \cos \varphi'}{\mathfrak{V}(z)},$$

la durée t'' du trajet du projectile du point M au point M' à l'aide de la formule (5) $n°$ 53

$$t'' = \frac{x''}{V' \cos \varphi''} \mathfrak{T}(z);$$

la durée du trajet du projectile du point de départ O au point M' sera

$$t' + t''.$$

En coordonnées obliques, l'abscisse OP' du point M' est celle que l'on a choisie X'', et on aura l'ordonnée $M'P' = Y''$ du point M'

$$Y'' = Y' + (X'' - X') \sin \varphi' - y''.$$

L'angle de projection φ_2 déterminé de l'expression

$$\sin \varphi_2 = \frac{Y''}{X''}$$

correspondra à la portée horizontale

$$x_2 = X'' \cos \varphi_2.$$

L'angle de chute θ_2, la vitesse de chute v et la durée totale du trajet t_2 seront définis ($n°$ 79) par

$$\operatorname{tang} \theta_2 = \operatorname{tang} \varphi''' - \operatorname{tang} \varphi' + \operatorname{tang} \varphi_2,$$

$$v = \frac{V'' \cos \varphi'''}{\cos \theta_2},$$

$$t_2 = t' + t''.$$

Digitized by Google

On continuera les calculs de la même manière jusqu'au point $M_{(i-1)}$ où la vitesse $V_{(i)}$ n'est pas de beaucoup plus grande que $280^{m:s}$.

3°. Pour calculer le $i+1$ arc de la trajectoire du point $M_{(i-1)}$ où la vitesse est $V_{(i)}$ et l'inclinaison $\varphi_{(i+1)}$ jusqu'au point $M_{(i)}$ où la vitesse est $V_{(i+1)} = 280^{m:s}$, on déterminera d'abord la valeur approchée de l'angle d'inclinaison $\varphi_{(i+2)}$ au point $M_{(i)}$ à l'aide de la formule (6) $n°$ 53

$$\operatorname{tang}\varphi_{(i+2)} = \operatorname{tang}\varphi_{(i+1)} - \frac{gc^5}{3\alpha^5 V^6_{(i+1)}\cos^6\varphi_{(i+2)}}\left(1 - \frac{V^6_{(i+1)}\cos^6\varphi_{(i+2)}}{V^6_{(i)}\cos^6\varphi_{(i+1)}}\right),$$

en posant $\alpha = \frac{1}{\cos\varphi_{(i+1)}}$, $\cos\varphi_{(i+1)} = \cos\varphi_{(i+2)}$, et ayant cette valeur approchée de $\varphi_{(i+2)}$, on obtiendra α de la formule

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi_{(i+1)}) - \xi(\varphi_{(i+2)})}{\operatorname{tang}\varphi_{(i+1)} - \operatorname{tang}\varphi_{(i+2)}}.$$

On aura la valeur de $\varphi_{(i+2)}$ suffisamment précise en mettant dans l'expression précédente de $\operatorname{tang}\varphi_{(i+2)}$ la valeur de α et en substituant dans $V^6_{(i+1)}\cos^6\varphi_{(i+2)}$ à $\varphi_{(i+2)}$ sa valeur approchée.

Connaissant la valeur de $\varphi_{(i+2)}$ et celle de α, on trouve

$x_{(i+1)} = M_{(i-1)}Q_{(i)}$ à l'aide de la formule (3) $n°$ 53

$$x_{i+1} = \frac{c^5}{2\alpha^5 V^4_{(i)}\cos^4\varphi_{(i+1)}}\left(\frac{V^4_{(i)}\cos^4\varphi_{(i+1)}}{V^4_{(i+1)}\cos^4\varphi_{(i+2)}} - 1\right),$$

$y_{(i+1)} = M_{(i)}Q_{(i)}$ à l'aide de la formule (1) $n°$ 53

$$y_{(i+1)} = x_{(i+1)}\operatorname{tang}\varphi_{(i+1)} - \frac{gx^2_{(i+1)}}{2V^2_{(i)}\cos^2\varphi_{(i+1)}}\mathfrak{P}(z),$$

où

$$z = \frac{2\alpha^5 V^4_{(i)}\cos^4\varphi_{(i+1)}\,x_{(i+1)}}{c^5},$$

la durée $t_{(i+1)}$ du trajet du projectile du point $M_{(i-1)}$ jusqu'au point $M_{(i)}$ à l'aide de la formule (5) $n°$ 53

$$t_{(i+1)} = \frac{x_{(i+1)}}{V_{(i)}\cos\varphi_{(i+1)}}\mathfrak{T}(z);$$

Digitized by Google

la durée du trajet du projectile du point de départ O jusqu'au point $M_{(i)}$ sera

$$t' + t'' + \ldots\ldots + t_{(i+1)}.$$

En coordonnées obliques, l'abscisse $OP_{(i)} = X_{(i+1)}$ du point $M_{(i)}$ sera

$$X_{(i+1)} = X_{(i)} + \frac{x_{(i+1)}}{\cos\varphi'},$$

l'ordonnée $M_{(i)}P_{(i)} = Y_{(i+1)}$ du point $M_{(i)}$ sera

$$Y_{(i+1)} = Y_{(i)} + (X_{(i+1)} - X_{(i)})\sin\varphi' - y_{(i+1)}.$$

L'angle de projection φ_{i+1} déterminé de l'expression

$$\sin\varphi_{i+1} = \frac{Y_{(i+1)}}{X_{(i+1)}}$$

correspondra à la portée horizontale

$$x_{i+1} = X_{(i+1)}\cos\varphi_{i+1}.$$

L'angle de chute θ_{i+1}, la vitesse de chute v et la durée totale du trajet seront définis ($n°$ 79) par

$$\operatorname{tang}\theta_{i+1} = \operatorname{tang}\varphi_{(i+2)} - \operatorname{tang}\varphi' + \operatorname{tang}\varphi_{i+1},$$

$$v = \frac{V_{(i+1)}\cos\varphi_{(i+2)}}{\cos\theta_{i+1}},$$

$$t_{i+1} = t' + t'' + \ldots\ldots + t_{(i+1)}.$$

4°. On calculera les arcs suivants de la trajectoire sous l'angle de projection φ', à partir du point $M_{(i)}$ où la vitesse est $V_{(i+1)} = 280^{m:s}$ dans l'hypothèse de la résistance ($n°$ 51)

$$\frac{\rho_A}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc}\left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right],$$

où

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}\pi R^2 g}\cdot\frac{\Pi_1}{\Pi}$$

et ($n°$ 28)

$$\mathfrak{A} = 0{,}012,\ r = 488^{m:s}.$$

Digitized by Google

Pour calculer le $i+2$ arc on choisira une valeur quelconque pour $X_{(i+2)} = OP_{(i+1)}$; on aura pour l'abscisse horizontale $M_{(i)}\,Q_{(i+1)} = x_{(i+2)}$ du point $M_{(i+1)}$

$$x_{(i+2)} = (X_{(i+2)} - X_{(i+1)})\cos\varphi'.$$

On déterminera d'abord la valeur approchée de l'angle d'inclinaison $\varphi_{(i+3)}$ au point $M_{(i+1)}$, en posant $\alpha = \frac{1}{\cos\varphi_{(i+2)}}$, à l'aide de la formule (2) $n°$ 51

$$\operatorname{tang}\varphi_{(i+3)} = \operatorname{tang}\varphi_{(i+2)} - \frac{gx_{(i+2)}}{V^2_{(i+1)}\cos^2\varphi_{(i+2)}}\,\mathfrak{J}(z, V_0^2);$$

où $z = \frac{\alpha x_{(i+2)}}{c}$, $V_0^2 = \frac{\alpha^2 V^2_{(i+1)}\cos^2\varphi_{(i+2)}}{r^2}$,

et ayant cette valeur approchée de $\varphi_{(i+3)}$, on obtiendra α de la formule

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi_{(i+2)}) - \xi(\varphi_{(i+3)})}{\operatorname{tang}\varphi_{(i+2)} - \operatorname{taug}\varphi_{(i+3)}}.$$

Connaissant la valeur de α, on aura la valeur de $\varphi_{(i+3)}$ suffisamment précise en mettant la valeur de α dans l'expression précédente de tang $\varphi_{(i+3)}$, et l'on trouvera:

l'ordonnée $M_{(i+1)}\,Q_{(i+1)} = y_{(i+2)}$ du point $M_{(i+1)}$ à l'aide de la formule (1) $n°$ 51

$$y_{(i+2)} = x_{(i+2)}\operatorname{tang}\varphi_{(i+2)} - \frac{gx^2_{(i+2)}}{2V^2_{(i+1)}\cos^2\varphi_{(i+2)}}\,\mathfrak{P}(z,\ V_0^2);$$

la vitesse $V_{(i+2)}$ au point $M_{(i+1)}$ à l'aide de la formule (4) $n°$ 51

$$V_{(i+2)}\cos\varphi_{(i+3)} = \frac{V_{(i+1)}\cos\varphi_{(i+2)}}{\mathfrak{V}(z,\ V_0^2)};$$

la durée $t_{(i+2)}$ du trajet du projectile du point $M_{(i)}$ au point $M_{(i+1)}$ à l'aide de la formule (5) $n°$ 51

$$t_{(i+2)} = \frac{x_{(i+2)}}{V_{(i+1)}\cos\varphi_{(i+2)}}\,\mathfrak{C}(z,\ V_0^2);$$

Digitized by Google

la durée du trajet du projectile du point de départ O jusqu'au point $M_{(i+1)}$ sera

$$t' + t'' + \ldots + t_{(i+2)}.$$

En coordonnées obliques, l'abscisse $OP_{(i+1)}$ du point $M_{(i+1)}$ est celle que l'on a choisie $X_{(i+2)}$, et on aura l'ordonnée $M_{(i+1)}P_{(i+1)} = Y_{(i+2)}$ du point $M_{(i+1)}$

$$Y_{(i+2)} = Y_{(i+1)} + \left(X_{(i+2)} - X_{(i+1)}\right) \sin \varphi' - y_{(i+2)}.$$

L'angle de projection φ_{i+2} déterminé de l'expression

$$\sin \varphi_{i+2} = \frac{Y_{(i+2)}}{X_{(i+2)}}$$

correspondra à la portée horizontale

$$x_{i+2} = X_{(i+2)} \cos \varphi_{i+2}.$$

L'angle de chute θ_{i+2}, la vitesse de chute v et la durée totale du trajet t_{i+2} seront définis ($n°$ 79) par

$$\operatorname{tang} \theta_{i+2} = \operatorname{tang} \varphi_{(i+3)} - \operatorname{tang} \varphi' + \operatorname{tang} \varphi_{i+2},$$

$$v = \frac{V_{(i+2)} \cos \varphi_{(i+3)}}{\cos \theta_{i+2}},$$

$$t_{i+2} = t' + t'' + \ldots + t_{(i+2)}.$$

On continuera les calculs de la même manière.

5°. On déterminera *les dérivations latérales* z qui correspondent aux portées x_1, x_2... d'après les formules du $n°$ 128.

137. *Cas où la vitesse de chute n'est pas inférieure à* $360^{m:s}$. Il faut dans ce cas calculer la trajectoire, sans la diviser en parties, dans l'hypothèse de la résistance ($n°$ 52)

$$\frac{\rho_A}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc},$$

Digitized by Google

où, en posant $\Pi = \Pi_1$

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}_b \pi R^2 g}$$

et (*n*° 28)

$$\mathfrak{A}_b = 0{,}044.$$

Si la hauteur du but n'est pas considérable, on peut poser $\alpha = 1$, et en appelant a et b la distance horizontale et la verticale du but au point de départ et ε l'angle d'élévation du but, on a $\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{b}{a}$, et l'on obtient pour l'angle de projection $(\varphi - \varepsilon)$ rapporté à la ligne qui va du point de départ au but l'expression (*n*° 84)

$$\sin(\varphi - \varepsilon) = \frac{ga}{2V^2} F\left(\frac{a}{c}\right).$$

Si le point de chute est à hauteur de la bouche à feu, on a $b = o$ et $\varepsilon = o$.

On aura l'angle de chute de la formule

$$\operatorname{tang} \theta = \operatorname{tang} \varphi - \frac{ga}{V^2 \cos^2 \varphi} F_1\left(\frac{a}{c}\right).$$

La vitesse de chute sera

$$v = \frac{V}{e^{\frac{a}{2c}}} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \theta}.$$

On aura la durée

$$t = \frac{a}{V \cos \varphi} F_1\left(\frac{a}{2c}\right).$$

On déterminera *la dérivation latérale* z d'après les formules du *n*° 128.

138. *Déterminer la vitesse initiale d'après celle que le projectile possède à une petite distance de la bouche à feu.* Si l'on

Digitized by Google

connaît la vitesse v à une petite distance de la bouche à feu, et si cette vitesse n'est pas inférieure à $360^{m:s}$, on obtient la vitesse initiale V de l'expression ($n°$ 85)

$$V = v\left(1 + \frac{a}{2c}\right).$$

139. *Tir direct à vitesses initiales comprises entre* $360^{m:s}$ et $280^{m:s}$. La résistance de l'air dans le sens contraire à l'axe de figure des projectiles oblongs étant exprimée ($n°$ 28) pour des vitesses comprises entre $360^{m:s}$ et $280^{m:s}$ par un monome proportionnel à la sixième puissance de la vitesse et pour des vitesses inférieures à $280^{m:s}$ par un binome dont le premier terme est proportionnel à la deuxième puissance de la vitesse et le second à la quatrième puissance de la vitesse, il est nécessaire de calculer dans ce cas la projection verticale de la trajectoire en la divisant en parties, comme on l'a fait au $n°$ 136 pour le deuxième et les arcs suivants de la trajectoire.

On déterminera *les dérivations latérales* z qui correspondent aux diverses portées d'après les formules du $n°$ 128.

140. *Cas où la vitesse de chute n'est pas inférieure à* $280^{m:s}$, *la vitesse initiale ne dépassant pas* $360^{m:s}$. On calculera la projection verticale de la trajectoire, sans la diviser en parties, dans l'hypothèse de la résistance ($n°$ 53)

$$\frac{\rho_\Delta}{P} = f(v) = \frac{v^6}{2gc^5},$$

où, en posant $\Pi = \Pi_1$,

$$c^5 = \frac{P}{2\mathfrak{A}_0 \pi R^2 g}$$

et ($n°$ 28)

$$\mathfrak{A}_0 = 0{,}0000000000026.$$

L'élévation du but n'étant pas considérable, on peut poser $\alpha = 1$. En appelant a et b la distance horizontale et la verticale du but au

Digitized by Google

point de départ et ε l'angle d'élévation du but, on a $\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{b}{a}$ et l'angle de projection $(\varphi - \varepsilon)$ rapporté à la ligne qui va de la bouche à feu au but sera déterminé par l'équation

$$\sin(\varphi - \varepsilon) = \frac{ga}{2V^2}\,\mathfrak{P}(z),$$

où

$$z = \frac{2V^4 a}{c^5}.$$

Si le point de chute est à la hauteur de la bouche à feu, on a $b = o$ et

$$\sin 2\varphi = \frac{ga}{V^2}\,\mathfrak{P}(z).$$

On obtient l'angle de chute de la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{ga}{V^2\cos^2\varphi}\,\mathfrak{J}(z).$$

La vitesse de chute sera

$$v = \frac{V}{\mathfrak{V}(z)} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

On aura la durée

$$t = \frac{a}{V\cos\varphi}\,\mathfrak{T}(z).$$

On déterminera la dérivation latérale z d'après les formules du $n°$ 128.

141. *Déterminer la vitesse initiale d'après celle que le projectile possède à une petite distance de la bouche à feu.* Si le point de la trajectoire où l'on connaît la vitesse v est à une petite distance de la bouche à feu, et si cette vitesse n'est pas inférieure à $280^{m:s}$, on obtient la vitesse initiale V de la formule

$$V = v.\mathfrak{V}(z)$$

Digitized by Google

et comme (*n*° 53)

$$\mathfrak{V}(z) = \left(1 + \frac{2aV^4}{c^5}\right)^{\frac{1}{4}},$$

on a

$$V = \frac{v}{\left(1 - \frac{2av^4}{c^5}\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

En développant $\left(1 - \frac{2aV^4}{c^5}\right)^{\frac{1}{4}}$ en série et en se bornant, par suite de la petite valeur de $\frac{2av^4}{c_5}$, aux deux premiers termes de la série, on obtient

$$V = v\left(1 + \frac{av^4}{2c^5}\right).$$

142. *Tir direct à vitesses initiales moindres que 280*$^{m:s}$. *Possibilité d'appliquer les formules qui se rapportent à ce cas au tir avec des vitesses initiales jusqu'à 325*$^{m:s}$. La courbe (*E*) représentée sur la figure 8 par un trait continu exprime la relation de $\rho' = \frac{\rho_A}{\pi R^2 v^2}$ et des vitesses v à partir de $v = 280^{m:s}$ jusqu'aux petites vitesses; l'équation de cette courbe est (*n*° 27)

$$\rho' = 0{,}012\left[1 + \left(\frac{v}{488}\right)^2\right].$$

La distribution des points (ρ', v) autour de la courbe (*E*) fait voir qu'on peut la prolonger, comme l'indique la ligne pointillée, jusqu'à la vitesse de $325^{m:s}$ et qu'on peut se servir de la dernière expression de ρ' depuis la vitesse de $325^{m:s}$ jusqu'aux faibles vitesses.

Par conséquent on peut résoudre les problèmes du tir de toutes nos bouches à feu actuelles de place, de siége et de campagne, qui impriment aux projectiles, avec les charges en usage, des vitesses initiales moindres que $325^{m:s}$, en adoptant pour la résistance de l'air dans le sens contraires à l'axe de figure des projectiles l'expression

$$\frac{\rho_A}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc}\left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right],$$

Digitized by Google

où, en posant $\Pi = \Pi_1$,

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}\pi R^2 g},$$

et

$$\mathfrak{A} = 0{,}012, \quad r = 488^{m:s}.$$

Les angles de projection n'étant pas très grands dans le cas du tir direct, on peut calculer la trajectoire sans la diviser en parties, et poser $\alpha = 1$ quand les angles de projection sont compris entre 0 et 8°, et $\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tang}\varphi}$ quand les angles de projection dépassent 8°.

Le point de chute étant à une hauteur b au-dessus de la bouche à feu, on aura la portée a à l'aide de la formule (*n*° 88)

$$\frac{c}{\alpha}\operatorname{tang}\varphi \,.\, z - \frac{gc^2}{2\alpha^2 V_1^2} \cdot \mathfrak{P}(z, V_0^2) \,.\, z^2 = b,$$

où $z = \frac{\alpha a}{c}$, $V_0^2 = \left(\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2$.

En essayant successivement plusieurs valeurs de z, prises dans la table des valeurs de $\mathfrak{P}(z, V_0^2)$, on trouvera deux valeurs du premier membre de l'équation, assez rapprochées, entre lesquelles est comprise la valeur de b et on aura la valeur cherchée de z au moyen de parties proportionnelles; on obtiendra la portée en multipliant z par $\frac{c}{\alpha}$.

Le point de chute étant à la hauteur de la bouche à feu, on aura la portée x à l'aide de la formule (*n*° 88)

$$z\mathfrak{P}(z, V_0^2) = \frac{\alpha}{c}\frac{V^2}{g}\sin 2\varphi,$$

où $z = \frac{\alpha x}{c}$, $V_0^2 = \left(\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2$.

Après avoir calculé la valeur du second membre de l'équation, on trouvera la valeur de z à l'aide de la table des $z\mathfrak{P}(z, V_0^2)$, comme on l'a exposé au *n*° 60. En multipliant z par $\frac{c}{\alpha}$ on aura la valeur de la portée cherchée.

Digitized by Google

La vitesse initiale d'un projectile, tiré sous un angle de projection φ, qui doit toucher un point donné (a, b), sera déterminée au moyen de la formule ($n°$ 89)

$$V_0 = \sqrt{\frac{F(\varepsilon)}{Q - F(\varepsilon) + 1}},$$

où $\varepsilon = \frac{\alpha a}{a}$, $Q = \frac{2r^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varepsilon}{ga}$, $\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{b}{a}$.

Après avoir calculé la valeur de V_0 à l'aide de la table de $F(\varepsilon)$, on obtiendra la valeur de la vitesse initiale cherchée V, en multipliant V_0 par $\frac{r}{\alpha \cos\varphi}$.

Si le point à battre est à la hauteur de la bouche à feu, on a $b = o$ et $\varepsilon = o$.

L'angle de projection $(\varphi - \varepsilon)$ *rapporté à la ligne qui va de la bouche à feu au but* est donné par la formule ($n°$ 93)

$$\sin(\varphi - \varepsilon) = \frac{ga}{2V^2} \mathfrak{P}(\varepsilon, V_0^2).$$

Le point de chute étant à la hauteur de la bouche à feu, on a ($n°$ 90)

$$\sin 2\varphi = \frac{ga}{V^2} \mathfrak{P}(\varepsilon, V_0^2).$$

A l'aide des deux dernières formules on calculera d'abord la valeur approchée de φ en posant $\varepsilon = \frac{a}{c}$, $V_0^2 = \frac{V^2}{r^2}$, et puis, s'il le faut, une valeur plus précise, en cherchant α qui correspond à la valeur trouvée de φ et en posant $\varepsilon = \frac{\alpha a}{c}$, $V_0^2 = \frac{\alpha^2 V^2 \cos^2\varphi}{r^2}$.

L'angle de chute est donné par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{gx}{V_1^2} \mathfrak{J}(\varepsilon, V_0^2).$$

La vitesse de chute est donnée par la formule

$$v = \frac{V}{\mathfrak{V}(\varepsilon, V_0^2)} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

Digitized by Google

La durée du trajet est donnée par la formule

$$t = \frac{a}{V_1}\,\mathfrak{C}(z,\ V_0^2).$$

On déterminera *la dérivation latérale* z d'après les formules du $n°$ 128. Si les vitesses sont faibles au point que l'on ne puisse pas négliger $\frac{2}{q^2}$ devant l'unité, on calculera les dérivations z à l'aide des formules du $n°$ 130.

143. *Déterminer la vitesse initiale d'après celle que le projectile possède à une petite distance de la bouche à feu.* Si l'on connaît la vitesse v en un point de la trajectoire à une petite distance de la bouche à feu, et si cette vitesse est moindre que $280^{m:s}$, on aura la vitesse initiale de la formule ($n°$ 92)

$$V = v\left[1 + \frac{a}{2c}\left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right)\right].$$

144. *Comparaison des résultats fournis par les formules avec ceux du tir.* Pour comparer les résultats fournis par nos formules avec ceux du tir, on a calculé, pour différentes distances et différentes charges, les angles de projection de nos canons rayés de tous les calibres, ainsi que les durées des trajets et les dérivations latérales des projectiles de 24^l ($152^{m.m}$) tirés avec la charge de $2^k,866$ de poudre à canon et de ceux de $229^{m.m}$ tirés avec la charge de $21^k,294$ de poudre prismatique. Les résultats obtenus sont insérés dans les tableaux suivants, où l'on a mis en regard les angles de projection et les durées obtenus dans le tir. Les dérivations observées sont ponctuées sur la figure 26 et les courbes des dérivations calculées sont représentées sur cette figure en traits continus, les portées étant prises pour abscisses et les dérivations pour ordonnées.

Digitized by Google

TABLEAU

DES ANGLES DE PROJECTION POUR DIFFÉRENTES PORTÉES DE NOS CANONS RAYÉS.

Canon de 4[l].				Canon de 9[l].				Canon en bronze de 12[l].				Canon en fonte de 12[l].			
Distances		Angles de projection.		Distances		Angles de projection.		Distances		Angles de projection.		Distances		Angles de projection.	
Sagènes.	Mètres.	Calculés.	Obtenus dans le tir.	Sagènes.	Mètres.	Calculés.	Obtenus dans le tir.	Sagènes.	Mètres.	Calculés.	Obtenus dans le tir.	Sagènes.	Mètres.	Calculés.	Obtenus dans le tir.
Charge 0k,614 Vitesse initiale 312m:s				**Charge 1k,299** Vitesse initiale 323m:s				**Charge 1k,433** Vitesse initiale 309m:s				**Charge 1k,024** Vitesse initiale 207m:s			
1560	3328	14°49′	14°17′	1940	4139	17°28′	17°13′	1786	3810	16°44′	17° 0′	1549	3305	18°11′	18°21′
800	1707	6° 2′	5°55′	900	1920	6°14′	6° 8′	900	1920	6°45′	6°35′	900	1920	8°48′	8°41′
400	853	2°43′	2°37′	500	1067	3°11′	3° 2′	500	1067	3°27′	3°21′	500	1067	4°30′	4°25′
Charge 0k,529 Vitesse initiale 272m:s				**Charge 0k,819** Vitesse initiale 254m:s				**Charge 1k,126** Vitesse initiale 275m:s							
700	1493	6°46′	6°51′	700	1493	7°27′	7°27′	700	1493	6°20′	6°20′				
500	1067	4°35′	4°41′	500	1067	5° 6′	5° 1′	500	1067	4°22′	4°22′				
Charge 0k,363 Vitesse initiale 224m:s				**Charge 0k,614** Vitesse initiale 215m:s				**Charge 0k,819** Vitesse initiale 233m:s							
700	1493	9°55′	9°42′	700	1493	10°24′	10°24′	700	1493	8°52′	9° 6′				
500	1067	6°42′	6°39′	300	640	4° 7′	4° 3′	500	1067	6° 4′	6° 9′				
Charge 0k,247 Vitesse initiale 177m:s				**Charge 0k,409** Vitesse initiale 171m:s				**Charge 0k,511** Vitesse initiale 174m:s							
700	1493	16°24′	16°57′	700	1493	17° 6′	17° 5′	700	1493	16° 3′	16°59′				
300	640	6° 9′	5°58′	300	640	6°31′	6°27′	300	640	6°18′	6° 3′				
Charge 0k,162 Vitesse initiale 136m:s				**Charge 0k,256** Vitesse initiale 132m:s				**Charge 0k,307** Vitesse initiale 130m:s							
300	640	10°36′	10°34′	300	640	11° 9′	11° 9′	300	640	11°30′	11°29′				

Digitized by Google

Canon de 24[1]

Distances		Angles de projection.	
Sagènes.	Mètres.	Calculés.	Obtenus dans le tir.
Charge 2k,866			
Vitesse initiale 324m:s			
2450	5227	22°48′	22°23′
1500	3200	11° 4′	11°11′
900	1920	5°57′	6° 7′
500	1067	3° 6′	3° 7′
Charge 2k,252			
Vitesse initiale 284m:s			
700	1493	5°47′	5°46′
500	1067	4° 0′	3°52′
Charge 2k,047			
Vitesse initiale 270m:s			
1740	3712	19°52′	19°39′
900	1920	8°31′	8°37′
500	1067	4°26′	4°30′
Charge 1k,638			
Vitesse initiale 239m:s			
700	1493	8°11′	8°16′
500	1067	5°39′	5°34′
Charge 1k,024			
Vitesse initiale 184m:s			
700	1493	14° 7′	13°50′
300	640	5°34′	5°31′
Charge 0k,614			
Vitesse initiale 136m:s			
300	640	10°19′	10°19′

Canon allégé de 208m.m

Distances		Angles de projection.	
Sagènes.	Mètres.	Calculés.	Obtenus dans le tir.
Charge 7k,780 (poudre prismatique)			
Vitesse initiale 316m:s			
2563	5468	22° 2′	23° 0′
1659	3966	14° 0′	14° 0′
1000	2134	6°42′	6°38′
500	1067	3°10′	3°10′
Charge 6k,142 (poudre prismatique)			
Vitesse initiale 282m:s			
700	1493	5°40′	5°32′
500	1067	3°58′	3°58′
Charge 4k,504 (poudre prismatique)			
Vitesse initiale 236m:s			
700	1493	8° 9′	8° 4′
500	1067	5°41′	5°48′
Charge 3k,276 (poudre prismatique)			
Vitesse initiale 193m:s			
700	1493	12°23′	12°32′
300	1067	4°59′	4°50′
Charge 2k,047 (poudre prismatique)			
Vitesse initiale 142m:s			
500	1067	16°20′	16°51′
300	640	9°17′	8°57′

Canon de côte de 203m.m

Distances		Angles de projection.	
Sagènes.	Mètres.	Calculés.	Obtenus dans le tir.
Charge 12k,899 (poudre prismatique)			
Vitesse initiale 421m:s			
1200	2560	5°32′	5°26′
1000	2134	4°26′	4°23′

Canon de côte 229m.m

Distances		Angles de projection.	
Sagènes.	Mètres.	Calculés.	Obtenus dans le tir.
Charge 21k,294 (poudre prismatique)			
Vitesse initiale 405m:s			
1800	3840	9°33′	9°30′
900	1920	4° 0′	4° 0′
300	640	1°10′	1°11′

Digitized by Google

Tableau des durées et des dérivations latérales pour différentes portées des canons de 24[1] et de 229[m.m].

Canon de 24[1]. Pas des rayures en rayons du projectile $\eta = 120$. Vitesse initiale 324[m:s].					Canon de 229[m.m]. Pas des rayures en rayons du projectile $\eta = 120$. Vitesse initiale 405[m:s].				
Distances		Durées du trajet en secondes.		Dérivations calculées en mètres.	Distances		Durées du trajet en secondes.		Dérivations calculées en mètres.
Sagènes.	Mètres.	Calculées.	Observées.		Sagènes.	Mètres.	Calculées.	Observées.	
2450	5227	22,82	25,2	49	1800	3840	11,95	—	13
1500	3200	11,88	12,9	13	900	1920	5,43	5,3	2,6
900	1920	6,59	6,6	4	300	640	1,65	1,6	0,2
500	1067	3,48	3,4	1					

§ II.

TIR COURBE.

145. *Tir courbe à faibles charges.* Dans le tir courbe à faibles charges, comme en général dans le tir avec des charges qui communiquent une vitesse initiale moindre que 280[m:s], il faut calculer la trajectoire dans l'hypothèse de la résistance de l'air (*n*° 51)

$$\frac{\rho_\Delta}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc}\left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right],$$

où, en posant $\Pi = \Pi_1$,

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}\pi R^2 g}$$

et (*n*° 28) $\mathfrak{A} = 0{,}012$; $r = 488^{m:s}$.

Par suite de la faible influence de la résistance de l'air sur le mouvement des projectiles de gros calibre et de fortes densités tirés avec

Digitized by Google

de petites vitesses initiales, on peut même sous de grands angles de projection (s'ils ne dépassent pas 45°) calculer la trajectoire sans la diviser en parties et prendre pour α la valeur

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\text{tang } \varphi}.$$

146. *Déterminer la portée connaissant l'angle de projection et la vitesse initiale.*

Si le point de chute est élevé d'une quantité b au-dessus de la bouche à feu, on obtiendra la portée à l'aide de l'équation (*n*° 70)

$$\frac{c}{\alpha} \text{tang } \varphi \,.\, z - \frac{gc^2}{2a^2 V_1^2} \cdot \mathfrak{P}(z,\ V_0^2) \,.\, z^2 = b,$$

où

$$z = \frac{\alpha x}{c},\ V_0^2 = \frac{a^2 V_1^2}{r^2}.$$

En essayant successivement plusieurs valeurs de z, prises dans la table des $\mathfrak{P}(z,\ V_0^2)$, on trouvera deux valeurs du premier membre de l'équation, assez rapprochées, entre lesquelles est comprise la valeur de b; on aura la valeur cherchée de z au moyen de parties proportionnelles, et on obtiendra la portée en multipliant z par $\frac{c}{\alpha}$.

Si le point de chute est à la hauteur de la bouche à feu, on a (*n*° 66)

$$z\mathfrak{P}(z,\ V_0^2) = \frac{\alpha}{c} \cdot \frac{V^2}{g} \cdot \sin 2\varphi,$$

où $z = \frac{\alpha x}{c}$, $V_0^2 = \frac{a^2 V_1^2}{r^2}$.

Après avoir calculé la valeur du second membre de l'équation, on trouvera la valeur de z au moyen de la table des $z.\mathfrak{P}(z,\ V_0^2)$, comme on l'a exposé au *n*° 60. En multipliant z par $\frac{c}{\alpha}$ on aura la valeur de la portée cherchée.

147. *Déterminer la vitesse initiale d'un projectile, tiré sous*

Digitized by Google

un angle de projection donné, qui doit passer par un point donné (a, b). On a ($n°$ 71)

$$V_0 = \sqrt{\frac{F(z)}{Q - F(z) + 1}},$$

où $z = \frac{aa}{c}$, $Q = \frac{2r^2}{a^2} \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \varepsilon}{ga}$, $\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{b}{a}$.

Après avoir calculé la valeur de V_0, au moyen de la table de $F(z)$, on obtient la vitesse initiale cherchée V, en multipliant V_0 par $\frac{r}{a \cos \varphi}$.

Si le point à battre est à la hauteur de la bouche à feu, on a $b = o$ et $\varepsilon = o$.

148. *Déterminer l'angle de projection* φ *sous lequel un projectile, tiré avec une vitesse initiale donnée, doit toucher un point donné* (a, b). On a ($n°$ 72)

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{V^2}{ga\mathfrak{P}(z, V_0^2)} \pm \sqrt{\frac{V^2}{ga^2\mathfrak{P}(z, V_0^2)} \left[\frac{V^2}{g\mathfrak{P}(z, V_0^2)} - 2b \right] - 1},$$

où le double signe devant le radical fait voir qu'il y a deux valeurs de l'angle φ qui satisfont aux conditions du problème, l'une plus grande et l'autre plus petite que l'angle de la plus grande portée.

On cherchera d'abord les deux valeurs de φ en posant $\mathfrak{P}(z, V_0^2) = 1$; ces deux valeurs de φ serviront à calculer les deux valeurs de α et les deux valeurs de $\mathfrak{P}(z, V_0^2) = \mathfrak{P}\left(\frac{aa}{c}, \frac{\alpha^2 V^2 \cos^2 \varphi}{r^2}\right)$. En mettant ensuite la plus grande valeur de $\mathfrak{P}(z, V_0^2)$ dans l'expression de $\operatorname{tang} \varphi$ prise avec le signe + devant le radical, on obtiendra la valeur de φ supérieure à l'angle de la plus grande portée, et mettant la plus petite valeur de $\mathfrak{P}(z, V_0^2)$ dans l'expression de $\operatorname{tang} \varphi$ prise avec le signe — devant le radical, on obtiendra la valeur de φ inférieure à l'angle de la plus grande portée.

Si le point de chute est à la hauteur de la bouche à feu, on a ($n°$ 72)

$$\sin 2\varphi = \frac{gx}{V^2} \mathfrak{P}(z, V_0^2).$$

Digitized by Google

Cette expression donne deux valeurs de l'angle φ. On les cherchera d'abord en posant $\mathfrak{P}(z, V_0^2) = 1$; elles serviront à calculer les deux valeurs de α et les deux valeurs de $\mathfrak{P}(z, V_0^2)$. Mettant ensuite dans l'expression de $\sin 2\varphi$ la plus petite valeur de $\mathfrak{P}$, on en tirera la valeur de φ inférieure à l'angle de la plus grande portée, et en mettant la plus grande valeur de $\mathfrak{P}$, on en tirera la valeur de φ supérieure à l'angle de la plus grande portée.

149. *Déterminer l'angle et la vitesse de chute, la durée du trajet et la hauteur totale du jet.*

L'angle de chute est donné par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{gx}{V_1^2}\,\mathfrak{J}(z, V_0^2).$$

La vitesse de chute est donnée par la formule

$$v = \frac{V}{\mathfrak{V}(z, V_0^2)} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

La durée du trajet est donnée par la formule

$$t = \frac{x}{V_1}\,\mathfrak{T}(z, V_0^2).$$

Dans ces formules $z = \frac{\alpha x}{c}$, $V_0^2 = \frac{\alpha^2 V^2 \cos^2\varphi}{r^2}$.

Pour avoir la hauteur totale du jet on prendra ($n°$ 73)

$$z\mathfrak{J}(z, V_0^2) = \frac{\alpha}{c} \cdot \frac{V^2 \sin 2\varphi}{2g};$$

on trouvera la valeur de z à l'aide de la table des $z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$, comme on l'a fait voir au $n°$ 60, et on aura l'abscisse x' qui correspond à la hauteur totale du jet, en multipliant la valeur trouvée de z par $\frac{c}{\alpha}$. La valeur x' substituée à x dans l'équation de la trajectoire donnera

$$y' = x' \operatorname{tang}\varphi - \frac{gx'^2}{2V_1^2}\,\mathfrak{P}\left(\frac{\alpha x'}{c}, \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}\right)$$

la hauteur cherchée du jet.

Digitized by Google

150. *Déterminer la dérivation latérale.* On la déterminera au moyen des formules du $n°$ 130, si $\frac{q}{2} > 1$, et au moyen de celles du $n°$ 133, si $\frac{q}{2} < 1$.

151. *Comparaison des résultats fournis par les formules avec ceux du tir.* Pour comparer les résultats fournis par les formules avec ceux du tir, on a calculé pour différentes vitesses initiales les portées, les durées et les dérivations latérales de l'obus de $152^{m.m}$ tiré du mortier de ce calibre sous l'angle de projection de 45°. Les résultats obtenus sont insérés dans le tableau suivant, où l'on a mis en regard les portées et les durées observées dans le tir. Les dérivations observées sont ponctuées sur la figure 27 et la courbe de dérivations calculées est représentée en trait continu, les portées étant prises pour abscisses et les dérivations pour ordonnées.

Mortier de $152^{m.m}$.
Angle de tir 45°.
Pas des rayures en rayons du projectile $\eta = 80$.

Vitesse initiale.	Portées.		Durées du trajet		Dérivations Calculées.
	Calculées.	Observées.	Calculées.	Observées.	
Mètr:sec.	Mètres.	Mètres.	Secondes.	Secondes.	Mètres.
230	4293	4327	31,1	30,2	178
199	3394	3394			
165	2464	2439	23,0	22,6	88
141	1848	1835			
94	873	879	13,5	13,5	14

152. *Tir à fortes charges sous de grands angles de projection.* Pour déterminer la projection verticale de la trajectoire d'un projectile tiré sous un grand angle de projection, avec une grande vitesse initiale, il faut la partager en parties et calculer l'arc de la trajectoire où la vitesse est supérieure à $360^{m:s}$ dans l'hypothèse de la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, celui où la vitesse est

Digitized by Google

comprise entre $360^{m:s}$ et $280^{m:s}$ dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle à la sixième puissance de la vitesse et celui où la vitesse est moindre que $280^{m:s}$ en exprimant la résistance par un binome dont le premier terme est proportionnel à la deuxième puissance de la vitesse et le second à la quatrième puissance de la vitesse. La marche à suivre est exposée dans les n^{os} 63 et 136.

Lorsqu'on tire à fortes charges, les angles δ que fait l'axe de figure du projectile avec la direction du mouvement sont faibles, et l'on peut calculer les dérivations latérales au moyen des formules du $n°$ 128.

§ III.

TIR PLONGEANT.

153. *Exposé.* Dans la plupart des cas du tir plongeant la vitesse initiale est inférieure à $325^{m:s}$; par suite on s'occupera de la solution des problèmes qui s'y rapportent dans l'hypothèse de la résistance de l'air

$$\frac{\rho_1}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc}\left[1 + \frac{v^2}{r^2}\right],$$

où, en posant $\Pi = \Pi_1$,

$$c = \frac{P}{2\mathfrak{A}\pi R^2 g}$$

et

$$\mathfrak{A} = 0{,}012, \quad r = 488^{m:s}.$$

Lorsque les vitesses sont considérables, le tir plongeant a lieu sous de petits angles de projection, et même, lorsque les vitesses sont petites, les angles de projection ne dépassent pas ordinairement 15°. Par suite dans les formules qui servent à la solution des problèmes sur le tir plongeant, on posera $\alpha = 1$.

154. ***Déterminer la vitesse initiale et l'angle de projection d'un projectile qui doit passer par deux points donnés*** (a, b) **et** (a', b').

Digitized by Google

On calculera ($n°$ 99)

$$V_0 = \sqrt{\frac{a' F\left(\frac{a'}{c}\right) - a F\left(\frac{a}{c}\right)}{Q - \left[a' F\left(\frac{a'}{c}\right) - a F\left(\frac{a}{c}\right)\right] + (a' - a)}},$$

où

$$Q = \frac{2r^2}{g}\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right).$$

Connaissant V_0, on obtiendra l'angle φ de l'expression

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{a' \mathfrak{P}\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) \cdot \frac{b}{a} - a \mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) \cdot \frac{b'}{a'}}{a' \mathfrak{P}\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) - a \mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)}.$$

Ayant la valeur de φ, on déduira V, en multipliant V_0 par $\frac{r}{\cos\varphi}$.

155. *Déterminer la vitesse initiale et l'angle de projection d'un projectile qui doit passer par un point donné* (a, b) *sous une inclinaison déterminée* $— \theta_1$.

On calculera ($n°$ 100)

$$V_0 = \sqrt{\frac{2 F_1\left(\frac{a}{c}\right) - F\left(\frac{a}{c}\right)}{Q + 1 - \left[2 F_1\left(\frac{a}{c}\right) - F\left(\frac{a}{c}\right)\right]}},$$

où

$$Q = \frac{2r^2}{ga}\left(\operatorname{tang}\varepsilon + \operatorname{tang}\theta_1\right), \quad \operatorname{tang}\varepsilon = \frac{b}{a}.$$

Connaissant V_0, on obtiendra l'angle φ de l'expression

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2 \operatorname{tang}\varepsilon \cdot \mathfrak{Z}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) + \operatorname{tang}\theta_1 \mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)}{2 \mathfrak{Z}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) - \mathfrak{P}\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)}.$$

Ayant la valeur de φ, on déduira V, en multipliant V_0 par $\frac{r}{\cos\varphi}$.

156. *Déterminer la dérivation latérale correspondante à la distance connue.* On la déterminera à l'aide des formules du $n°$ 130.

157. *Limite de la hauteur à laquelle on peut raser la crête*

Digitized by Google

d'un parapet sous une inclinaison donnée. Soit φ le plus grand angle de projection qu'on peut obtenir de la bouche à feu montée sur son affût, a la distance du but, b la plus grande hauteur qu'il peut avoir pour que l'inclinaison de la trajectoire en ce point soit $-\theta_1$.

On calculera ($n°$ 101)

$$V_0 = \sqrt{\frac{F_1\left(\frac{a}{c}\right)}{Q + F_1\left(\frac{a}{c}\right) - 1}},$$

où

$$Q = \frac{r^2}{ag}\left(\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\theta_1\right).$$

Connaissant V_0, on déduira V en multipliant V_0 par $\frac{r}{\cos\varphi}$. On obtiendra la valeur de b de l'équation

$$b = a\operatorname{tang}\varphi - \frac{ga^2}{2V_1^2}\Phi\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right).$$

158. *Limite de la hauteur à laquelle on peut, en rasant la crête d'un parapet, toucher un point donné du terre-plein.* Soit a et b les coordonnées de la crête du parapet; α la distance horizontale du point du terre-plein à la crête du parapet, β sa hauteur relative au-dessous de la crête.

On calculera ($n°$ 102)

$$V_0 = \sqrt{\frac{a'^2 F\left(\frac{a'}{c}\right) - a^2 F\left(\frac{a}{c}\right)}{Q - \left[a'^2 F\left(\frac{a'}{c}\right) - a^2 F\left(\frac{a}{c}\right)\right] + \left(a'^2 - a^2\right)}},$$

où

$$a' = a + \alpha;\ Q = \frac{2r^2}{g}\left[\beta + (a' - a)\operatorname{tang}\varphi\right].$$

Connaissant V_0, on déduira V en multipliant V_0 par $\frac{r}{\cos\varphi}$. On obtiendra la valeur de b de l'équation

$$b = a\operatorname{tang}\varphi - \frac{ga^2}{2V_1^2}\Phi\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right).$$

Digitized by Google

APPENDICE.

FORMULES D'INTERPOLATION PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

Il arrive souvent que dans des questions pratiques on ne connaît pas la forme de la fonction U qui exprime la relation entre les inconnues qu'on détermine. Dans beaucoup de cas on prend alors pour U une fonction entière et l'on pose

$$U = a + bx + cx^2 + \ldots\ldots,$$

où l'on calcule les coefficients a, b, $c\ldots$ d'après les valeurs observées de $u = u_1$, u_2, $\ldots u_n$ qui correspondent à différentes valeurs de $x = x_1$, x_2, $\ldots x_n$.

Si le nombre des observations n est plus grand que celui des coefficients inconnus a, b, c, $\ldots$, ce qui arrive ordinairement, on peut déterminer les valeurs les plus probables de ces coefficients par la méthode des moindres carrés; mais pour le faire on est obligé de résoudre tout un système d'équations pour chaque supposition particulière sur le nombre de termes, ou, ce qui est tout un, sur le degré de l'expression cherchée. Cela présente d'autant plus de difficulté qu'il arrive de répéter plusieurs fois de pareils calculs, avant

Digitized by Google

d'être amené à une expression qui représente les données avec une précision suffisante, car il est difficile de prévoir d'avance le degré de cette expression.

Le membre de notre Académie des sciences P. Tchebycheff a donné les formules d'interpolation qui fournissent les polynomes avec les coefficients les plus probables, successivement de tous les degrés, en partant de celui de zéro, et permettent de voir le nombre de termes auquel on peut se borner dans l'expression cherchée. Ces formules se rapportent à deux cas: l'un, plus simple, celui où les valeurs de la variable qui correspondent aux valeurs connues de la fonction interpolée sont équidistantes; l'autre, plus compliqué, celui où les valeurs connues de la fonction correspondent à des valeurs données quelconques de la variable.

Nous donnons les formules pour ces deux cas.

§ 1.

S'il s'agit de déterminer les coefficients les plus probables $a, b, c, \ldots$ de l'expression U représentée par la formule

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots U = a + bx + cx^2 + \ldots,$$

et que l'on ait trouvé des observations d'égale précision les valeurs de $u = u_1, u_2, \ldots u_n$ qui correspondent aux valeurs équidistantes de $x = h, 2h, \ldots nh$, on a pour la fonction cherchée la série suivante:

Digitized by Google

$$U = \frac{\Sigma u_i}{n} + \frac{3\Sigma \frac{i(n-i)}{1.1}\Delta u_i}{n(n^2-1^2).h^2} \cdot h(2x-nh-h)$$

$$+ \frac{5\Sigma \frac{i(i+1)(n-i)(n-i-1)}{1.2.1.2}\Delta^2 u_i}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2).h^4}[3h^2(2x-nh-h)^2-(n^2-1)h^4]$$

$$+ \frac{7\Sigma \frac{i(i+1)(i+2)(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{1.2.3.1.2.3}\Delta^3 u_i}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2).h^6}[15h^3(2x-nh-h)^3-3(3n^2-7)h^5(2x-nh-h)]$$

(II). .

$$+ \frac{9\Sigma \frac{i(i+1)(i+2)(i+3)(n-i)(n-i-1)(n-i-2)(n-i-3)}{1.2.3.4.1\ 2.3.4}\Delta^4 u_i}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n^2-4^2).h^8}[105\,h^4(2x-nh-h)^4.-30(3n^2-13)h^6(2x-nh-h)^2+9(n^2-1)(n^2-9)h^8]$$

$$+ \frac{11\Sigma \frac{i(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)(n-1)(n-i-1)(n-i-2)(n-i-3)(n-i-4)}{1.2.3.4.5.1.2.3.4.5}\Delta^5 u_i}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n^2-4^2)(n^2-5^2).h^{10}}[945\,h^5(2x-nh-h)^5-1050(n^2-7)h^7(2x-nh-h)^3$$

$$+15(15n^4-230n^2+407)h^9(2x-nh-h)]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Digitized by Google

dans laquelle:

1°, les signes de sommation s'étendent à toutes les valeurs de i, depuis $i = 1$, jusqu'à $i = n$;

2°, $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$; $\Delta^2 u_i = \Delta u_{i+1} - \Delta u_i$;
$\Delta^3 u_i = \Delta^2 u_{i+1} - \Delta^2 u_i$; et ainsi de suite;

3°, en formant le tableau connu sous le nom du triangle arithmétique de Pascal, dans lequel chaque nombre est la somme des deux termes correspondants de la ligne précédente:

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
1	6	15	20	15	6
1	7	21	35	35	21
1	8	28	56	70	56
1	9	36	84	126	126
1	10	45	120	210	252
1	11	55	165	330	462
1	12	66	220	495	792
1	13	78	286	715	1287
1	14	91	364	1001	2002
1	15	105	455	1365	3003
1	16	120	560	1820	4368
1	17	136	680	2380	6188
1	18	153	816	3060	8568
1	19	171	969	3876	11628
Combinaisons	1 à 1	2 à 2	3 à 3	4 à 4	5 à 5

et remarquant que

$$\Sigma \frac{i(n-i)}{1.1} = \frac{1}{1}\cdot\frac{n-1}{1} + \frac{2}{1}\cdot\frac{n-2}{1} + \frac{3}{1}\cdot\frac{n-3}{1} + \ldots\ldots;$$

$$\Sigma \frac{i(i+1)(n-i)(n-i-1)}{1.2.1.2} = \frac{1.2}{1.2}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \frac{2.3}{1.2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}$$
$$+ \frac{3.4}{1.2}\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{1.2} + \ldots\ldots;$$

et ainsi de suite,

on voit que: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots\ldots; \frac{1.2}{1.2}, \frac{2.3}{1.2}, \frac{3.4}{1.2}, \ldots\ldots;$

Digitized by Google

et ainsi de suite expriment les nombres de la seconde, troisième, etc., colonne verticale de haut en bas jusqu'aux nombres qui correspondent à la n^{me} ligne horizontale de la 1^{re} colonne verticale; tandis que $\frac{n-1}{1}, \frac{n-2}{1}, \frac{n-3}{1}; \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}, \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}, \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}, \ldots;$ et ainsi de suite expriment les nombres de la seconde, troisième, etc., colonne verticale, de bas en haut à partir des nombres qui correspondent à la n^{me} ligne horizontale de la 1^{re} colonne verticale.

Exemple. *Calculer l'équation de la trajectoire d'un projectile sphérique, d'après les ordonnées observées à des distances équidistantes.* Dans des expériences faites à S^t-Pétersbourg en 1858, il a été tiré 22 boulets de 24 à la charge de $3^k,276$ sous une inclinaison constante, et les hauteurs de chacun d'eux ont été observées sur des cibles en ficelle aux distances de 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400 et 450 sagènes *) du canon. On a obtenu les ordonnées moyennes suivantes:

sag.		pieds.
$x =$ 50	$y =$	10,10
$=$ 100	$=$	18,85
$=$ 150	$=$	24,67
$=$ 200	$=$	28,68
$=$ 250	$=$	29,42
$=$ 300	$=$	26,90
$=$ 350	$=$	20,33
$=$ 400	$=$	9,76
$=$ 450	$=$	$-5,47$

*) 1 sagène = 7 pieds = $2^m,1336$.

Digitized by Google

Pour calculer, d'après ces données, l'équation de la trajectoire, représentons-la par une expression de la forme

$$Y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots\ldots$$

et divisons les deux membres de l'équation par x pour lui donner la forme de l'équation (I) *)

$$U = \frac{Y}{x} = a + bx + cx^2 + \ldots\ldots$$

En exprimant x en sagènes et y en pieds, nous obtiendrons:

$$\begin{aligned}
x = 50 \ldots\ldots\ldots u_1 &= 0{,}2020 \\
= 100 \ldots\ldots\ldots u_2 &= 0{,}1885 \\
= 150 \ldots\ldots\ldots u_3 &= 0{,}1645 \\
= 200 \ldots\ldots\ldots u_4 &= 0{,}1434 \\
= 250 \ldots\ldots\ldots u_5 &= 0{,}1176 \\
= 300 \ldots\ldots\ldots u_6 &= 0{,}0897 \\
= 350 \ldots\ldots\ldots u_7 &= 0{,}0581 \\
= 400 \ldots\ldots\ldots u_8 &= 0{,}0244 \\
= 450 \ldots\ldots\ldots u_9 &= 0{,}0122
\end{aligned}$$

En prenant 50 sagènes pour unité des abscisses que nous représenterons par x' pour les distinguer des abscisses x exprimées en sagènes, on doit poser dans la formule (II) $h = 1$, $n = 9$ (nombre des ordonnées observées) et remplacer x par x'.

---

*) En divisant les deux membres de l'équation par x, on est conduit à appliquer la méthode des moindres carrés aux erreurs relatives des ordonnées $\Delta'_1 = U_1 - u_1 = \frac{Y_1}{h} - \frac{y_1}{h}$, $\Delta'_2 = U_2 - u_2 = \frac{Y_2}{2h} - \frac{y_2}{2h}, \ldots, \Delta'_9 = U_9 - u_9 = \frac{Y_9}{9h} - \frac{y_9}{9h}$, au lieu de les appliquer aux erreurs absolues des ordonnées $\Delta_1 = Y_1 - y_1$, $\Delta_2 = Y_2 - y_2, \ldots \Delta_9 = Y_9 - y_9$, ce qui affaiblit un peu l'importance des ordonnées observées aux grandes distances.

Digitized by Google

Formons le tableau suivant:

i.	u_i.	Δu_i.	$\Delta^2 u_i$.	$\Delta^3 u_i$.
1	0,2020	— 0,0135	— 0,0105	+ 0,0134
2	0,1885	— 0,0240	+ 0,0029	— 0,0076
3	0,1645	— 0,0211	— 0,0047	+ 0,0026
4	0,1434	— 0,0258	— 0,0021	— 0,0016
5	0,1176	— 0,0279	— 0,0037	+ 0,0016
6	0,0897	— 0,0316	— 0,0021	— 0,0008
7	0,0581	— 0,0337	— 0,0029	
8	0,0244	— 0,0366		
9	— 0,0122			
	0,9760			
	$= \Sigma u_i$			

Il est aisé de voir que les différences $\Delta^4 u_i$ seront plus grandes que les troisièmes et que par suite il faut se borner aux troisièmes différences et limiter l'expression de U au terme affecté de x^3.

Calculons:

$$\begin{aligned}
\tfrac{i(n-i)}{1.1}\Delta u_i &= 1.8. - 0{,}0135 = - 0{,}1080 \\
&= 2.7. - 0{,}0240 = - 0{,}3360 \\
&= 3.6. - 0{,}0211 = - 0{,}3798 \\
&= 4.5. - 0{,}0258 = - 0{,}5160 \\
&= 5.4. - 0{,}0279 = - 0{,}5580 \\
&= 6.3. - 0{,}0316 = - 0{,}5688 \\
&= 7.2. - 0{,}0337 = - 0{,}4718 \\
&= 8.1. - 0{,}0366 = - 0{,}2928 \\
\Sigma \tfrac{i(n-i)}{1.1}\Delta u_i &= - 3{,}2312
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\frac{i(i+1)(n-i)(n-i-1)}{1.2.\ 1.2}\Delta^2 u_i = 1.28.-0{,}0105 = -0{,}2940$$
$$= 3.21.+0{,}0029 = +0{,}1827$$
$$= 6.15.-0{,}0047 = -0{,}4230$$
$$= 10.10.-0{,}0021 = -0{,}2100$$
$$= 15.\ 6.-0{,}0037 = -0{,}3300$$
$$= 21.\ 3.-0{,}0021 = -0{,}1323$$
$$= 28.\ 1.-0.0029 = -0{,}0812$$
$$\Sigma\frac{i(i+1)(n-1)(n-i-1)}{1.2.1.2}\Delta^2 u_i = -1{,}2878$$

$$\frac{i(i+1)(i+2)(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{1.2.3.\ 1.2.3}\Delta^3 u_i = 1.56.\ 0{,}0134 = +0{,}7504$$
$$= 4.35.-0{,}0076 = -1{,}0640$$
$$= 10.20.\ 0{,}0026 = +0{,}5200$$
$$= 20.10.-0{,}0016 = -0{,}3200$$
$$= 35.\ 4.\ 0{,}0016 = +0{,}2240$$
$$= 56.\ 1.-0{,}0008 = -0{,}0448$$
$$\Sigma\frac{i(i+1)(i+2)(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{1.2.3.\ 1.2.3}\Delta^3 u_i = +0{,}0656$$

L'équation (II) devient:

$$U = \frac{0{,}9760}{9} + \frac{3.-3{,}2312}{9(9^2-1^2)}(2x'-10)$$
$$+\frac{5.-1{,}2878}{9(9^2-1^2)(9^2-2^2)}[3(2x'-10)^2-9^2+1]$$
$$+\frac{7.0{,}0656}{9(9^2-1^2)(9^2-2^2)(9^2-3^2)}[15(2x'-10)^3-3(3.9^2-7)(2x'-10)],$$

ou

$$U = 0{,}10844-0{,}01346(2x'-10)-0{,}00011002[3(2x'-10)^2-80]$$
$$+0{,}00000011503[15(2x'-10)^3-708(2x'-10)],$$

Digitized by Google

ou

$$U=0{,}10844-0{,}01346(2x'-10)-0{,}00011002[12x'^2-120x'+220]$$
$$+0{,}00000011503[120x'^3-1800x'^2+7588x'-7920],$$

ou

$$U=0{,}108440-0{,}02692\,x'-0{,}0013202\,x'^2+0{,}000013853\,x'^3$$
$$+0{,}134600+0{,}01320\quad-0{,}0002075$$
$$-0{,}024204+0{,}00087$$
$$-0{,}000912$$

ou

$$U=0{,}217924-0{,}01285\,.\,x'-0{,}0015277\,x'^2$$
$$+0{,}000013853\,.\,x'^3.$$

x' étant égale à $\frac{x}{50}$, on a

$$U=0{,}217924-0{,}0002570\,.\,x-0{,}00000061108\,x^2$$
$$+0{,}000000000110824\,.\,x^3.$$

Observant que $U=\frac{y}{x}$, on obtient:

$$y=0{,}217924\,.\,x-0{,}0002570\,.\,x^2-0{,}00000061108\,.\,x^3$$
$$+0{,}0000000005110824\,.\,x^4,$$

où y est exprimée en pieds et x en sagènes,

ou:

$$y=0{,}031132\,.\,x-0{,}000005245\,x^2$$
$$-0{,}000000001715\,x^3+0{,}00000000000004616\,x^4,$$

où y et x sont exprimées en pieds.

En calculant au moyen de cette équation les ordonnées qui correspondent aux distances auxquelles elles ont été observées, on trouve $y=10^{\text{pieds}}{,}18$; $18^{\text{pieds}}{,}62$; $24^{\text{pieds}}{,}90$; $28^{\text{pieds}}{,}59$; $29^{\text{pieds}}{,}30$; $26^{\text{pieds}}{,}65$; $20^{\text{pieds}}{,}26$; $9^{\text{pieds}}{,}78$; $-5^{\text{pieds}}{,}12$.

Digitized by Google

§ II.

S'il s'agit de déterminer les coefficients a, b, c,... de l'expression U représentée par la formule

$$U = F(x).[a + bx + cx^2 + \ldots.],$$

dans laquelle $F(x)$ est une certaine fonction de la variable indépendante x, et que l'on ait trouvé des observations d'égale précision les valeurs de $u = u_1, u_2, u_3, \ldots. u_n$ qui correspondent à différentes valeurs de $x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, on peut calculer les termes de l'expression U, successivement l'un après l'autre, au moyen de la série

$$U = F(x).\left[K_0\psi_0(x) + K_1\psi_1(x) + K_2\psi_2(x) + \ldots.\right]$$

et évaluer en même temps les sommes des carrés des erreurs avec lesquelles la série représente les observations, quand on s'arrête au 1, 2, 3,... λ terme, afin de reconnaître celui auquel on peut s'arrêter d'après la valeur de l'erreur quadratique moyenne avec laquelle les termes trouvés représentent les observations.

Dans les formules suivantes qui servent à calculer les termes de la série, les sommations s'étendent à toutes les valeurs de l'indice i, depuis $i = 1$, jusqu'à $i = n$, et $\Sigma\Delta_\lambda^2$ désigne la somme des carrés des erreurs dans la représentation des valeurs données de u par la série, arrêtée au terme $F(x).K_\lambda\psi_\lambda(x)$, somme d'après laquelle on trouvera l'erreur quadratique moyenne par la formule

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\Delta_\lambda^2}.$$

Formules déterminant le terme $F(x).K_0\psi_0(x)$.

$$(0,0) = \Sigma[F(x_i)]^2,$$

$$K_0 = \frac{\Sigma F(x_i).u_i}{(0,0)},$$

$$\psi_0(x) = 1,$$

$$\Sigma\Delta_0^2 = \Sigma u_i^2 - (0,0)K_0^2.$$

Digitized by Google

Formules déterminant le terme $F(x).K_1\psi_1(x)$.

$$(0,1) = \Sigma[F(x_i)]^2.x_i, \quad (0,2) = \Sigma[F(x_i)]^2.x_i^2,$$

$$a_1 = (0,0),$$

$$b_1 = \frac{(0,1)}{(0,0)}, \ (1,1) = (0,2) - b_1(0,1),$$

$$K_1 = \frac{\Sigma F(x_i)\, x_i\, u_i - (0,1)\, K_0}{(1,1)},$$

$$\psi_1(x) = x - b_1,$$

$$\Sigma\Delta_1^2 = \Sigma\Delta_0^2 - (1,1)\, K_1^2.$$

Formules déterminant le terme $F(x).K_2\psi_2(x)$.

$$(0,3) = \Sigma[F(x_i)]^2.x_i^3, \quad (0,4) = \Sigma[F(x_i)]^2.x_i^4,$$

$$(1,2) = (0,3) - b_1(0,2), \quad (1,3) = (0,4) - b_1(0,3),$$

$$a_2 = \frac{(1,1)}{(0,0)},$$

$$b_2 = \frac{(1,2)}{(1,1)} - \frac{(0,1)}{(0,0)}, \quad (2,2) = (1,3) - b_2(1,2) - a_2(0,2),$$

$$K_2 = \frac{\Sigma F(x_i)\, x_i^2\, u_i - (0,2)\, K_0 - (1,2)\, K_1}{(2,2)},$$

$$\psi_2(x) = (x - b_2)\psi_1(x) - a_2\psi_0(x),$$

$$\Sigma\Delta_2^2 = \Sigma\Delta_1^2 - (2,2)\, K_2^2.$$

Formules déterminant le terme $F(x).K_3\psi_3(x)$.

$$(0,5) = \Sigma[F(x_i)]^2.x_i^5, \ (0,6) = \Sigma[F(x_i)]^2.x_i^6,$$

$$(1,4) = (0,5) - b_1(0,4), \ (1,5) = (0,6) - b_1(0,5),$$

$$(2,3) = (1,4) - b_2(1,3) - a_2(0,3), \ (2,4) = (1,5) - b_2(1,4) - a_2(0,4),$$

$$a_3 = \frac{(2,2)}{(1,1)},$$

$$b_3 = \frac{(2,3)}{(2,2)} - \frac{(1,2)}{(1,1)}, \ (3,3) = (2,4) - b_3(2,3) - a_3(1,3),$$

Digitized by Google

$$K_3 = \frac{\Sigma F(x_i)\, x_i^3\, u_i - (0,3)\, K_0 - (1,3)\, K_1 - (2,3)\, K_2}{(3,3)},$$

$$\psi_3(x) = (x - b_3)\,\psi_2(x) - a_3\,\psi_1(x),$$

$$\Sigma\Delta_3^2 = \Sigma\Delta_2^2 - (3,3)\, K_3^2.$$

Formules déterminant le terme $F(x).K_\lambda\,\psi_\lambda(x)$

$$(0,2\lambda-1) = \Sigma[F(x_i)]^2.x_i^{2\lambda-1}, \qquad (0,2\lambda) = \Sigma[F(x_i)]^2.x_i^{2\lambda},$$

$$(1,2\lambda-2) = (0,2\lambda-1) - b_1(0,2\lambda-2), \qquad (1,2\lambda-1) = (0,2\lambda) - b_1(0,2\lambda-1),$$

$$(2,2\lambda-3) = (1,2\lambda-2) - b_2(1,2\lambda-3) - a_2(0,2\lambda-3), \qquad (2,2\lambda-2) = (1,2\lambda-1) - b_2(1,2\lambda-2) - a_2(0,2\lambda-2),$$

$$(3,2\lambda-4) = (2,2\lambda-3) - b_3(2,2\lambda-4) - a_3(1,2\lambda-4), \qquad (3,2\lambda-3) = (2,2\lambda-2) - b_3(2,2\lambda-3) - a_3(1,2\lambda-3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\lambda-1,\lambda) = (\lambda-2,\lambda+1) - b_{\lambda-1}(\lambda-2,\lambda) - a_{\lambda-1}(\lambda-3,\lambda), \qquad (\lambda-1,\lambda+1) = (\lambda-2,\lambda+2) - b_{\lambda-1}(\lambda-2,\lambda+1) - a_{\lambda-1}(\lambda-3,\lambda+1),$$

$$a_\lambda = \frac{(\lambda-1,\lambda-1)}{(\lambda-2,\lambda-2)},$$

$$b_\lambda = \frac{(\lambda-1,\lambda)}{(\lambda-1,\lambda-1)} - \frac{(\lambda-2,\lambda-1)}{(\lambda-2,\lambda-2)}, \qquad (\lambda,\lambda) = (\lambda-1,\lambda+1) - b_\lambda(\lambda-1,\lambda) - a_\lambda(\lambda-2,\lambda).$$

$$K_\lambda = \frac{\Sigma F(x_i)\, x_i^\lambda u_i - (0,\lambda)\, K_0 - (1,\lambda)\, K_1 - (2,\lambda)\, K_2 - \ldots - (\lambda-1,\lambda)\, K_{\lambda-1}}{(\lambda,\lambda)},$$

$$\psi_\lambda(x) = (x - b_\lambda)\,\psi_{\lambda-1}(x) - a_\lambda\,\psi_{\lambda-2}(x),$$

$$\Sigma\Delta^2{}_\lambda = \Sigma\Delta^2{}_{\lambda-1} - (\lambda,\lambda)\, K^2{}_\lambda.$$

Exemple. *Calculer la projection verticale de la trajectoire d'un projectile oblong d'après les angles de projection obtenus dans le tir à différentes distances.* L'équation de la projection verticale de la trajectoire peut être représentée par

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \ldots$$

La première et la seconde dérivées de cette équation sont

$$y' = \alpha + 2\beta x + 3gx^2 + 4\delta x^3 + \ldots,$$

$$y'' = 2\beta + 6\gamma x + 12\delta x^2 + \ldots\ldots$$

Digitized by Google

Dans le tir direct, on peut, comme il a été démontré, supposer sans erreur sensible, pour calculer la projection verticale de la trajectoire, que la résistance de l'air est dirigée en sens contraire de la tangente; dans ce cas on a ($n°$ 33) $v_1 = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-y''}}$, $\text{tang}\,\theta = y'$, et pour $x = 0$, on obtient $y' = \alpha$, $\theta = \varphi$, $y'' = 2\beta$, $v_1 = V_1$, et par suite $\alpha = \text{tang}\,\varphi$, $\beta = -\frac{g}{2V_1^2}$. L'équation de la projection verticale de la trajectoire devient

$$y = x\,\text{tang}\,\varphi - \frac{g}{2V^2\cos^2\varphi}x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \ldots$$

On obtiendra les angles de projection qui correspondent à différentes portées en posant $y = 0$, et on aura

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{g}{2V^2\cos^2\varphi}x - \gamma x^2 - \delta x^3 - \ldots.$$

ou

$$\sin 2\varphi = \frac{g}{V^2}x - 2\gamma\cos^2\varphi\,.\,x^2 - 2\delta\cos^2\varphi\,.\,x^3 - \ldots.$$

Si les angles de projection ne sont pas très grands, on peut remplacer, sans grande erreur, $\cos^2\varphi$ par sa valeur moyenne dans les limites des angles de projection sous lesquels le tir a eu lieu; en posant par suite

$$-2\gamma\,.\cos^2\varphi = b, \quad -2\delta\cos^2\varphi = c, \ldots$$

et nommant

$$\frac{g}{V^2} = a,$$

on a

$$\sin 2\varphi = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots,$$

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{1}{2\cos^2\varphi}\left[ax + bx^2 + cx^3 + \ldots\right],$$

$$y = x\,\text{tang}\,\varphi - \frac{1}{2\cos^2\varphi}\left[ax^2 + bx^3 + cx^4 + \ldots\right].$$

Digitized by Google

Dans des expériences faites avec notre canon rayé de 24[1], la charge étant de 2[k],866, on a obtenu à différentes distances les angles de projection suivants:

Portées.		Angles de projection φ.	sin 2φ.
Sagènes.	Pieds.		
30	210	11′	0,00640
100	700	37′	0,02152
300	2100	2° 2′	0,07092
500	3500	3° 7′	0,10858
700	4900	4°22′	0,15184
900	6300	6° 6′	0,21132
1200	8400	8°44′	0,30015
1500	10500	11°12′	0,38107
1897	13279	15°21′	0,51054
2452	17164	22°23′	0,70422

Appliquons les formules d'interpolation à déterminer les valeurs les plus probables de a, b, c, . . . dans l'équation

$$\sin 2\varphi = U = x[a + bx + cx^2 + \ldots].$$

Dans ce cas

$$F(x) = x,$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 210 & u_1 &= 0{,}00640\\
x_2 &= 700 & u_2 &= 0{,}02152\\
x_3 &= 2100 & u_3 &= 0{,}07092\\
x_4 &= 3500 & u_4 &= 0{,}10858\\
x_5 &= 4900 & u_5 &= 0{,}15184\\
x_6 &= 6300 & u_6 &= 0{,}21132\\
x_7 &= 8400 & u_7 &= 0{,}30015\\
x_8 &= 10500 & u_8 &= 0{,}38107\\
x_9 &= 13279 & u_9 &= 0{,}51054\\
x_{10} &= 17164 & u_{10} &= 0{,}70422.
\end{aligned}$$

Pour exprimer U par un seul terme

$$F(x).K_0.\psi_0(x) = x.K_0.\psi_0(x),$$

Digitized by Google

on prendra

$[F(x_i)]^2 = x_i^2$	$F(x_i).u_i = x_i u_i$
44100	1,3439
490000	15,0640
4410000	148,9320
12250000	380,0300
24010000	744,0160
39690000	1331,3160
70560000	2521,2600
110250000	4001,2350
176331841	6779,4607
294602896	12087,2321
$(0,0) = \Sigma[F(x_i)]^2 = 732638837$,	$\Sigma F(x_i).u_i = 28009,8897$,

$$K_0 = \frac{\Sigma F(x_i).u_i}{(0,0)} = 0,00003823151,$$

$$\psi_0(x) = 1,$$

ce qui donne

$$F(x).K_0.\psi_0(x) = 0,00003823151.x.$$

Pour trouver la somme de carrés des erreurs $\Sigma\Delta_0^2$, on fera les calculs suivants:

u_i^2
0,00004096
0,00046311
0,00502965
0,01178962
0,02305539
0,04465614
0,09009002
0,14521434
0,26065109
0,49592581
$\Sigma u_i^2 = 1,07691613$
$-(0,0).K_0^2 = -1,07086039$
$\Sigma\Delta_0^2 = \Sigma u_i^2 - (0,0)K_0^2 = 0,00605574$,

Digitized by Google

ce qui donne pour l'erreur quadratique moyenne avec laquelle le terme trouvé représente les valeurs données de $u = \sin 2\varphi$,

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \Sigma \Delta_0^2} = \sqrt{\frac{0{,}00605574}{10}} = 0{,}02461$$

et l'erreur quadratique moyenne avec laquelle sont représentés les angles de projection donnés est approximativement égale à 42′.

Une erreur moyenne aussi considérable n'étant pas admissible, on cherchera le second terme

$$F(x) . K_1 . \psi_1(x),$$

et pour cela on prendra:

$[F(x_i)]^2 . x_i = x_i^3$	$[F(x_i)]^2 . x_i^2 = x_i^4$
9260^4	190^4
34300	2401
926100	194481
4287500	1500625
11764900	5764801
25004700	15752961
59270400	49787136
115762500	121550625
234151052	310929182
505656411	867908663

$(0,1) = \Sigma [F(x_i)]^2 x_i = 9568587890^4$; $(0,2) = \Sigma [F(x_i)]^2 x_i^2 = 13733908940^4$

$a_1 = (0,0) = 732638840$, $\quad - b_1 (0,1) = - 12496999690^4$

$b_1 = \dfrac{(0,1)}{(0,0)} = 13060{,}443$, $\quad (1,1) = (0,2) - b_1 (0,1) = 1236909250^4$

Digitized by Google

$$F(x_i).x_i u_i = x_i^2 u_i$$

282
10547
312757
1330105
3645678
8387291
21178584
42012967
90024458
207465251

$$\Sigma F(x_i).x_i u_i = 374367920$$
$$-(0,1)K_0 = -365821564$$
$$\Sigma F(x_i) x_i u_i - (0,1)K_0 = 8546356;$$

$$K_1 = \frac{\Sigma F(x_i) x_i u_i - (0,1) K_0}{(1,1)} = 0,0000000006909444;$$

$$\psi_1(x) = x - b_1 = x - 13060,44.$$

Par conséquent

$$F(x).K_1 \psi_1(x) = -0,0^5 9024038.x + 0,0^9 6909444.x^2.$$

Pour trouver $\Sigma\Delta_1^2$ on prendra

$$\Sigma\Delta_0^2 = 0,00605574$$
$$-(1,1)K_1^2 = - 590506$$
$$\Sigma\Delta_1^2 = \Sigma\Delta_0^2 - (1,1)K_1^2 = 0,00015068;$$

ce qui donne pour l'erreur quadratique moyenne avec laquelle les deux premiers termes de la série représentent les valeurs données de $u = \sin 2\varphi$,

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\Delta_1^2} = \sqrt{\frac{0,00015068}{10}} = 0,003882$$

et l'erreur quadratique moyenne avec laquelle sont représentés les angles de projection donnés est approximativement égale à 7′.

Digitized by Google

On peut prendre cette erreur moyenne pour admissible; mais pour montrer la manière de calculer le troisième terme

$$F(x).K_2\psi_2(x),$$

on déterminera

$[F(x_i)]^2\ x_i^3 = x_i^5.$	$[F(x_i)]^2.x^4 = x_i^8.$
170^{13}	10^{17}
4084	858
52522	18383
282475	138413
992436	625235
4182119	3512980
12762816	13400956
41288286	54826725
148967843	255688406
$(0,3) = \Sigma\,[F(x_i)]^2\,x_i^3 = 2085325980^{13}$;	$(0,4) = \Sigma\,[F(x_i)]^2\,x_1^4 = 32821195707^{17}$
$-b_1\,(0,2) = -\ 1793709360^{13}$;	$-b_1\,(0,3) = -\ 27235281407^{17}$
$(1,2) = \quad 291616620^{13}$;	$(1,3 = \quad 5585914307^{17}$
	$-b_2\,(1,2) = -\ 3066579107^{17}$
	$-a_2\,(0,2) = -\ 2318686807^{17}$
	$(2,2) = \quad 2006484017$

$$a_2 = \frac{(1,1)}{(0,0)} = 16882934;$$

$$\frac{(1,2)}{(1,1)} = 23576{,}23$$

$$-\frac{(0,1)}{(0,0)} = -13060{,}44$$

$$b_2 = 10515{,}79$$

$F(x_i).x_i^2 u_i = x_i^3 u_i.$
60^4
138
65679
465537
1786382
5283993
17790011
44113616
119543478
356093358
$\Sigma F(x_i)\,x_i^2\,u_i = 5451421980^4$
$-(0,2)\,K_0 = -5250680790^4$
$-(1.2)\,K_1 = -\ 201490870^4$
$\Sigma F(x_i)\,x_i^2\,u_i - (0,2)\,K_0 - (1,2)K_1 = -\ 749680^4;$

Digitized by Google

$$K_2 = \frac{\Sigma F(x_i)\, x_i^2\, u_i - (0,2)\, K_0 - (1,2)\, K_1}{(2,2)} = -0,0^{14}3736287$$

$$\psi_2(x) = (x - b_2)\,\psi_1(x) - a_2$$
$$= x^2 - 23576,23\,.\,x + 120453700.$$

Par conséquent

$$F(x).K_2\,\psi_2(x) = -0,0^6450050\,.\,x + 0,0^{10}880876\,.\,x^2 - 0,0^{14}373629\,.\,x^3,$$

et comme

$$\Sigma\Delta_1^2 = 0,00015068$$
$$-(2,2)\,K_2^2 = - \quad 280$$
$$\Sigma\Delta_2^2 = 0,00014578,$$

on trouve pour l'erreur quadratique moyenne avec laquelle les trois premiers termes de la série représentent les valeurs données de $u = \sin 2\varphi$,

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\Delta_2^2} = \sqrt{\frac{0,00014788}{10}} = 0,003845$$

et l'erreur quadratique moyenne avec laquelle sont représentés les angles de projection donnés est approximativement égale à $6'\frac{1}{2}$.

En s'arrêtant aux trois termes trouvés de la série, on aura pour l'expression cherchée de $U = \sin 2\varphi$, le pied étant pris pour unité,

$$+ 0,0^4 38232\,.\,x$$
$$- 0,0^4 09024\,.\,x + 0,0^9 69094\,.\,x^2$$
$$- 0,0^4 00450\,.\,x + 0,0^9 08809\,.\,x^2 - 0,0^{14} 37363\,.\,x^3.$$
$$\sin 2\varphi = 0,0^4 28758\,.\,x + 0,0^9 77903\,.\,x^2 - 0,0^{14} 37363\,.\,x^3.$$

Digitized by Google

En calculant d'après cette formule les valeurs de sin 2φ et de φ qui correspondent aux portées auxquelles elles ont été obtenues dans les expériences du tir, on trouve

Portées.	sin 2φ.	Angles de projection φ.
Sagènes.		
30	0,00607	10′
100	0,02051	35′
300	0,06380	1°50′
500	0,11003	3° 9′
700	0,15918	4°35′
900	0,21117	6° 6′
1200	0,29433	8°34′
1500	0,38353	11°17′
1897	0,51050	15°21′
2452	0,70421	22°28′

L'usage de la machine à calculer: arithmomètre de M. Thomas, de Colmar, pour trouver les produits, les puissances et les quotients qui entrent dans les formules d'interpolation, facilite beaucoup les calculs.

L'équation de la projection verticale de la trajectoire sera

$$y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} \left[ax^2 + bx^3 + cx^4 \right],$$

dans laquelle, le pied étant pris pour unité,

$$a = 0{,}000028758,\ b = 0{,}00000000077903,$$

$$c = 0{,}000000000000037363.$$

On trouvera la vitesse initiale V de l'expression

$$\frac{g}{V^2} = a,$$

et on aura

$$V = 1058^{\text{pieds:sec}}.$$

La mesure directe a donné pour la vitesse initiale la valeur de $1063^{\text{pieds:sec}}$.

Digitized by Google

ANNEXE.

TABLES POUR FACILITER LE CALCUL

DES FORMULES BALISTIQUES.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLES POUR FACILITER LE CALCUL DES FORMULES BALISTIQUES.

Tables: Pages.

I. Valeurs de $\xi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos\varphi} + \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right]$,

$\frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tang}\varphi}$ et de $\alpha = \frac{\xi(\varphi) - \xi(\theta)}{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta}$ 1

II. Valeurs de $\frac{P}{2\pi R^2 g}$ 2

III. Valeurs de e^z 3

IV. Valeurs de $F_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ 5

V. Valeurs de $F(z) = \frac{e^z - z - 1}{\frac{1}{2}z^2}$ 7

VI. Valeurs de $\mathfrak{P}(z, V_0^2) = (1 + V_0^2) F(z) - V_0^2$ 9

VII. Valeurs de $\mathfrak{J}(z, V_0^2) = (1 + V_0^2) F_1(z) - V_0^2$ 26

VIII. Valeurs de $\mathfrak{V}(z, V_0^2) = \sqrt{(1 + V_0^2) e^z - V_0^2}$ 43

IX. Valeurs de $\mathfrak{C}(z, V_0^2) = \frac{\mathfrak{V}(z, V_0^2) - 1 - V_0\left(\operatorname{arctang} V_0 - \operatorname{arctang}\frac{V_0}{\mathfrak{V}(z, V_0^2)}\right)}{\frac{1}{2}z}$. 60

X. Valeurs de $z\mathfrak{P}(z, V_0^2)$ 77

XI. Valeurs de $z\mathfrak{J}(z, V_0^2)$ 94

XII. Valeurs de $\mathfrak{P}(z) = \frac{(1+z)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}z - 1}{\frac{15}{8}z^2}$ 111

Digitized by Google

Tables: Pages.

XIII. Valeurs de $\mathfrak{J}(z) = \frac{(1+z)^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{3}{2}z}$ 112

XIV. Valeurs de $\mathfrak{D}(z) = (1+z)^{\frac{1}{2}}$ 113

XV. Valeurs de $\mathfrak{T}(z) = \frac{(1+z)^{\frac{5}{4}} - 1}{\frac{5}{4}z}$ 114

XVI. Logarithmes vulgaires. 115

XVII. Logarithmes des fonctions circulaires. 119

XVIII. Valeurs naturelles des fonctions circulaires 122

XIX. Nombres les plus usuels et leurs logarithmes vulgaires. . . . 128

XX. Centres de gravité et moments d'inertie de certains corps de révolution. 129

Digitized by Google

ERRATA.

Page.	*Ligne.*	*Au lieu de:*	*Lisez:*
63	2	$s = 1{,}38$	$s = 0{,}38$
128	30	Poude: ponce^2	Poude: pouce^2
	34	4,00689	3,00689.

Digitized by Google

Digitized by Google

Table I.

Table des valeurs de $\xi(\varphi) = \frac{1}{2}\left[\frac{\text{tang}\,\varphi}{\cos\varphi} + \log\text{tang}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)\right]$.				Table des valeurs de $\frac{\xi(\varphi)}{\text{tang}\,\varphi} = \frac{1}{2}\left[\sec\varphi + \cot\varphi \log\text{tang}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)\right]$.			
φ	$\xi(\varphi)$	φ	$\xi(\varphi)$	φ	$\frac{\xi(\varphi)}{\text{tang}\,\varphi}$	φ	$\frac{\xi(\varphi)}{\text{tang}\,\varphi}$
0°	0,0000000	45°	1,1477934	0°	1,00000	45	1,14777
1	0,0174559	46	1,1984896	1	1,00005	46	1,15741
2	0,0349278	47	1,2520116	2	1,00020	47	1,16752
3	0,0524318	48	1,3086253	3	1,00045	48	1,17826
4	0,0699837	49	1,3686303	4	1,00081	49	1,18973
5	0,0876001	50	1,4323614	5	1,00127	50	1,20189
6	0,1052974	51	1,5001970	6	1,00184	51	1,21483
7	0,1230926	52	1,5725657	7	1,00251	52	1,22862
8	0,1410022	53	1,6499519	8	1,00328	53	1,24333
9	0,1590442	54	1,7329189	9	1,00417	54	1,25903
10	0,1772365	55	1,8220670	10	1,00516	55	1,27583
11	0,1955976	56	1,9181512	11	1,00626	56	1,29381
12	0,2141464	57	2,0219938	12	1,00748	57	1,31310
13	0,2329030	58	2,1345596	13	1,00881	58	1,33382
14	0,2518877	59	2,2569691	14	1,00912	59	1,35612
15	0,2711218	60	2,3903296	15	1,01184	60	1,38017
16	0,2906277	61	2,536776	16	1,01354	61	1,40616
17	0,3104288	62	2,697518	17	1,01536	62	1,43429
18	0,3305495	63	2,874904	18	1,01732	63	1,46484
19	0,3510153	64	3,071501	19	1,01942	64	1,49807
20	0,3718537	65	3,290396	20	1,02165	65	1,53433
21	0,3930932	66	3,535320	21	1,02404	66	1,57402
22	0,4147637	67	3,810834	22	1,02657	67	1,61759
23	0,4368974	68	4,122549	23	1,02926	68	1,66562
24	0,4595290	69	4,477441	24	1,03212	69	1,71872
25	0,4826944	70	4,884250	25	1,03514	70	1,77772
26	0,5064324	71	5,354075	26	1,03834	71	1,84355
27	0,5307845	72	5,901161	27	1,04172	72	1,91740
28	0,5557952	73	6,544048	28	1,04530	73	2,00071
29	0,5815120	74	7,307220	29	1,04907	74	2,09531
30	0,6079863	75	8,223570	30	1,05306	75	2,20349
31	0,6352732	76	9,338073	31	1,05727	76	2,32824
32	0,6634325	77	10,713657	32	1,06171	77	2,47344
33	0,6925287	78	12,440411	33	1,06640	78	2,64428
34	0,7226311	79	14,651100	34	1,07134	79	2,84788
35	0,7538161	80	17,54793	35	1,07596	80	3,09418
36	0,7861656	81	21,45123	36	1,08206	81	3,29753
37	0,8197699	82	26,89318	37	1,08787	82	3,77960
38	0,8547266	83	34,81136	38	1,09400	83	4,27430
39	0,8911439	84	46,93522	39	1,10001	84	4,93833
40	0,9291380	85	67,12291	40	1,10730	85	5,87383
41	0,9688390	86	104,1815	41	1,11452	86	7,28508
42	1,0103900	87	184,1162	42	1,12215	87	9,90478
43	1,0539469	88	412,2915	43	1,13022	88	14,39754
44	1,0996840	89	1643,690	44	1,13875	89	28,69102
45	1,1477934	90	infini.	45	1,14777	90	infini.

Digitized by Google

Suite de la Table I.

Table des valeurs de $\alpha = \frac{\xi(\varphi) - \xi(\theta)}{\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\theta}$.

de φ à θ	α	de φ à θ	α
Arcs de 5 degrés.		Arcs de 10 degrés.	
75 à 70	3,39164	80 à 70	4,33124
70 65	2,64322	70 60	2,45597
65 60	2,18119	60 50	1,77303
60 55	1,86990	50 40	1,42698
55 50	1,64850	40 30	1,22694
50 45	1,48372	30 20	1,10663
45 40	1,35895	20 10	1,03718
40 35	1,26232	10 0	1,00514
35 30	1,18695		
30 25	1,12835	Arcs de 15 degrés.	
25 20	1,08306	75 60	2,91662
20 15	1,04907	60 45	1,69734
15 10	1,02473	45 30	1,27720
10 5	1,00896	30 15	1,08873
5 0	1,00126	15 0	1,01184

II. Table des valeurs de $\frac{P}{2\pi R^2 g}$.

Projectiles sphériques.	Diamètre 2R.	Poids P.	$\frac{P}{2\pi R^2 g}$	Projectiles oblongs.	Diamètre 2R.	Poids P.	$\frac{P}{2\pi R^2 g}$
	m	k			m	k	
Boulets de 120^l	0,2695	72,48	64,71	Obus de 279^{mm}	0,2794	225,22	187,05
Boulets de 60^l	0,1921	26,00	45,68	Obus de 229^{mm}	0,2286	122,85	152,41
Boulets de 36^l	0,1698	17,73	40,11	Obus de 203^{mm}	0,2032	78,62	123,45
Boulets de 30^l	0,1590	14,94	38,31	Obus de 152^{mm}	0,1524	36,97	103,20
Boulets de 24^l	0,1490	12,08	35,28	Obus de 24^l	0,1524	29,20	81,51
Boulets de 18^l	0,1337	8,72	31,63	Obus de 12^l	0,1219	14,78	64,49
Boulets de 12^l	0,1185	6,06	27,98	Obus de 9^l	0,1067	11,06	62,99
Boulets de 6^l	0,0921	2,87	21,94	Obus de 9^l (à balles).	0,1067	12,77	72,72
	m	k		Obus de 4^l	0,0869	5,73	49,19
Obus de 200^l	0,3307	97,50	57,80	Obus de 4^l (à balles).	0,0869	6,59	56,58
Obus de 120^l	0,2695	51,60	46,07	Obus de 3^l	0,0762	4,01	44,78
Obus de 80^l	0,2413	37,38	41,62	Obus de 3^l (à balles).	0,0762	4,58	51,14
Obus de 40^l	0,1921	18,43	32,38				
Obus de 20^l	0,1490	8,93	26,08				
Obus de 10^l	0,1185	4,50	20,78				

Digitized by Google

z	e^z	Diff.	z	e^z	Diff.	z	e^z	Diff.
0,00	1,0000	100	0,50	1,6487	166	1,00	2,7183	273
0,01	1,0100	102	0,51	1,6653	167	1,01	2,7456	276
0,02	1,0202	102	0,52	1,6820	169	1,02	2,7732	279
0,03	1,0304	104	0,53	1,6989	171	1,03	2,8011	281
0,04	1,0408	105	0,54	1,7160	173	1,04	2,8292	285
0,05	1,0513	105	0,55	1,7333	174	1,05	2,8577	287
0,06	1,0618	107	0,56	1,7507	176	1,06	2,8864	290
0,07	1,0725	108	0,57	1,7683	177	1,07	2,9154	293
0,08	1,0833	109	0,58	1,7860	180	1,08	2,9447	296
0,09	1,0942	110	0,59	1,8040	181	1,09	2,9743	299
0,10	1,1052	111	0,60	1,8221	183	1,10	3,0042	302
0,11	1,1163	112	0,61	1,8404	185	1,11	3,0344	305
0,12	1,1275	113	0,62	1,8589	187	1,12	3,0649	308
0,13	1,1388	115	0,63	1,8776	189	1,13	3,0957	311
0,14	1,1503	115	0,64	1,8965	190	1,14	3,1268	314
0,15	1,1618	117	0,65	1,9155	193	1,15	3,1582	317
0,16	1,1735	118	0,66	1,9348	194	1,16	3,1899	321
0,17	1,1853	119	0,67	1,9542	197	1,17	3,2220	324
0,18	1,1972	120	0,68	1,9739	198	1,18	3,2544	327
0,19	1,2092	122	0,69	1,9937	201	1,19	3,2871	330
0,20	1,2214	123	0,70	2,0138	202	1,20	3,3201	334
0,21	1,2337	124	0,71	2,0340	204	1,21	3,3535	337
0,22	1,2461	125	0,72	2,0544	207	1,22	3,3872	340
0,23	1,2586	126	0,73	2,0751	208	1,23	3,4212	344
0,24	1,2712	128	0,74	2,0959	211	1,24	3,4556	347
0,25	1,2840	129	0,75	2,1170	213	1,25	3,4903	351
0,26	1,2969	131	0,76	2,1383	215	1,26	3,5254	354
0,27	1,3100	131	0,77	2,1598	217	1,27	3,5608	358
0,28	1,3231	133	0,78	2,1815	219	1,28	3,5966	362
0,29	1,3364	135	0,79	2,2034	221	1,29	3,6328	365
0,30	1,3499	135	0,80	2,2255	224	1,30	3,6693	369
0,31	1,3634	137	0,81	2,2479	226	1,31	3,7062	372
0,32	1,3771	139	0,82	2,2705	228	1,32	3,7434	376
0,33	1,3910	139	0,83	2,2933	231	1,33	3,7810	380
0,34	1,4049	142	0,84	2,3164	232	1,34	3,8190	384
0,35	1,4191	142	0,85	2,3396	236	1,35	3,8574	388
0,36	1,4333	144	0,86	2,3632	237	1,36	3,8962	391
0,37	1,4477	146	0,87	2,3869	240	1,37	3,9353	396
0,38	1,4623	147	0,88	2,4109	242	1,38	3,9749	399
0,39	1,4770	148	0,89	2,4351	245	1,39	4,0148	404
0,40	1,4918	150	0,90	2,4596	247	1,40	4,0552	408
0,41	1,5068	152	0,91	2,4843	250	1,41	4,0960	411
0,42	1,5220	153	0,92	2,5093	252	1,42	4,1371	416
0,43	1,5373	154	0,93	2,5345	255	1,43	4,1787	420
0,44	1,5527	156	0,94	2,5600	257	1,44	4 2207	424
0,45	1,5683	158	0,95	2,5857	260	1,45	4,2631	428
0,46	1,5841	159	0,96	2,6117	262	1,46	4,3059	433
0,47	1,6000	161	0,97	2,6379	266	1,47	4,3492	437
0,48	1,6161	162	0,98	2,6645	267	1,48	4,3929	442
0,49	1,6323	164	0,99	2,6912	271	1,49	4,4371	446
0,50	1,6487		1,00	2,7183		1,50	4,4817	

Digitized by Google

z	e^z	Diff.	z	e^z	Diff.	z	e^z	Diff.
1,50	4,4817	450	2,00	7,3891	742	2,50	12,1825	1224
1,51	4,5267	455	2,01	7,4633	750	2,51	12,3049	1237
1,52	4,5722	460	2,02	7,5383	758	2,52	12,4286	1249
1,53	4,6182	464	2,03	7,6141	765	2,53	12,5535	1262
1,54	4,6646	469	2,04	7,6906	773	2,54	12,6797	1274
1,55	4,7115	473	2,05	7,7679	781	2,55	12,8071	1287
1,56	4,7588	478	2,06	7,8460	788	2,56	12,9358	1300
1,57	4,8066	484	2,07	7,9248	797	2,57	13,0658	1313
1,58	4,8550	487	2,08	8,0045	804	2,58	13,1971	1327
1 59	4,9037	493	2,09	8,0849	813	2,59	13,3298	1339
1,60	4,9530	498	2,10	8,1662	820	2,60	13,4637	1353
1,61	5,0028	503	2,11	8,2482	829	2,61	13,5990	1367
1,62	5,0531	508	2,12	8,3311	838	2,62	13,7357	1381
1,63	5,1039	513	2,13	8,4149	845	2,63	13,8738	1394
1,64	5,1552	518	2,14	8,4994	855	2,64	14,0132	1408
1,65	5,2070	523	2,15	8,5849	862	2,65	14,1540	1423
1,66	5,2593	529	2,16	8,6711	872	2,66	14,2963	1437
1,67	5,3122	534	2,17	8,7583	880	2,67	14,4400	1451
1,68	5,3656	539	2,18	8,8463	889	2,68	14,5851	1466
1,69	5,4195	544	2,19	8,9352	898	2,69	14,7317	1480
1,70	5,4739	551	2,20	9,0250	907	2,70	14,8797	1494
1,71	5,5290	555	2,21	9,1157	916	2,71	15,0293	1510
1,72	5,5845	561	2,22	9,2073	926	2,72	15,1803	1526
1,73	5,6406	567	2,23	9,2999	934	2,73	15,3329	1541
1,74	5,6973	573	2,24	9,3933	944	2,74	15,4870	1556
1,75	5,7546	578	2,25	9,4877	954	2,75	15,6426	1572
1,76	5,8124	585	2,26	9,5831	963	2,76	15,7998	1588
1,77	5,8709	590	2,27	9,6794	973	2,77	15,9586	1604
1,78	5,9299	595	2,28	9,7767	982	2,78	16,1190	1620
1,79	5,9894	602	2,29	9,8749	993	2,79	16,2810	1636
1,80	6,0496	608	2,30	9,9742	1002	2,80	16,4446	1653
1,81	6,1104	615	2,31	10,0744	1013	2,81	16,6099	1670
1,82	6,1719	620	2,32	10,1757	1022	2,82	16,7769	1686
1,83	6,2339	626	2,33	10,2779	1033	2,83	16,9455	1703
1,84	6,2965	633	2,34	10,3812	1044	2 84	17,1158	1720
1,85	6,3598	639	2 35	10,4856	1053	2,85	17,2878	1737
1,86	6,4237	646	2,36	10,5909	1065	2,86	17,4615	1755
1,87	6,4883	652	2,37	10,6974	1075	2,87	17,6370	1773
1,88	6 5535	659	2.38	10,8049	1086	2,88	17,8143	1790
1,89	6,6194	665	2.39	10 9135	1097	2,89	17,9933	1808
1,90	6,6859	672	2,40	11,0232	1108	2,90	18,1741	1827
1,91	6,7531	679	2,41	11,1340	1119	2,91	18,3568	1845
1,92	6,8210	685	2,42	11,2459	1130	2,92	18,5413	1863
1,93	6,8895	692	2,43	11,3589	1141	2,93	18,7276	1882
1,94	6,9587	700	2,44	11,4730	1153	2,94	18,9158	1902
1,95	7,0287	706	2,45	11,5883	1165	2,95	19,1060	1920
1,96	7,0993	714	2,46	11,7048	1176	2,96	19,2980	1939
1,97	7,1707	720	2,47	11,8224	1189	2,97	19,4919	1959
1,98	7,2427	728	2,48	11,9413	1200	2,98	19,6878	1979
1,99	7,3155	736	2.49	12,0613	1212	2,99	19,8857	1998
2,00	7,3891		2,50	12,1825		3,00	20,0855	

Digitized by Google

z	$F_1(z)$	Diff.	z	$F_1(z)$	Diff.	z	$F_1(z)$	Diff.
0,00	1,0000	50	0,50	1,2974	71	1,00	1,7183	100
0,01	1,0050	51	0,51	1,3045	71	1,01	1,7283	101
0,02	1,0101	51	0,52	1,3116	71	1,02	1,7384	102
0,03	1,0152	51	0,53	1,3187	72	1,03	1,7486	103
0,04	1,0203	51	0,54	1,3259	73	1,04	1,7589	103
0,05	1,0254	53	0,55	1,3332	73	1,05	1,7692	104
0,06	1,0307	51	0,56	1,3405	73	1,06	1,7796	105
0,07	1,0358	53	0,57	1,3478	74	1,07	1,7901	105
0,08	1,0411	53	0,58	1,3552	75	1,08	1,8006	107
0,09	1,0464	53	0,59	1,3627	75	1,09	1,8113	107
0,10	1,0517	54	0,60	1,3702	76	1,10	1,8220	108
0,11	1,0571	54	0,61	1,3778	76	1,11	1,8328	118
0,12	1,0625	54	0,62	1,3854	76	1,12	1,8436	110
0,13	1,0679	55	0,63	1,3930	77	1,13	1,8546	110
0,14	1,0734	55	0,64	1,4007	78	1,14	1,8656	111
0,15	1,0789	55	0,65	1,4085	78	1,15	1,8767	112
0,16	1,0844	56	0,66	1,4163	79	1,16	1,8879	112
0,17	1,0900	56	0,67	1,4242	80	1,17	1,8991	114
0,18	1,0956	57	0,68	1,4322	80	1,18	1,9105	114
0,19	1,1013	57	0,69	1,4402	80	1,19	1,9219	115
0,20	1,1070	57	0,70	1,4482	81	1,20	2,9334	116
0,21	1,1127	58	0,71	1,4563	82	1,21	1,9450	117
0,22	1,1185	58	0,72	1,4645	82	1,22	1,9567	118
0,23	1,1243	59	0,73	1,4727	83	1,23	1,9685	118
0,24	1,1302	59	0,74	1,4810	83	1,24	1,9803	120
0,25	1,1361	59	0,75	1,4893	84	1,25	1,9923	120
0,26	1,1420	60	0,76	1,4977	85	1,26	2,0043	121
0,27	1,1480	60	0,77	1,5062	85	1,27	2,0164	122
0,28	1,1540	61	0,78	1,5147	86	1,28	2,0286	123
0,29	1,1601	61	0,79	1,5233	86	1,29	2,0409	124
0,30	1,1662	61	0,80	1,5319	87	1,30	2,0533	125
0,31	1,1723	62	0,81	1,5406	88	1,31	2,0658	125
0,32	1,1785	62	0,82	1,5494	88	1,32	2,0783	127
0,33	1,1847	63	0,83	1,5582	89	1,33	2,0910	128
0,34	1,1910	63	0,84	1,5671	90	1,34	2,1038	128
0,35	1,1973	64	0,85	1,5761	90	1,35	2,1166	130
0,36	1,2037	64	0,86	1,5851	90	1,36	2,1296	130
0,37	1,2101	64	0,87	1,5941	92	1,37	2,1426	131
0,38	1,2165	65	0,88	1,6033	92	1,38	2,1557	133
0,39	1,2230	66	0,89	1,6125	93	1,39	2,1690	133
0,40	1,2296	65	0,90	1,6218	93	1,40	2,1823	134
0,41	1,2361	67	0,91	1,6311	94	1,41	2,1957	135
0,42	1,2428	66	0,92	1,6405	95	1,42	2,2092	137
0,43	1,2494	68	0,93	1,6500	96	1,43	2,2229	137
0,44	1,2562	67	0,94	1,6596	96	1,44	2,2366	138
0,45	1,2629	68	0,95	1,6692	97	1,45	2,2504	140
0,46	1,2697	69	0,96	1,6789	97	1,46	2,2644	140
0,47	1,2766	69	0,97	1,6886	98	1,47	2,2784	141
0,48	1,2835	69	0,98	1,6984	99	1,48	2,2925	143
0,49	1,2904	70	0,99	1,7083	100	1,49	2,3068	143
0,50	1,2974		1,00	1,7183		1,50	2,3211	

Digitized by Google

Suite de la table des valeurs de $F_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}$.

z	$F_1(z)$	Diff.	z	$F_1(z)$	Diff.	z	$F_1(z)$	Diff.
1,50	2,3211	145	1,80	2,8054	180	2,10	3,4125	227
1,51	2,3356	145	1,81	2,8234	183	2,11	3,4352	229
1,52	2,3501	147	1,82	2,8417	183	2,12	3,4581	231
1,53	2,3648	148	1,83	2,8600	184	2,13	3,4812	232
1,54	2,3796	149	1,84	2,8786	186	2,14	3,5044	234
1,55	2,3945	150	1,85	2,8972	188	2,15	3,5278	236
1,56	2,4095	151	1,86	2,9160	189	2,16	3,5514	238
1,57	2,4246	152	1,87	2,9349	191	2,17	3,5752	240
1,58	2,4398	154	1,88	2,9540	192	2,18	3,5992	242
1,59	2,4552	154	1,89	2,9732	194	2,19	3,6234	243
1,60	2,4706	156	1,90	2,9926	195	2,20	3,6477	246
1,61	2,4862	157	1,91	3,0121	196	2,21	3,6723	247
1,62	2,5019	158	1,92	3,0317	199	2,22	3,6970	249
1,63	2,5177	159	1,93	3,0516	199	2,23	3,7219	251
1,64	2,5336	161	1,94	3,0715	201	2,24	3,7470	253
1,65	2,5497	161	1,95	3,0916	203	2,25	3,7723	255
1,66	2,5658	163	1,96	3,1119	204	2,26	3,7978	257
1,67	2,5821	164	1,97	3,1323	206	2,27	3,8235	259
1,68	2,5985	166	1,98	3,1529	207	2,28	3,8494	261
1,69	2,6151	166	1,99	3,1736	209	2,29	3,8755	263
1,70	2,6317	168	2,00	3,1945	211	2,30	3,9018	265
1,71	2,6485	169	2,01	3,2156	212	2,31	3,9283	267
1,72	2,6654	170	2,02	3,2368	214	2,32	3,9550	269
1,73	2,6824	172	2,03	3,2582	215	2,33	3,9819	272
1,74	2,6996	173	2,04	3,2797	217	2,34	4,0091	273
1,75	2,7169	174	2,05	3,3014	219	2,35	4,0364	276
1,76	2,7343	176	2,06	3,3233	220	2,36	4,0640	277
1,77	2,7519	178	2,07	3,3453	222	2,37	4,0917	280
1,78	2,7696	178	2,08	3,3675	224	2,38	4,1197	282
1,79	2,7874	180	2,09	3,3899	226	2,39	4,1479	284
1,80	2,8054		2,10	3,4125		2,40	4,1763	

Digitized by Google

V. Table des valeurs de $F(z) = \frac{e^z - z - 1}{\frac{1}{2} z^2}$.

z	$F(z)$	Diff.	z	$F(z)$	Diff.	z	$F(z)$	Diff.
0,00	1,0000		0,50	1,1898		1,00	1,4366	
		33			43			56
0,01	1,0033		0,51	1,1941		1,01	1,4422	
		34			43			57
0,02	1,0067		0,52	1,1984		1,02	1,4479	
		34			44			57
0,03	1,0101		0,53	1,2028		1,03	1,4536	
		34			44			57
0,04	1,0135		0,54	1,2072		1,04	1,4593	
		34			44			58
0,05	1,0169		0,55	1,2116		1,05	1,4651	
		34			44			58
0,06	1,0203		0,56	1,2160		1,06	1,4709	
		34			45			59
0,07	1,0237		0,57	1,2205		1,07	1,4768	
		35			45			58
0,08	1,0272		0,58	1,2250		1,08	1,4826	
		35			45			59
0,09	1,0307		0,59	1,2295		1,09	1,4885	
		35			45			60
0,10	1,0342		0,60	1,2340		1,10	1,4945	
		35			45			60
0,11	1,0377		0,61	1,2385		1,11	1,5005	
		35			46			60
0,12	1,0412		0,62	1,2431		1,12	1,5065	
		36			46			60
0,13	1,0448		0,63	1,2477		1,13	1,5125	
		35			46			61
0,14	1,0483		0,64	1,2523		1,14	1,5186	
		36			47			61
0,15	1,0519		0,65	1,2570		1,15	1,5247	
		36			47			61
0,16	1,0555		0,66	1,2617		1,16	1,5308	
		37			47			62
0,17	1,0592		0,67	1,2664		1,17	1,5370	
		36			47			62
0,18	1,0628		0,68	1,2711		1,18	1,5432	
		37			47			62
0,19	1,0665		0,69	1,2758		1,19	1,5494	
		36			48			63
0,20	1,0701		0,70	1,2806		1,20	1,5557	
		37			48			63
0,21	1,0738		0,71	1,2854		1,21	1,5620	
		38			48			64
0,22	1,0776		0,72	1,2902		1,22	1,5684	
		37			49			64
0,23	1,0813		0,73	1,2951		1,23	1,5748	
		37			49			64
0,24	1,0850		0,74	1,3000		1,24	1,5812	
		38			49			64
0,25	1,0888		0,75	1,3049		1,25	1,5876	
		38			49			65
0,26	1,0926		0,76	1,3098		1,26	1,5941	
		38			50			66
0,27	1,0964		0,77	1,3148		1,27	1,6007	
		38			50			65
0,28	1,1002		0,78	1,3198		1,28	1,6072	
		39			50			66
0,29	1,1041		0,79	1,3248		1,29	1,6138	
		39			50			67
0,30	1,1080		0,80	1,3298		1,20	1,6205	
		39			51			66
0,31	1,1119		0,81	1,3349		1,31	1,6271	
		39			51			68
0,32	1,1158		0,82	1,3400		1,32	1,6339	
		39			51			67
0,33	1,1197		0,83	1,3451		1,33	1,6406	
		40			51			68
0,34	1,1237		0,84	1,3502		1,34	1,6474	
		39			52			68
0,35	1,1276		0,85	1,3554		1,35	1,6542	
		40			52			69
0,36	1,1316		0,86	1,3606		1,36	1,6611	
		40			53			69
0,37	1,1356		0,87	1,3659		1,37	1,6680	
		41			52			70
0,38	1,1397		0,88	1,3711		1,38	1,6750	
		40			53			69
0,39	1,1437		0,89	1,3764		1,39	1,6819	
		41			53			71
0,40	1,1478		0,90	1,3817		1,40	1,6890	
		41			54			70
0,41	1,1519		0,91	1,3871		1,41	1,6960	
		41			54			71
0,42	1,1560		0,92	1,3925		1,42	1,7031	
		41			54			72
0,43	1,1602		0,93	1,3979		1,43	1,7103	
		41			54			72
0,44	1,1643		0,94	1,4033		1,44	1,7175	
		42			55			72
0,45	1,1685		0,95	1,4088		1,45	1,7247	
		42			55			73
0,46	1,1727		0,96	1,4143		1,46	1,7320	
		43			55			73
0,47	1,1770		0,97	1,4198		1,47	1,7393	
		42			56			74
0,48	1,1812		0,98	1,4254		1,48	1,7467	
		43			55			74
0,49	1,1855		0,99	1,4309		1,49	1,7541	
		43			57			74
0,50	1,1898		1,00	1,4366		1,50	1,7615	

Digitized by Google

Suite de la table des valeurs de $F(z) = \frac{e^z - z - 1}{\frac{1}{2} z^2}$.

z	$F(z)$	Diff.	z	$F(z)$	Diff.	z	$F(z)$	Diff.
1,50	1,7615	75	1,80	2,0060	89	2,10	2,2976	106
1,51	1,7690	75	1,81	2,0149	89	2,11	2,3082	107
1,52	1,7765	76	1,82	2,0238	90	2,12	2,3189	108
1,53	1,7841	76	1,83	2,0328	91	2,13	2,3297	109
1,54	1,7917	76	1,84	2,0419	91	2,14	2,3406	109
1,55	1,7993	77	1,85	2,0510	92	2,15	2,3515	110
1,56	1,8070	78	1,86	2,0602	92	2,16	2,3625	110
1,57	1,8148	78	1,87	2,0694	93	2,17	2,3735	111
1,58	1,8226	78	1,88	2,0787	93	2,18	2,3846	112
1,59	1,8304	79	1,89	2,0880	94	2,19	2,3958	112
1,60	1,8383	79	1,90	2,0974	95	2,20	2,4070	113
1,61	1,8462	80	1,91	2,1069	95	2,21	2,4183	114
1,62	1,8542	80	1,92	2,1164	96	2,22	2,4297	115
1,63	1,8622	81	1,93	2,1260	96	2,23	2,4412	115
1,64	1,8703	81	1,94	2,1356	97	2,24	2,4527	116
1,65	1,8784	82	1,95	2,1453	97	2,25	2,4643	117
1,66	1,8866	82	1,96	2,1550	98	2,26	2,4760	117
1,67	1,8948	82	1,97	2,1648	98	2,27	2,4877	118
1,68	1,9030	83	1,98	2,1746	100	2,28	2,4995	119
1,69	1,9113	84	1,99	2,1846	99	2,29	2,5114	119
1,70	1,9197	84	2,00	2,1945	101	2,30	2,5233	120
1,71	1,9281	84	2,01	2,2046	100	2,31	2,5353	121
1,72	1,9365	85	2,02	2,2146	102	2,32	2,5474	122
1,73	1,9450	86	2,03	2,2248	102	2,33	2,5596	123
1,74	1,9536	86	2,04	2,2350	103	2,34	2,5719	123
1,75	1,9622	86	2,05	2,2453	103	2,35	2,5842	124
1,76	1,9708	87	2,06	2,2556	104	2,36	2,5966	124
1,77	1,9795	88	2,07	2,2660	105	2,37	2,6090	124
1,78	1,9883	88	2,08	2,2765	105	2,38	2,6216	126
1,79	1,9971	89	2,09	2,2870	106	2,39	2,6342	127
1,80	2,0060		2,10	2,2976		2,40	2,6469	

Digitized by Google

$P(z, V_0^2) = (1+V_0^2)\left(\frac{e^z - z - 1}{z^2/2}\right) - V_0^2$

	$z = 0{,}00$.		$z = 0{,}02$.		$z = 0{,}04$.		$z = 0{,}06$.		$z = 0{,}08$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,0000	67	1,0067	68	1,0135	68	1,0203	69	1,0272	70
0,1	1,0000	74	1,0074	74	1,0148	75	1,0223	76	1,0299	77
0,2	1,0000	80	1,0080	82	1,0162	82	1,0244	83	1,0327	83
0,3	1,0000	87	1,0087	88	1,0175	89	1,0264	90	1,0354	90
0,4	1,0000	94	1,0094	95	1,0189	95	1,0284	97	1,0381	98
0,5	1,0000	101	1,0101	101	1,0202	103	1,0305	103	1,0408	105
0,6	1,0000	107	1,0107	108	1,0215	110	1,0325	110	1,0435	112
0,7	1,0000	114	1,0114	115	1,0229	116	1,0345	118	1,0463	118
0,8	1,0000	121	1,0121	121	1,0242	123	1,0365	125	1,0490	125
0,9	1,0000	127	1,0127	129	1,0256	130	1,0386	131	1,0517	132
1,0	1,0000	134	1,0134	135	1,0269	137	1,0406	138	1,0544	140
1,1	1,0000	141	1,0141	142	1,0283	143	1,0426	145	1,0571	147
1,2	1,0000	147	1,0147	149	1,0296	151	1,0447	152	1,0599	153
1,3	1,0000	154	1,0154	156	1,0310	157	1,0467	159	1,0626	160
1,4	1,0000	161	1,0161	162	1,0323	164	1,0487	166	1,0653	167
1,5	1,0000	168	1,0168	169	1,0337	171	1,0508	172	1,0680	175
1,6	1,0000	174	1,0174	176	1,0350	178	1,0528	180	1,0708	181
1,7	1,0000	181	1,0181	183	1,0364	184	1,0548	187	1,0735	188
1,8	1,0000	188	1,0188	189	1,0377	191	1,0568	194	1,0762	195
1,9	1,0000	194	1,0194	197	1,0391	198	1,0589	200	1,0789	202
2,0	1,0000	201	1,0201	203	1,0404	205	1,0609	207	1,0816	210
2,1	1,0000	208	1,0208	209	1,0417	212	1,0629	215	1,0844	216
2,2	1,0000	214	1,0214	217	1,0431	219	1,0650	221	1,0871	223
2,3	1,0000	221	1,0221	223	1,0444	226	1,0670	228	1,0898	230
2,4	1,0000	228	1,0228	230	1,0458	232	1,0690	235	1,0925	237
2,5	1,0000	235	1,0235	236	1,0471	240	1,0711	241	1,0952	244
2,6	1,0000	241	1,0241	244	1,0485	246	1,0731	249	1,0980	251
2,7	1,0000	248	1,0248	250	1,0498	253	1,0751	256	1,1007	258
2,8	1,0000	255	1,0255	257	1,0512	260	1,0772	262	1,1034	265
2,9	1,0000	261	1,0261	264	1,0525	267	1,0792	269	1,1061	272
3,0	1,0000	268	1,0268	271	1,0539	273	1,0812	276	1,1088	279
3,1	1,0000	275	1,0275	277	1,0552	280	1,0832	284	1,1116	286
3,2	1,0000	281	1,0281	285	1,0566	287	1,0853	290	1,1143	293
3,3	1,0000	288	1,0288	291	1,0579	294	1,0873	297	1,1170	300
3,4	1,0000	295	1,0295	298	1,0593	300	1,0893	304	1,1197	307
3,5	1,0000	302	1,0302	304	1,0606	308	1,0914	310	1,1224	314
3,6	1,0000	308	1,0308	312	1,0620	314	1,0934	318	1,1252	320
3,7	1,0000	315	1,0315	318	1,0633	321	1,0954	325	1,1279	328
3,8	1,0000	322	1,0322	324	1,0646	329	1,0975	331	1,1306	335
3,9	1,0000	328	1,0328	332	1,0660	335	1,0995	338	1,1333	342
4,0	1,0000	335	1,0335	338	1,0673	342	1,1015	346	1,1361	348
4,1	1,0000	342	1,0342	345	1,0687	348	1,1035	353	1,1388	355
4,2	1,0000	348	1,0348	352	1,0700	356	1,1056	359	1,1415	363
	$\Delta_v = 0.$		$\Delta_v = 7.$		$\Delta_v = 13.$		$\Delta_v = 20.$		$\Delta_v = 27.$	

Digitized by Google

$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$; $z = \frac{\alpha x}{c}$, $V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{c^2}$.

	$z = 0{,}10$.		$z = 0{,}12$.		$z = 0{,}14$.		$z = 0{,}16$.		$z = 0{,}18$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,0342	70	1,0412	71	1,0483	72	1,0555	73	1,0628	73
0,1	1,0376	78	1,0454	78	1,0532	79	1,0611	80	1,0691	81
0,2	1,0410	85	1,0495	85	1,0580	86	1,0666	88	1,0754	88
0,3	1,0444	92	1,0536	93	1,0629	93	1,0722	94	1,0816	96
0,4	1,0479	98	1,0577	100	1,0677	101	1,0778	101	1,0879	103
0,5	1,0513	105	1,0618	107	1,0725	108	1,0833	109	1,0942	110
0,6	1,0547	113	1,0660	114	1,0774	115	1,0889	116	1,1005	117
0,7	1,0581	120	1,0701	121	1,0822	122	1,0944	124	1,1068	124
0,8	1,0615	127	1,0742	128	1,0870	130	1,1000	130	1,1130	132
0,9	1,0649	134	1,0783	136	1,0919	136	1,1055	138	1,1193	140
1,0	1,0684	141	1,0825	142	1,0967	144	1,1111	145	1,1256	147
1,1	1,0718	148	1,0866	149	1,1015	151	1,1166	153	1,1319	154
1,2	1,0752	155	1,0907	157	1,1064	158	1,1222	160	1,1382	161
1,3	1,0786	162	1,0948	164	1,1112	165	1,1277	167	1,1444	169
1,4	1,0820	170	1,0990	170	1,1160	173	1,1333	174	1,1507	176
1,5	1,0855	176	1,1031	178	1,1209	179	1,1388	182	1,1570	183
1,6	1,0889	183	1,1072	185	1,1257	187	1,1444	189	1,1633	191
1,7	1,0923	190	1,1113	192	1,1305	194	1,1499	197	1,1696	198
1,8	1,0957	197	1,1154	200	1,1354	201	1,1555	203	1,1758	206
1,9	1,0991	205	1,1196	206	1,1402	209	1,1611	210	1,1821	213
2,0	1,1026	211	1,1237	213	1,1450	216	1,1666	218	1,1884	220
2,1	1,1060	218	1,1278	221	1,1499	223	1,1722	225	1,1947	227
2,2	1,1094	225	1,1319	228	1,1547	230	1,1777	233	1,2010	234
2,3	1,1128	233	1,1361	234	1,1595	238	1,1833	239	1,2072	243
2,4	1,1162	240	1,1402	242	1,1644	244	1,1888	247	1,2135	250
2,5	1,1196	247	1,1443	249	1,1692	252	1,1944	254	1,2198	257
2,6	1,1231	253	1,1484	256	1,1740	259	1,1999	262	1,2261	264
2,7	1,1265	260	1,1525	264	1,1789	266	1,2055	269	1,2324	271
2,8	1,1299	268	1,1567	270	1,1837	273	1,2110	276	1,2386	279
2,9	1,1333	275	1,1608	278	1,1886	280	1,2166	283	1,2449	286
3,0	1,1367	282	1,1649	285	1,1934	287	1,2221	291	1,2512	294
3,1	1,1402	288	1,1690	292	1,1982	295	1,2277	298	1,2575	301
3,2	1,1436	296	1,1732	299	1,2031	302	1,2333	305	1,2638	308
3,3	1,1470	303	1,1773	306	1,2079	309	1,2388	312	1,2700	316
3,4	1,1504	310	1,1814	313	1,2127	317	1,2444	319	1,2763	323
3,5	1,1538	317	1,1855	321	1,2176	323	1,2499	327	1,2826	330
3,6	1,1572	325	1,1897	327	1,2224	331	1,2555	334	1,2889	337
3,7	1,1607	331	1,1938	334	1,2272	338	1,2610	342	1,2952	344
3,8	1,1641	338	1,1979	342	1,2321	345	1,2666	348	1,3014	353
3,9	1,1675	345	1,2020	349	1,2369	352	1,2721	356	1,3077	360
4,0	1,1709	352	1,2061	356	1,2417	360	1,2777	363	1,3140	367
4,1	1,1743	360	1,2103	363	1,2466	366	1,2832	371	1,3203	374
4,2	1,1778	366	1,2144	370	1,2514	374	1,2888	378	1,3266	381
	$\Delta_v = 34$.		$\Delta_v = 41$.		$\Delta_v = 48$.		$\Delta_v = 55$.		$\Delta_v = 63$.	

Digitized by Google

V_0^2	$z = 0{,}20$. $\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z	$z = 0{,}22$. $\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z	$z = 0{,}24$. $\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z	$z = 0{,}26$. $\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z	$z = 0{,}28$. $\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,0701	75	1,0776	74	1,0850	76	1,0926	77	1,1003	77
0,1	1,0772	81	1,0853	82	1,0935	84	1,1019	84	1,1103	85
0,2	1,0842	89	1,0931	89	1,1020	92	1,1112	91	1,1203	93
0,3	1,0912	96	1,1008	98	1,1106	98	1,1204	99	1,1303	101
0,4	1,0982	104	1,1086	105	1,1191	105	1,1296	108	1,1404	108
0,5	1,1052	111	1,1163	113	1,1276	113	1,1389	115	1,1504	116
0,6	1,1122	119	1,1241	120	1,1361	121	1,1482	122	1,1604	124
0,7	1,1192	126	1,1318	128	1,1446	128	1,1574	130	1,1704	132
0,8	1,1262	134	1,1396	135	1,1531	136	1,1667	138	1,1805	139
0,9	1,1333	141	1,1474	142	1,1616	144	1,1760	145	1,1905	146
1,0	1,1403	148	1,1551	150	1,1701	151	1,1852	153	1,2005	154
1,1	1,1473	155	1,1628	158	1,1786	159	1,1945	160	1,2105	162
1,2	1,1543	163	1,1706	165	1,1871	166	1,2037	169	1,2206	169
1,3	1,1613	171	1,1784	172	1,1956	174	1,2130	176	1,2306	177
1,4	1,1683	178	1,1861	180	1,2041	182	1,2223	183	1,2406	185
1,5	1,1753	186	1,1939	187	1,2126	189	1,2315	191	1,2506	193
1,6	1,1824	192	1,2016	195	1,2211	197	1,2408	199	1,2607	200
1,7	1,1894	200	1,2094	202	1,2296	204	1,2500	207	1,2707	208
1,8	1,1964	207	1,2171	210	1,2381	212	1,2593	214	1,2807	216
1,9	1,2034	215	1,2249	217	1,2466	220	1,2686	221	1,2907	224
2,0	1,2104	222	1,2326	225	1,2551	227	1,2778	230	1,3008	231
2,1	1,2174	230	1,2404	232	1,2636	235	1,2871	237	1,3108	239
2,2	1,2244	238	1,2482	239	1,2721	242	1,2963	245	1,3208	247
2,3	1,2315	244	1,2559	247	1,2806	250	1,3056	252	1,3308	255
2,4	1,2385	252	1,2637	254	1,2891	258	1,3149	260	1,3409	262
2,5	1,2455	259	1,2714	262	1,2976	265	1,3241	268	1,3509	270
2,6	1,2525	267	1,2792	269	1,3061	273	1,3334	275	1,3609	278
2,7	1,2595	274	1,2869	277	1,3146	280	1,3426	283	1,3709	286
2,8	1,2665	282	1,2947	284	1,3231	288	1,3519	291	1,3810	293
2,9	1,2735	289	1,3024	292	1,3316	296	1,3612	298	1,3910	301
3,0	1,2806	296	1,3102	299	1,3401	303	1,3704	306	1,4010	309
3,1	1,2876	304	1,3180	307	1,3487	310	1,3797	313	1,4110	317
3,2	1,2946	311	1,3257	315	1,3572	317	1,3889	322	1,4211	324
3,3	1,3016	319	1,3335	322	1,3657	325	1,3982	329	1,4311	332
3,4	1,3086	326	1,3412	330	1,3742	333	1,4075	336	1,4411	340
3,5	1,3156	334	1,3490	337	1,3827	340	1,4167	344	1,4511	348
3,6	1,3226	341	1,3567	345	1,3912	348	1,4260	352	1,4612	355
3,7	1,3296	349	1,3645	352	1,3997	355	1,4352	360	1,4712	363
3,8	1,3367	355	1,3722	360	1,4082	363	1,4445	367	1,4812	371
3,9	1,3437	363	1,3800	367	1,4167	371	1,4538	374	1,4912	379
4,0	1,3507	371	1,3878	374	1,4252	378	1,4630	383	1,5013	386
4,1	1,3577	378	1,3955	382	1,4337	386	1,4723	390	1,5113	394
4,2	1,3647	386	1,4033	389	1,4422	394	1,4816	397	1,5213	402
	$\Delta_v = 70$.		$\Delta_v = 78$.		$\Delta_v = 85$.		$\Delta_v = 93$.		$\Delta_v = 100$.	

Digitized by Google

$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$; $z = \frac{ax}{c}$, $V_0^2 = \frac{a^2 V_1^2}{r^2}$.

	$z = 0{,}30$.		$z = 0{,}32$.		$z = 0{,}34$.		$z = 0{,}36$.		$z = 0{,}38$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,1080	78	1,1158	79	1,1237	79	1,1316	81	1,1397	81
0,1	1,1188	86	1,1274	86	1,1360	88	1,1448	88	1,1536	90
0,2	1,1296	93	1,1389	95	1,1484	96	1,1580	96	1,1676	98
0,3	1,1404	101	1,1505	103	1,1608	103	1,1711	105	1,1816	106
0,4	1,1512	109	1,1621	110	1,1731	112	1,1843	112	1,1955	114
0,5	1,1620	117	1,1737	118	1,1855	119	1,1974	121	1,2095	122
0,6	1,1728	124	1,1852	127	1,1979	127	1,2106	129	1,2235	130
0,7	1,1836	132	1,1968	134	1,2102	136	1,2238	136	1,2374	139
0,8	1,1944	140	1,2084	142	1,2226	143	1,2369	145	1,2514	147
0,9	1,2051	149	1,2200	150	1,2350	151	1,2501	153	1,2654	154
1,0	1,2159	157	1,2316	157	1,2473	160	1,2633	161	1,2794	162
1,1	1,2267	164	1,2431	166	1,2597	167	1,2764	169	1,2933	171
1,2	1,2375	172	1,2547	174	1,2721	175	1,2896	177	1,3073	179
1,3	1,2483	180	1,2663	181	1,2844	183	1,3027	186	1,3213	187
1,4	1,2591	188	1,2779	189	1,2968	191	1,3159	193	1,3352	195
1,5	1,2699	195	1,2894	198	1,3092	199	1,3291	201	1,3492	203
1,6	1,2807	203	1,3010	205	1,3215	207	1,3422	209	1,3631	212
1,7	1,2915	211	1,3126	213	1,3339	215	1,3554	217	1,3771	220
1,8	1,3023	219	1,3242	221	1,3463	223	1,3686	225	1,3911	228
1,9	1,3131	227	1,3358	228	1,3586	231	1,3817	234	1,4051	235
2,0	1,3239	234	1,3473	237	1,3710	239	1,3949	241	1,4190	244
2,1	1,3347	242	1,3589	244	1,3833	247	1,4080	250	1,4330	252
2,2	1,3455	250	1,3705	252	1,3957	255	1,4212	258	1,4470	260
2,3	1,3563	258	1,3821	260	1,4081	263	1,4344	265	1,4609	269
2,4	1,3671	265	1,3936	268	1,4204	270	1,4474	275	1,4749	277
2,5	1,3779	273	1,4052	276	1,4328	278	1,4606	283	1,4889	284
2,6	1,3887	281	1,4168	284	1,4452	286	1,4738	290	1,5028	293
2,7	1,3995	289	1,4284	291	1,4575	294	1,4869	299	1,5168	301
2,8	1,4103	296	1,4399	300	1,4699	302	1,5001	307	1,5308	309
2,9	1,4211	304	1,4515	308	1,4823	309	1,5132	315	1,5447	318
3,0	1,4319	312	1,4631	315	1,4946	318	1,5264	323	1,5587	325
3,1	1,4427	320	1,4747	323	1,5070	326	1,5396	331	1,5727	333
3,2	1,4535	328	1,4863	331	1,5194	333	1,5527	339	1,5866	342
3,3	1,4643	335	1,4978	339	1,5317	342	1,5659	347	1,6006	350
3,4	1,4751	343	1,5094	347	1,5441	350	1,5791	355	1,6146	358
3,5	1,4859	351	1,5210	355	1,5565	357	1,5922	363	1,6285	366
3,6	1,4967	359	1,5326	362	1,5688	366	1,6054	371	1,6425	374
3,7	1,5075	366	1,5441	371	1,5812	373	1,6185	380	1,6565	382
3,8	1,5183	374	1,5557	379	1,5936	381	1,6317	387	1,6704	391
3,9	1,5291	382	1,5673	386	1,6059	390	1,6449	395	1,6844	399
4,0	1,5399	390	1,5789	394	1,6183	397	1,6580	404	1,6984	406
4,1	1,5507	398	1,5905	402	1,6307	406	1,6713	410	1,7123	415
4,2	1,5615	405	1,6020	410	1,6430	415	1,6845	418	1,7263	423
	$\Delta_v = 106$.		$\Delta_v = 116$.		$\Delta_v = 124$.		$\Delta_v = 132$.		$\Delta_v = 140$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}40$.		$z = 0{,}42$.		$z = 0{,}44$.		$z = 0{,}46$.		$z = 0{,}48$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,1478	82	1,1560	83	1,1643	84	1,1727	85	1,1812	86
0,1	1,1626	90	1,1716	92	1,1808	92	1,1900	93	1,1993	94
0,2	1,1774	98	1,1872	100	1,1972	101	1,2073	101	1,2174	103
0,3	1,1922	106	1,2028	108	1,2136	109	1,2245	111	1,2356	111
0,4	1,2069	115	1,2184	117	1,2301	117	1,2418	119	1,2537	120
0,5	1,2217	123	1,2340	125	1,2465	126	1,2591	127	1,2718	129
0,6	1,2365	131	1,2496	133	1,2629	135	1,2764	135	1,2899	137
0,7	1,2513	139	1,2652	142	1,2794	142	1,2936	144	1,3080	146
0,8	1,2661	147	1,2808	150	1,2958	151	1,3109	153	1,3262	154
0,9	1,2808	156	1,2964	158	1,3122	160	1,3282	161	1,3443	163
1,0	1,2956	165	1,3121	166	1,3287	167	1,3454	170	1,3624	171
1,1	1,3104	173	1,3277	174	1,3451	176	1,3627	178	1,3805	180
1,2	1,3252	181	1,3433	182	1,3615	185	1,3800	186	1,3986	189
1,3	1,3400	189	1,3589	191	1,3780	193	1,3973	195	1,4168	197
1,4	1,3547	198	1,3745	199	1,3944	201	1,4145	204	1,4349	205
1,5	1,3695	206	1,3901	207	1,4108	210	1,4318	212	1,4530	214
1,6	1,3843	214	1,4057	216	1,4273	218	1,4491	220	1,4711	223
1,7	1,3991	222	1,4213	224	1,4437	226	1,4663	229	1,4892	232
1,8	1,4139	230	1,4369	232	1,4601	235	1,4836	238	1,5074	240
1,9	1,4286	239	1,4525	241	1,4766	243	1,5009	246	1,5255	258
2,0	1,4434	247	1,4681	249	1,4930	252	1,5182	254	1,5436	257
2,1	1,4582	255	1,4837	257	1,5094	260	1,5354	263	1,5617	266
2,2	1,4730	263	1,4993	266	1,5259	268	1,5527	271	1,5798	275
2,3	1,4878	271	1,5149	274	1,5423	277	1,5700	280	1,5980	282
2,4	1,5026	279	1,5305	282	1,5587	286	1,5873	288	1,6161	291
2,5	1,5173	288	1,5461	291	1,5752	293	1,6045	297	1,6342	300
2,6	1,5321	296	1,5617	299	1,5916	302	1,6218	305	1,6523	309
2,7	1,5469	304	1,5773	307	1,6080	311	1,6391	313	1,6704	317
2,8	1,5617	312	1,5929	316	1,6245	318	1,6563	323	1,6886	325
2,9	1,5765	320	1,6085	324	1,6409	327	1,6736	331	1,7067	334
3,0	1,5912	329	1,6241	332	1,6573	336	1,6909	339	1,7248	343
3,1	1,6060	337	1,6397	341	1,6738	344	1,7082	347	1,7429	352
3,2	1,6208	345	1,6553	349	1,6902	352	1,7254	356	1,7610	360
3,3	1,6356	353	1,6709	357	1,7066	361	1,7427	365	1,7792	368
3,4	1,6504	361	1,6865	366	1,7231	369	1,7600	373	1,7973	377
3,5	1,6651	370	1,7021	374	1,7395	377	1,7772	382	1,8154	386
3,6	1,6799	378	1,7177	382	1,7559	386	1,7945	390	1,8335	394
3,7	1,6947	386	1,7333	391	1,7724	394	1,8118	398	1,8516	403
3,8	1,7095	394	1,7489	399	1,7888	403	1,8291	407	1,8698	411
3,9	1,7243	402	1,7645	407	1,8052	411	1,8463	416	1,8879	420
4,0	1,7390	411	1,7801	416	1,8217	419	1,8636	424	1,9060	429
4,1	1,7538	419	1,7957	424	1,8381	428	1,8809	432	1,9241	437
4,2	1,7686	427	1,8113	432	1,8545	437	1,8982	440	1,9422	446
	$\Delta_v = 148$.		$\Delta_v = 156$.		$\Delta_v = 164$.		$\Delta_v = 173$.		$\Delta_v = 181$.	

Digitized by Google

$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$; $z = \frac{\alpha x}{c}$, $V_0^2 = \frac{d^2 V_1^2}{r^2}$.

	$z = 0{,}50$.		$z = 0{,}52$.		$z = 0{,}54$.		$z = 0{,}56$.		$z = 0{,}58$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,1898	86	1,1984	88	1,2072	88	1,2160	90	1,2250	90
0,1	1,2087	96	1,2183	96	1,2279	97	1,2376	99	1,2475	99
0,2	1,2277	104	1,2381	105	1,2486	106	1,2592	108	1,2700	108
0,3	1,2467	113	1,2580	113	1,2693	115	1,2808	116	1,2924	118
0,4	1,2657	121	1,2778	123	1,2901	123	1,3024	125	1,3149	127
0,5	1,2847	129	1,2976	132	1,3108	132	1,3240	134	1,3374	136
0,6	1,3036	139	1,3175	140	1,3315	141	1,3456	143	1,3599	145
0,7	1,3226	147	1,3373	149	1,3522	150	1,3672	152	1,3824	154
0,8	1,3416	156	1,3572	157	1,3729	159	1,3888	161	1,4049	163
0,9	1,3606	164	1,3770	166	1,3936	168	1,4104	170	1,4274	172
1,0	1,3795	174	1,3969	175	1,4144	176	1,4320	179	1,4499	181
1,1	1,3985	182	1,4167	184	1,4351	185	1,4536	188	1,4724	190
1,2	1,4175	190	1,4365	193	1,4558	195	1,4753	196	1,4949	199
1,3	1,4365	199	1,4564	201	1,4765	204	1,4969	205	1,5174	208
1,4	1,4554	208	1,4762	210	1,4972	213	1,5185	214	1,5399	217
1,5	1,4744	217	1,4961	219	1,5180	221	1,5401	223	1,5624	226
1,6	1,4934	225	1,5159	228	1,5387	230	1,5617	232	1,5849	235
1,7	1,5124	234	1,5358	236	1,5594	239	1,5833	241	1,6074	244
1,8	1,5314	242	1,5556	245	1,5801	248	1,6049	250	1,6299	253
1,9	1,5503	251	1,5754	254	1,6008	257	1,6265	259	1,6524	262
2,0	1,5693	260	1,5953	262	1,6215	266	1,6481	268	1,6749	271
2,1	1,5883	268	1,6151	272	1,6423	274	1,6697	277	1,6974	280
2,2	1,6073	277	1,6350	280	1,6630	283	1,6913	286	1,7199	289
2,3	1,6262	286	1,6548	289	1,6837	292	1,7129	295	1,7424	298
2,4	1,6452	295	1,6747	297	1,7044	301	1,7345	304	1,7649	307
2,5	1,6642	303	1,6945	306	1,7251	310	1,7561	313	1,7874	316
2,6	1,6832	311	1,7143	315	1,7458	319	1,7777	322	1,8099	325
2,7	1,7021	321	1,7342	324	1,7666	327	1,7993	331	1,8324	334
2,8	1,7211	329	1,7540	333	1,7873	336	1,8209	340	1,8549	343
2,9	1,7401	338	1,7739	341	1,8080	345	1,8425	348	1,8773	353
3,0	1,7591	346	1,7937	350	1,8287	354	1,8641	357	1,8998	362
3,1	1,7781	355	1,8136	358	1,8494	363	1,8857	366	1,9223	371
3,2	1,7970	364	1,8334	368	1,8702	371	1,9073	375	1,9448	380
3,3	1,8160	372	1,8532	377	1,8909	380	1,9289	384	1,9673	389
3,4	1,8350	381	1,8731	385	1,9116	389	1,9505	393	1,9898	398
3,5	1,8540	389	1,8929	394	1,9323	398	1,9721	402	2,0123	407
3,6	1,8729	399	1,9128	402	1,9530	407	1,9937	411	2,0348	416
3,7	1,8919	407	1,9326	411	1,9737	416	2,0153	420	2,0573	425
3,8	1,9109	416	1,9525	420	1,9945	424	2,0369	429	2,0798	434
3,9	1,9299	424	1,9728	429	2,0152	433	2,0585	438	2,1023	443
4,0	1,9489	432	1,9921	438	2,0359	442	2,0801	447	2,1248	452
4,1	1,9678	442	2,0120	446	2,0566	451	2,1017	456	2,1473	461
4,2	1,9868	450	2,0318	455	2,0773	460	2,1233	465	2,1698	470
	$\Delta_v = 190$.		$\Delta_v = 198$.		$\Delta_v = 207$.		$\Delta_v = 216$.		$\Delta_v = 225$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}60$.		$z = 0{,}62$.		$z = 0{,}64$.		$z = 0{,}66$.		$z = 0{,}68$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,2340	91	1,2431	92	1,2523	94	1,2617	94	1,2711	95
0,1	1,2574	100	1,2674	102	1,2776	102	1,2878	104	1,2982	105
0,2	1,2808	109	1,2917	111	1,3028	112	1,3140	113	1,3253	114
0,3	1,3042	119	1,3161	120	1,3281	121	1,3402	122	1,3524	124
0,4	1,3276	128	1,3404	129	1,3533	130	1,3663	132	1,3795	134
0,5	1,3510	137	1,3647	138	1,3785	140	1,3925	141	1,4066	143
0,6	1,3744	146	1,3890	148	1,4038	149	1,4187	151	1,4338	152
0,7	1,3978	155	1,4133	157	1,4290	158	1,4448	161	1,4609	162
0,8	1,4212	164	1,4376	166	1,4542	168	1,4710	170	1,4880	171
0,9	1,4446	173	1,4619	176	1,4795	177	1,4972	179	1,5151	181
1,0	1,4680	182	1,4862	185	1,5047	186	1,5233	189	1,5422	190
1,1	1,4914	192	1,5106	193	1,5299	196	1,5495	198	1,5693	200
1,2	1,5148	201	1,5349	203	1,5552	205	1,5757	207	1,5964	210
1,3	1,5382	210	1,5592	212	1,5804	214	1,6018	217	1,6235	219
1,4	1,5616	219	1,5835	221	1,6056	224	1,6280	226	1,6506	229
1,5	1,5850	228	1,6078	231	1,6309	233	1,6542	235	1,6777	239
1,6	1,6084	237	1,6321	240	1,6561	242	1,6803	246	1,7049	247
1,7	1,6318	246	1,6564	249	1,6813	252	1,7065	255	1,7320	257
1,8	1,6552	255	1,6807	259	1,7066	261	1,7327	264	1,7591	266
1,9	1,6786	265	1,7051	269	1,7318	270	1,7588	274	1,7862	276
2,0	1,7020	274	1,7294	276	1,7570	280	1,7850	288	1,8133	286
2,1	1,7254	283	1,7537	286	1,7823	289	1,8112	292	1,8404	295
2,2	1,7488	292	1,7780	295	1,8075	299	1,8374	301	1,8675	305
2,3	1,7722	301	1,8023	304	1,8327	308	1,8635	311	1,8946	315
2,4	1,7956	310	1,8266	314	1,8580	317	1,8897	320	1,9217	324
2,5	1,8190	319	1,8509	323	1,8832	327	1,9159	329	1,9488	334
2,6	1,8424	328	1,8752	333	1,9085	335	1,9420	339	1,9759	343
2,7	1,8658	338	1,8996	341	1,9337	345	1,9682	349	2,0031	352
2,8	1,8892	347	1,9239	350	1,9589	355	1,9944	358	2,0302	362
2,9	1,9126	356	1,9482	360	1,9842	363	2,0205	368	2,0573	371
3,0	1,9360	365	1,9725	369	2,0094	373	2,0467	377	2,0844	381
3,1	1,9594	374	1,9968	378	2,0346	383	2,0729	386	2,1115	391
3,2	1,9828	383	2,0211	388	2,0599	391	2,0990	396	2,1386	400
3,3	2,0062	392	2,0454	397	2,0851	401	2,1252	405	2,1657	410
3,4	2,0296	401	2,0697	406	2,1103	411	2,1514	414	2,1928	419
3,5	2,0530	410	2,0940	416	2,1356	419	2,1775	424	2,2199	429
3,6	2,0764	420	2,1184	424	2,1608	429	2,2037	433	2,2470	439
3,7	2,0998	429	2,1427	433	2,1860	439	2,2299	443	2,2742	447
3,8	2,1232	438	2,1670	443	2,2113	447	2,2560	453	2,3013	457
3,9	2,1466	447	2,1913	452	2,2365	457	2,2822	462	2,3284	467
4,0	2,1700	456	2,2156	461	2,2617	467	2,3084	471	2,3555	476
4,1	2,1934	465	2,2399	471	2,2870	475	2,3345	481	2,3826	486
4,2	2,2168	474	2,2642	480	2,3122	485	2,3607	490	2,4097	495
	$\Delta_v = 234$.		$\Delta_v = 243$.		$\Delta_v = 252$.		$\Delta_v = 262$.		$\Delta_v = 271$.	

Digitized by Google

$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$; $z = \frac{\alpha x}{c}$, $V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}$.

	$z = 0{,}70$.		$z = 0{,}72$.		$z = 0{,}74$.		$z = 0{,}76$.		$z = 0{,}78$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,2806	97	1,2903	97	1,3000	98	1,3098	100	1,3198	100
0,1	1,3087	106	1,3193	107	1,3300	108	1,3408	109	1,3517	111
0,2	1,3367	116	1,3483	117	1,3600	118	1,3718	119	1,3837	121
0,3	1,3648	125	1,3773	127	1,3900	128	1,4028	129	1,4157	131
0,4	1,3929	135	1,4064	136	1,4200	137	1,4337	140	1,4477	140
0,5	1,4209	145	1,4354	146	1,4500	147	1,4647	149	1,4796	151
0,6	1,4490	154	1,4644	156	1,4800	157	1,4957	159	1,5116	161
0,7	1,4771	163	1,4934	166	1,5100	167	1,5267	169	1,5436	171
0,8	1,5051	174	1,5225	175	1,5400	177	1,5577	179	1,5756	181
0,9	1,5332	183	1,5515	185	1,5700	187	1,5887	189	1,6076	190
1,0	1,5612	193	1,5805	195	1,6000	196	1,6196	199	1,6395	201
1,1	1,5898	202	1,6095	205	1,6300	206	1,6506	209	1,6715	211
1,2	1,6174	212	1,6386	214	1,6600	216	1,6816	219	1,7035	221
1,3	1,6454	222	1,6676	224	1,6900	226	1,7126	229	1,7355	231
1,4	1,6735	231	1,6966	234	1,7200	236	1,7436	238	1,7674	242
1,5	1,7016	240	1,7256	244	1,7500	246	1,7746	248	1,7994	251
1,6	1,7296	251	1,7547	253	1,7800	255	1,8055	259	1,8314	261
1,7	1,7577	260	1,7837	263	1,8100	265	1,8365	269	1,8634	271
1,8	1,7857	270	1,8127	273	1,8400	275	1,8675	278	1,8953	282
1,9	1,8138	279	1,8417	283	1,8700	285	1,8985	288	1,9273	292
2,0	1,8419	289	1,8708	291	1,8999	296	1,9295	298	1,9593	301
2,1	1,8699	299	1,8998	301	1,9299	305	1,9604	309	1,9913	311
2,2	1,8980	308	1,9288	311	1,9599	315	1,9914	318	2,0232	322
2,3	1,9261	317	1,9578	321	1,9899	325	2,0224	328	2,0552	332
2,4	1,9541	328	1,9869	330	2,0199	335	2,0534	338	2,0872	342
2,5	1,9822	337	2,0159	340	2,0499	345	2,0844	348	2,1192	352
2,6	2,0102	347	2,0449	350	2,0799	355	2,1154	358	2,1512	361
2,7	2,0383	356	2,0739	360	2,1099	364	2,1463	368	2,1831	372
2,8	2,0664	366	2,1030	369	2,1399	374	2,1773	378	2,2151	382
2,9	2,0944	376	2,1320	379	2,1699	384	2,2083	388	2,2471	392
3,0	2,1225	385	2,1610	389	2,1999	394	2,2393	398	2,2791	402
3,1	2,1506	394	2,1900	399	2,2299	404	2,2703	407	2,3110	412
3,2	2,1786	405	2,2191	408	2,2599	413	2,3012	418	2,3430	422
3,3	2,2067	414	2,2481	418	2,2899	423	2,3322	428	2,3750	432
3,4	2,2347	424	2,2771	428	2,3199	433	2,3632	438	2,4070	442
3,5	2,2628	433	2,3061	438	2,3499	443	2,3942	447	2,4389	453
3,6	2,2909	443	2,3352	447	2,3799	453	2,4252	457	2,4709	462
3,7	2,3189	453	2,3642	457	2,4099	463	2,4562	467	2,5029	472
3,8	2,3470	462	2,3932	467	2,4399	472	2,4871	478	2,5349	482
3,9	2,3751	471	2,4222	477	2,4699	482	2,5181	487	2,5668	493
4,0	2,4031	482	2,4513	486	2,4999	492	2,5491	497	2,5988	503
4,1	2,4312	491	2,4803	496	2,5299	502	2,5801	507	2,6308	513
4,2	2,4592	501	2,5093	506	2,5599	512	2,6111	517	2,6628	522
	$\Delta_v = 281$.		$\Delta_v = 290$.		$\Delta_v = 300$.		$\Delta_v = 310$.		$\Delta_v = 320$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}80$.		$z = 0{,}82$.		$z = 0{,}84$.		$z = 0{,}86$.		$z = 0{,}88$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,3298	102	1,3400	102	1,3502	104	1,3606	105	1,3711	106
0,1	1,3628	112	1,3740	113	1,3853	114	1,3967	115	1,4082	117
0,2	1,3958	122	1,4080	123	1,4203	125	1,4328	126	1,4454	127
0,3	1,4288	132	1,4420	133	1,4553	135	1,4688	137	1,4825	138
0,4	1,4617	143	1,4760	143	1,4903	146	1,5049	147	1,5196	148
0,5	1,4947	153	1,5100	154	1,5254	157	1,5409	158	1,5567	159
0,6	1,5277	163	1,5440	164	1,5604	166	1,5770	168	1,5938	170
0,7	1,5607	173	1,5780	174	1,5954	177	1,6131	178	1,6309	181
0,8	1,5937	183	1,6120	184	1,6304	187	1,6491	189	1,6680	191
0,9	1,6266	194	1,6460	195	1,6655	197	1,6852	199	1,7051	202
1,0	1,6596	204	1,6800	205	1,7005	208	1,7213	210	1,7423	212
1,1	1,6926	213	1,7139	216	1,7355	218	1,7573	221	1,7794	222
1,2	1,7256	223	1,7479	226	1,7705	229	1,7934	231	1,8165	233
1,3	1,7586	233	1,7819	237	1,8056	238	1,8294	242	1,8536	244
1,4	1,7916	243	1,8159	247	1,8406	249	1,8655	252	1,8907	255
1,5	1,8245	254	1,8499	257	1,8756	260	1,9016	262	1,9278	265
1,6	1,8575	264	1,8839	267	1,9106	270	1,9376	273	1,9649	276
1,7	1,8905	274	1,9179	278	1,9457	280	1,9737	283	2,0020	287
1,8	1,9235	284	1,9519	288	1,9807	291	2,0098	294	2,0392	297
1,9	1,9565	294	1,9859	298	2,0157	301	2,0458	305	2,0763	307
2,0	1,9894	305	2,0199	308	2,0507	312	2,0819	315	2,1134	318
2,1	2,0224	315	2,0539	319	2,0858	321	2,1179	326	2,1505	329
2,2	2,0554	325	2,0879	329	2,1208	332	2,1540	336	2,1876	340
2,3	2,0884	335	2,1219	339	2,1558	343	2,1901	346	2,2247	350
2,4	2,1214	345	2,1559	349	2,1908	353	2,2261	357	2,2618	361
2,5	2,1544	355	2,1899	360	2,2259	363	2,2622	367	2,2989	372
2,6	2,1873	366	2,2239	370	2,2609	374	2,2983	378	2,3361	381
2,7	2,2203	376	2,2579	380	2,2959	384	2,3343	389	2,3732	392
2,8	2,2533	386	2,2919	390	2,3309	395	2,3704	399	2,4103	403
2,9	2,2863	396	2,3259	401	2,3660	405	2,4065	409	2,4474	414
3,0	2,3193	406	2,3599	411	2,4010	415	2,4425	420	2,4845	424
3,1	2,3522	417	2,3930	421	2,4360	426	2,4786	430	2,5216	435
3,2	2,3852	427	2,4279	431	2,4710	436	2,5146	441	2,5587	446
3,3	2,4182	437	2,4619	442	2,5061	446	2,5507	451	2,5958	457
3,4	2,4512	447	2,4959	452	2,5411	457	2,5868	462	2,6330	466
3,5	2,4842	457	2,5299	462	2,5761	467	2,6228	473	2,6701	477
3,6	2,5171	468	2,5639	472	2,6111	478	2,6589	483	2,7072	488
3,7	2,5501	478	2,5979	483	2,6462	488	2,6950	493	2,7443	499
3,8	2,5831	488	2,6319	493	2,6812	498	2,7310	504	2,7814	509
3,9	2,6161	498	2,6659	503	2,7162	509	2,7671	514	2,8185	520
4,0	2,6491	508	2,6999	513	2,7512	519	2,8031	525	2,8556	531
4,1	2,6821	518	2,7339	524	2,7863	529	2,8392	535	2,8927	542
4,2	2,7150	529	2,7679	534	2,8213	540	2,8753	546	2,9299	551
	$\Delta_v = 330$.		$\Delta_v = 340$.		$\Delta_v = 350$.		$\Delta_v = 361$.		$\Delta_v = 371$.	

Digitized by Google

$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$; $z = \frac{ax}{c}$, $V_0^2 = \frac{a^2 V_1^2}{r^2}$.

	$z = 0{,}90$.		$z = 0{,}92$.		$z = 0{,}94$.		$z = 0{,}96$.		$z = 0{,}98$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,6817	108	1,3925	108	1,4033	110	1,4143	111	1,4254	112
0,1	1,4199	118	1,4317	119	1,4436	121	1,4557	122	1,4679	123
0,2	1,4581	129	1,4710	130	1,4840	131	1,4971	133	1,5104	135
0,3	1,4963	139	1,5102	141	1,5243	143	1,5386	144	1,5530	145
0,4	1,5344	150	1,5494	152	1,5646	154	1,5800	155	1,5955	157
0,5	1,5726	161	1,5887	163	1,6050	164	1,6214	166	1,6380	168
0,6	1,6108	171	1,6279	174	1,6453	175	1,6628	178	1,6806	179
0,7	1,6490	182	1,6672	184	1,6856	187	1,7043	188	1,7231	191
0,8	1,6871	193	1,7064	196	1,7260	197	1,7457	199	1,7656	202
0,9	1,7253	204	1,7457	206	1,7663	208	1,7871	201	1,8082	213
1,0	1,7635	214	1,7849	217	1,8066	219	1,8285	222	1,8507	224
1,1	1,8016	226	1,8242	227	1,8469	230	1,8699	233	1,8932	236
1,2	1,8398	236	1,8634	239	1,8873	241	1,9114	244	1,9358	246
1,3	1,8780	247	1,9027	249	1,9276	252	1,9528	255	1,9783	258
1,4	1,9162	257	1,9419	260	1,9679	264	1,9943	266	2,0209	269
1,5	1,9543	269	1,9812	271	2,0083	274	2,0357	277	2,0634	280
1,6	1,9925	279	2,0204	282	2,0486	285	2,0771	288	2,1059	292
1,7	2,0307	290	2,0597	292	2,0889	296	2,1185	300	2,1485	302
1,8	2,0689	300	2,0989	304	2,1293	307	2,1600	310	2,1910	314
1,9	2,1070	311	2,1381	315	2,1696	318	2,2014	321	2,2335	325
2,0	2,1452	322	2,1774	325	2,2099	329	2,2428	333	2,2761	336
2,1	2,1834	332	2,2166	337	2,2503	339	2,2842	344	2,3186	345
2,2	2,2216	343	2,2559	347	2,2906	351	2,3257	354	2,3611	359
2,3	2,2597	354	2,2951	358	2,3309	362	2,3671	366	2,4037	370
2,4	2,2979	365	2,3344	368	2,3712	378	2,4085	377	2,4462	381
2,5	2,3361	375	2,3736	380	2,4116	383	2,4499	388	2,4887	393
2,6	2,3742	387	2,4129	390	2,4519	395	2,4914	399	2,5313	403
2,7	2,4124	397	2,4521	401	2,4922	406	2,5328	410	2,5738	415
2,8	2,4506	408	2,4914	412	2,5326	416	2,5742	422	2,6164	425
2,9	2,4888	418	2,5306	423	2,5729	428	2,6157	432	2,6589	437
3,0	2,5269	430	2,5699	433	2,6132	439	2,6571	443	2,7014	449
3,1	2,5651	440	2,6091	445	2,6536	449	2,6985	455	2,7440	459
3,2	2,6033	450	2,6483	456	2,6939	460	2,7399	466	2,7865	471
3,3	2,6415	461	2,6876	466	2,7342	472	2,7814	476	2,8290	482
3,4	2,6796	472	2,7268	478	2,7746	482	2,8228	488	2,8716	493
3,5	2,7178	483	2,7661	488	2,8149	493	2,8642	499	2,9141	504
3,6	2,7560	493	2,8053	499	2,8552	504	2,9056	510	2,9566	516
3,7	2,7942	504	2,8446	509	2,8955	516	2,9471	521	2,9992	526
3,8	2,8323	515	2,8838	521	2,9359	526	2,9885	532	3,0417	538
3,9	2,8705	526	2,9231	531	2,9762	537	3,0299	543	3,0842	550
4,0	2,9087	536	2,9623	542	3,0165	549	3,0714	554	3,1268	560
4,1	2,9469	547	3,0016	553	3,0569	559	3,1128	565	3,1693	572
4,2	2,9850	558	3,0408	564	3,0972	570	3,1542	577	3,2119	582
	$\Delta_v = 382$.		$\Delta_v = 392$.		$\Delta_v = 403$.		$\Delta_v = 414$.		$\Delta_v = 423$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}00$.		$z = 1{,}02$.		$z = 1{,}04$.		$z = 1{,}06$.		$z = 1{,}08$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,4366	113	1,4479	115	1,4594	115	1,4709	117	1,4826	119
0,1	1,4802	125	1,4927	126	1,5053	127	1,5180	129	1,5309	130
0,2	1,5239	136	1,5375	137	1,5512	139	1,5651	141	1,5792	142
0,3	1,5675	148	1,5823	149	1,5972	150	1,6122	152	1,6274	154
0,4	1,6112	159	1,6271	160	1,6431	162	1,6593	164	1,6757	166
0,5	1,6548	170	1,6718	172	1,6890	174	1,7064	176	1,7240	177
0,6	1,6985	181	1,7166	184	1,7350	185	1,7535	187	1,7722	190
0,7	1,7422	192	1,7614	196	1,7809	197	1,8006	199	1,8205	201
0,8	1,7858	204	1,8062	206	1,8268	209	1,8477	211	1,8688	213
0,9	1,8295	215	1,8510	218	1,8728	220	1,8948	222	1,9170	225
1,0	1,8781	227	1,8958	229	1,9187	232	1,9419	234	1,9658	237
1,1	1,9168	238	1,9406	240	1,9646	244	1,9890	246	2,0136	248
1,2	1,9604	250	1,9854	252	2,0106	255	2,0361	257	2,0618	261
1,3	2,0041	261	2,0302	263	2,0565	266	2,0831	270	2,1101	272
1,4	2,0478	271	2,0749	275	2,1024	278	2,1302	282	2,1584	284
1,5	2,0914	283	2,1197	287	2,1484	289	2,1773	293	2,2066	296
1,6	2,1351	294	2,1645	298	2,1943	301	2,2244	305	2,2549	308
1,7	2,1787	306	2,2093	309	2,2402	313	2,2715	316	2,3031	320
1,8	2,2224	317	2,2541	321	2,2862	324	2,3186	328	2,3514	331
1,9	2,2660	329	2,2989	332	2,3321	336	2,3657	340	2,3997	343
2,0	2,3097	340	2,3437	344	2,3781	347	2,4128	351	2,4479	358
2,1	2,3533	352	2,3885	355	2,4240	359	2,4599	363	2,4962	367
2,2	2,3970	363	2,4333	366	2,4699	371	2,5070	375	2,5445	379
2,3	2,4407	374	2,4781	378	2,5159	382	2,5541	386	2,5927	391
2,4	2,4848	385	2,5228	390	2,5618	394	2,6012	398	2,6410	403
2,5	2,5280	396	2,5676	401	2,6077	406	2,6483	410	2,6893	414
2,6	2,5716	408	2,6124	413	2,6537	417	2,6954	421	2,7375	427
2,7	2,6153	419	2,6572	424	2,6996	429	2,7425	433	2,7858	438
2,8	2,6589	431	2,7020	435	2,7455	440	2,7895	446	2,8341	450
2,9	2,7026	442	2,7468	447	2,7915	451	2,8366	457	2,8823	462
3,0	2,7463	453	2,7916	458	2,8374	463	2,8837	469	2,9306	474
3,1	2,7899	465	2,8364	469	2,8833	475	2,9308	480	2,9788	486
3,2	2,8336	476	2,8812	481	2,9293	486	2,9779	492	3,0271	498
3,3	2,8772	487	2,9259	493	2,9752	498	3,0250	504	3,0754	509
3,4	2,9209	498	2,9707	504	3,0211	510	3,0721	515	3,1236	522
3,5	2,9645	510	3,0155	516	3,0671	521	3,1192	527	3,1719	533
3,6	3,0082	521	3,0603	527	3,1130	533	3,1668	549	3,2202	544
3,7	3,0518	533	3,1051	539	3,1590	544	3,2134	550	3,2684	557
3,8	3,0955	544	3,1499	550	3,2049	556	3,2605	562	3,3167	568
3,9	3,1392	555	3,1947	561	3,2508	568	3,3076	574	3,3650	580
4,0	3,1828	567	3,2395	573	3,2968	579	3,3547	585	3,4132	592
4,1	3,2265	578	3,2843	584	3,3427	591	3,4018	597	3,4615	604
4,2	3,2701	589	3,3290	596	3,3886	603	3,4489	609	3,5098	615
	$\Delta_v = 437$.		$\Delta_v = 448$.		$\Delta_v = 459$.		$\Delta_v = 471$.		$\Delta_v = 483$.	

Digitized by Google

$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$; $z = \frac{ax}{c}$, $V_0^2 = \frac{a^2 V_1^2}{r^2}$.

	$z = 1{,}10$.		$z = 1{,}12$.		$z = 1{,}14$.		$z = 1{,}16$.		$z = 1.18$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,4945	120	1,5065	121	1,5186	122	1,5308	124	1,5432	125
0,1	1,5439	132	1,5571	133	1,5704	135	1,5839	136	1,5975	138
0,2	1,5934	144	1,6078	145	1,6223	147	1,6370	148	1,6518	151
0,3	1,6428	156	1,6584	157	1,6741	160	1,6901	161	1,7062	162
0,4	1,6923	167	1,7090	170	1,7260	171	1,7431	174	1,7605	175
0,5	1,7417	180	1,7597	182	1,7779	183	1,7962	186	1,8148	188
0,6	1,7912	191	1,8103	194	1,8297	196	1,8493	198	1,8691	200
0,7	1,8406	204	1,8610	206	1,8816	208	1,9024	210	1,9234	213
0,8	1,8901	215	1,9116	218	1,9334	221	1,9555	223	1,9778	225
0,9	1,9395	228	1,9623	230	1,9853	233	2 0086	235	2,0321	238
1,0	1,9890	239	2,0129	242	2.0371	245	2,0616	248	2,0864	250
1,1	2,0384	252	2,0636	254	2,0890	257	2,1147	260	2,1407	263
1,2	2,0879	263	2,1142	267	2,1409	269	2,1678	272	2,1950	276
1,3	2,1373	276	2,1649	278	2,1927	282	2,2209	285	2,2494	288
1,4	2,1868	287	2,2155	291	2.2446	294	2,2740	297	2,3037	300
1,5	2,2362	300	2,2662	302	2,2964	306	2,3270	310	2,3580	313
1,6	2,2857	311	2,3168	315	2,3788	318	2,3801	322	2,4123	326
1,7	2,3351	324	2,3675	326	2.4001	331	2,4332	334	2.4666	338
1,8	2,3845	336	2,4181	339	2,4520	343	2,4863	347	2,5210	350
1,9	2,4340	347	2,4687	352	2,5039	355	2,5394	359	2,5753	363
2,0	2,4835	359	2,5194	363	2,5557	367	2,5924	372	2,6296	376
2,1	2,5329	371	2,5700	376	2,6076	378	2,6	384	2,6839	388
2,2	2,5824	383	2,6207	387	2,6594	392	2,6986	396	2,7382	401
2,3	2,6318	395	2,6713	400	2,7113	404	2,7517	409	2,7926	413
2,4	2,6813	407	2,7220	411	2,7631	417	2,8048	421	2,8469	425
2,5	2,7307	419	2,7726	424	2,8148	429	2,8579	433	2,9012	438
2,6	2,7802	431	2,8233	436	2,8669	440	2,9100	446	2,9555	451
2,7	2,8296	443	2,8739	448	2,9187	453	2,9640	458	3,0098	464
2,8	2,8791	455	2,9246	460	2.9706	465	3,0171	470	3,0641	476
2,9	2,9285	467	2,9752	472	3,0224	478	3,0702	483	3,1185	488
3,0	2,9780	479	3 0259	484	3,0743	490	3,1233	495	3,1728	505
3,1	3,0274	491	3,0765	496	3,1261	502	3,1763	508	3,2271	518
3,2	3,0769	502	3,1271	509	3,1780	514	3.2294	520	3,2814	526
3,3	3,1263	515	3,1778	521	3,2299	526	3.2825	532	3,3357	539
3,4	3,1758	526	3,2284	533	3,2817	539	3,3356	545	3,3901	551
3,5	3,2252	539	3,2791	545	3,3336	551	3,3887	557	3,4444	563
3,6	3,2746	551	3,3297	557	3,3854	564	3,4418	569	3,4987	576
3,7	3,3241	563	3,3804	569	3,4373	575	3,4948	582	3,5530	589
3,8	3,3735	575	3,4310	581	3,4891	588	3,5479	594	3,6073	601
3,9	3,4230	587	3,4817	593	3,5410	600	3,6010	607	3,6617	613
4,0	3,4724	599	3,5323	606	3,5929	612	3,6541	619	3,7160	626
4,1	3,5219	611	3,5830	617	3,6447	625	3,7072	631	3,7703	639
4,2	3,5713	623	3,6336	630	3,6966	636	3,7602	644	3,8246	651
	$\Delta_v = 494$.		$\Delta_v = 506$.		$\Delta_v = 512$.		$\Delta_v = 532$.		$\Delta_v = 543$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}20$.		$z = 1{,}22$.		$z = 1{,}24$.		$z = 1{,}26$.		$z = 1{,}28$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,5557	127	1,5684	128	1,5812	129	1,5941	131	1,6072	133
0,1	1,6713	139	1,6252	141	1,6393	142	1,6535	144	1,6679	146
0,2	1,6669	155	1,6821	153	1,6974	156	1,7130	157	1,7287	159
0,3	1,7224	165	1,7389	166	1,7555	169	1,7724	170	1,7894	172
0,4	1,7780	177	1,7957	180	1,8137	181	1,8318	183	1,8501	186
0,5	1,8336	190	1,8526	192	1,8718	194	1,8912	196	1,9108	199
0,6	1,8891	203	1,9094	205	1,9299	207	1,9506	210	1,9716	212
0,7	1,9447	215	1,9662	218	1,9880	220	2,0100	223	2,0323	225
0,8	2,0003	228	2,0231	230	2,0461	233	2,0694	236	2,0930	238
0,9	2,0559	240	2,0799	243	2,1042	246	2,1288	249	2,1537	252
1,0	2,1114	254	2,1368	256	2,1624	259	2,1883	262	2,2145	264
1,1	2,1670	266	2,1936	269	2,2205	272	2,2477	275	2,2752	278
1,2	2,2226	278	2,2504	282	2,2786	285	2,3071	288	2,3359	291
1,3	2,2782	291	2,3073	294	2,3367	298	2,3665	301	2,3966	305
1,4	2,3337	304	2,3641	308	2,3948	311	2,4259	314	2,4573	318
1,5	2,3893	316	2,4209	321	2,4530	323	2,4853	328	2,5181	331
1,6	2,4449	329	2,4778	335	2,5111	336	2,5447	341	2,5788	344
1,7	2,5004	342	2,5346	346	2,5692	350	2,6042	353	2,6395	358
1,8	2,5560	355	2,5915	358	2,6273	363	2,6636	366	2,7002	371
1,9	2,6116	367	2,6483	371	2,6854	376	2,7230	380	2,7610	384
2,0	2,6672	379	2,7051	384	2,7435	389	2,7824	393	2,8217	397
2,1	2,7227	393	2,7620	397	2,8017	401	2,8418	406	2,8824	411
2,2	2,7783	405	2,8188	410	2,8598	414	2,9012	419	2,9431	424
2,3	2,8359	418	2,8757	422	2,9179	427	2,9606	432	3,0038	437
2,4	2,8894	431	2,9325	435	2,9760	440	3,0200	446	3,0646	450
2,5	2,9450	443	2,9893	448	3,0341	454	3,0795	458	3,1253	463
2,6	3,0006	456	3,0462	461	3,0923	466	3,1389	471	3,1860	477
2,7	3,0562	468	3,1030	474	3,1504	479	3,1983	484	3,2467	490
2,8	3,1117	481	3,1598	487	3,2085	492	3,2577	498	3,3075	503
2,9	3,1673	494	3,2167	499	3,2666	505	3,3171	511	3,3682	516
3,0	3,2229	506	3,2735	512	3,3247	518	3,3765	524	3,4289	530
3,1	3,2784	520	3,3304	525	3,3829	530	3,4359	537	3,4896	543
3,2	3,3340	532	3,3872	538	3,4410	544	3,4954	549	3,5503	557
3,3	3,3896	544	3,4440	551	3,4991	557	3,5548	563	3,6111	569
3,4	3,4452	557	3,5009	563	3,5572	570	3,6142	576	3,6718	583
3,5	3,5007	570	3,5577	576	3,6153	583	3,6736	589	3,7325	596
3,6	3,5563	582	3,6145	589	3,6734	596	3,7330	602	3,7932	610
3,7	3,6119	595	3,6714	602	3,7316	608	3,7924	616	3,8540	622
3,8	3,6674	608	3,7282	615	3,7897	621	3,8518	629	3,9147	636
3,9	3,7230	621	3,7851	627	3,8478	634	3,9112	642	3,9754	649
4,0	3,7786	633	3,8419	640	3,9059	648	3,9707	654	4,0361	662
4,1	3,8342	645	3,8987	653	3,9640	661	4,0301	668	4,0969	675
4,2	3,8897	659	3,9556	666	4,0222	673	4,0895	681	4,1576	688
	$\Delta_v = 556$.		$\Delta_v = 568$.		$\Delta_v = 581$.		$\Delta_v = 594$.		$\Delta_v = 607$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}30$.		$z = 1{,}32$.		$z = 1{,}34$.		$z = 1{,}36$.		$z = 1{,}38$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,6205	134	1,6339	135	1,6474	137	1,6611	139	1,6750	140
0,1	1,6825	147	1,6972	149	1,7121	151	1,7272	153	1,7425	154
0,2	1,7446	160	1,7606	163	1,7769	164	1,7933	166	1,8099	169
0,3	1,8066	174	1,8240	176	1,8416	178	1,8594	180	1,8774	183
0,4	1,8687	187	1,8874	190	1,9064	192	1,9256	193	1,9449	197
0,5	1,9307	201	1,9508	203	1,9711	206	1,9917	207	2,0124	211
0,6	1,9928	214	2,0142	217	2,0359	219	2,0578	221	2,0799	225
0,7	2,0548	228	2,0776	230	2,1006	233	2,1239	235	2,1474	239
0,8	2,1168	242	2,1410	243	2,1653	247	2,1900	249	2,2149	253
0,9	2,1789	254	2,2043	258	2,2301	260	2,2561	263	2,2824	267
1,0	2,2409	268	2,2677	271	2,2948	274	2,3222	277	2,3499	281
1,1	2,3030	281	2,3311	285	2,3596	287	2,3883	291	2,4174	295
1,2	2,3650	295	2,3945	298	2,4243	301	2,4544	305	2,4849	309
1,3	2,4271	308	2,4579	311	2,4890	315	2,5205	319	2,5524	323
1,4	2,4891	322	2,5213	325	2,5538	329	2,5867	332	2,6199	336
1,5	2,5512	335	2,5847	338	2,6185	343	2,6528	346	2,6874	350
1,6	2,6132	348	2,6480	353	2,6833	356	2,7189	360	2,7549	364
1,7	2,6753	361	2,7114	366	2,7480	370	2,7850	374	2,8224	378
1,8	2,7373	375	2,7748	379	2,8127	384	2,8511	388	2,8899	392
1,9	2,7994	388	2,8382	393	2,8775	397	2,9172	402	2,9574	406
2,0	2,8614	402	2,9016	406	2,9422	411	2,9833	416	3,0249	420
2,1	2,9235	415	2,9650	420	3,0070	424	3,0494	430	3,0924	434
2,2	2,9855	429	3,0284	433	3,0717	438	3,1155	444	3,1599	448
2,3	3,0475	442	3,0917	447	3,1364	453	3,1817	457	3,2274	462
2,4	3,1096	455	3,1551	461	3,2012	466	3,2478	471	3,2949	476
2,5	3,1716	469	3,2185	474	3,2659	480	3,3139	485	3,3624	490
2,6	3,2337	482	3,2819	488	3,3307	493	3,3800	499	3,4299	504
2,7	3,2957	496	3,3458	501	3,3954	507	3,4461	513	3,4974	518
2,8	3,3578	509	3,4087	515	3,4602	520	3,5122	527	3,5649	532
2,9	3,4198	523	3,4721	528	3,5249	534	3,5788	540	3,6323	547
3,0	3,4819	535	3,5354	542	3,5896	548	3,6444	554	3,6998	561
3,1	3,5439	549	3,5988	556	3,6544	561	3,7105	568	3,7676	575
3,2	3,6060	562	3,6622	569	3,7191	576	3,7767	581	3,8348	589
3,3	3,6680	576	3,7256	583	3,7839	589	3,8428	595	3,9023	603
3,4	3,7301	589	3,7890	596	3,8486	603	3,9089	609	3,9698	617
3,5	3,7921	603	3,8524	609	3,9133	617	3,9750	623	4,0373	631
3,6	3,8542	616	3,9158	623	3,9781	630	4,0411	637	4,1048	645
3,7	3,9162	630	3,9792	636	4,0428	644	4,1072	651	4,1723	659
3,8	3,9783	642	4,0425	651	4,1076	657	4,1733	665	4,2398	673
3,9	4,0403	656	4,1059	664	4,1723	671	4,2394	679	4,3073	687
4,0	4,1023	670	4,1693	677	4,2370	685	4,3055	693	4,3748	701
4,1	4,1644	683	4,2327	691	4,3018	699	4,3717	706	4,4423	715
4,2	4,2264	697	4,2961	704	4,3663	713	4,4378	720	4,5098	729
	$\Delta_v = 620$.		$\Delta_v = 634$.		$\Delta_v = 647$.		$\Delta_v = 661$.		$\Delta_v = 675$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}40$.		$z = 1{,}42$.		$z = 1{,}44$.		$z = 1{,}46$.		$z = 1{,}48$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,6890	142	1,7032	143	1,7175	145	1,7320	147	1,7467	148
0,1	1,7579	156	1,7735	157	1,7892	160	1,8052	161	1,8213	164
0,2	1,8268	170	1,8438	172	1,8610	174	1,8784	176	1,8960	178
0,3	1,8957	184	1,9141	186	1,9327	189	1,9516	191	1,9707	193
0,4	1,9646	198	1,9844	201	2,0045	203	2,0248	205	2,0453	208
0,5	2,0335	212	2,0547	215	2,0762	218	2,0980	220	2,1200	223
0,6	2,1024	226	2,1250	230	2,1480	232	2,1712	235	2,1947	237
0,7	2,1713	241	2,1954	243	2,2197	247	2,2444	249	2,2693	253
0,8	2,2402	255	2,2657	258	2,2915	261	2,3176	264	2,3440	267
0,9	2,3091	269	2,3360	272	2,3632	276	2,3908	279	2,4187	282
1,0	2,3780	283	2,4063	287	2,4350	290	2,4640	293	2,4933	297
1,1	2,4469	297	2,4766	301	2,5067	305	2,5372	308	2,5680	312
1,2	2,5158	311	2,5469	316	2,5785	319	2,6104	323	2,6427	326
1,3	2,5847	326	2,6173	329	2,6502	334	2,6836	337	2,7173	342
1,4	2,6535	341	2,6876	344	2,7220	348	2,7568	352	2,7920	356
1,5	2,7224	355	2,7579	358	2,7937	363	2,8300	367	2,8667	371
1,6	2,7913	369	2,8282	373	2,8655	377	2,9032	381	2,9413	386
1,7	2,8602	383	2,8985	387	2,9372	392	2,9764	396	3,0160	401
1,8	2,9291	397	2,9688	402	3,0090	406	3,0496	411	3,0907	415
1,9	2,9980	411	3,0391	416	3,0807	421	3,1228	425	3,1653	431
2,0	3,0669	426	3,1095	430	3,1525	435	3,1960	440	3,2400	445
2,1	3,1358	440	3,1798	444	3,2242	450	3,2692	455	3,3147	460
2,2	3,2047	454	3,2501	459	3,2960	464	3,3424	469	3,3893	475
2,3	3,2736	468	3,3204	473	3,3677	479	3,4156	484	3,4640	490
2,4	3,3425	482	3,3907	488	3,4395	493	3,4888	499	3,5387	504
2,5	3,4114	496	3,4610	502	3,5112	508	3,5620	513	3,6133	520
2,6	3,4803	511	3,5314	516	3,5830	522	3,6352	528	3,6880	534
2,7	3,5492	525	3,6017	530	3,6547	537	3,7084	543	3,7627	549
2,8	3,6181	539	3,6720	545	3,7265	551	3,7816	557	3,8373	564
2,9	3,6870	553	3,7423	559	3,7982	566	3,8548	572	3,9120	579
3,0	3,7559	567	3,8126	574	3,8700	580	3,9280	587	3,9867	593
3,1	3,8248	581	3,8829	588	3,9417	595	4,0012	601	4,0613	609
3,2	3,8937	595	3,9532	603	4,0135	609	4,0744	616	4,1360	623
3,3	3,9626	610	4,0236	616	4,0852	624	4,1476	631	4,2107	638
3,4	4,0315	624	4,0939	631	4,1570	638	4,2208	645	4,2853	653
3,5	4,1004	638	4,1642	645	4,2287	653	4,2940	660	4,3600	668
3,6	4,1693	652	4,2345	660	4,3005	667	4,3672	674	4,4346	683
3,7	4,2382	666	4,3048	674	4,3722	682	4,4404	689	4,5093	698
3,8	4,3071	680	4,3751	689	4,4440	696	4,5136	704	4,5840	712
3,9	4,3760	695	4,4455	702	4,5157	711	4,5868	718	4,6586	728
4,0	4,4449	709	4,5158	717	4,5875	725	4,6600	733	4,7333	742
4,1	4,5138	723	4,5861	731	4,6592	740	4,7332	748	4,8080	757
4,2	4,5827	737	4,6564	746	4,7310	754	4,8064	762	4,8826	772
	$\Delta_v = 689$.		$\Delta_v = 703$.		$\Delta_v = 718$.		$\Delta_v = 732$.		$\Delta_v = 747$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}50$.		$z = 1{,}52$.		$z = 1{,}54$.		$z = 1{,}56$.		$z = 1{,}58$.	
V_0^2	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,7615	150	1,7765	152	1,7917	154	1,8071	155	1,8226	157
0,1	1,8377	165	1,8542	167	1,8709	169	1,8878	170	1,9048	173
0,2	1,9138	180	1,9318	182	1,9500	185	1,9685	186	1,9871	189
0,3	1,9900	195	2,0095	197	2,0292	200	2,0492	202	2,0694	204
0,4	2,0661	210	2,0871	213	2,1084	215	2,1299	217	2,1516	220
0,5	2,1423	225	2,1648	227	2,1875	231	2,2106	233	2,2339	236
0,6	2,2184	240	2,2424	243	2,2667	246	2,2913	248	2,3161	252
0,7	2,2946	255	2,3201	258	2,3459	261	2,3720	264	2,3984	267
0,8	2,3707	270	2,3977	273	2,4250	277	2,4527	280	2,4807	283
0,9	2,4469	285	2,4754	288	2,5042	292	2,5334	295	2,5629	299
1,0	2,5230	300	2,5530	304	2,5834	307	2,6141	311	2,6452	314
1,1	2,5992	315	2,6307	319	2,6626	322	2,6948	326	2,7274	330
1,2	2,6753	330	2,7083	334	2,7417	338	2,7755	342	2,8097	346
1,3	2,7515	345	2,7860	349	2,8209	353	2,8562	358	2,8920	361
1,4	2,8276	360	2,8636	365	2,9001	368	2,9369	373	2,9742	377
1,5	2,9038	375	2,9413	379	2,9792	384	3,0176	389	3,0565	393
1,6	2,9799	390	3,0189	395	3,0584	399	3,0983	404	3,1387	409
1,7	3,0561	405	3,0966	410	3,1376	414	3,1790	420	3,2210	424
1,8	3,1322	420	3,1742	425	3,2167	430	3,2597	435	3,3032	441
1,9	3,2084	435	3,2519	440	3,2959	446	3,3405	450	3,3855	456
2,0	3,2845	450	3,3295	456	3,3751	461	3,4212	466	3,4678	471
2,1	3,3607	465	3,4072	471	3,4543	476	3,5019	481	3,5500	487
2,2	3,4368	480	3,4848	486	3,5334	492	3,5826	497	3,6323	503
2,3	3,5130	495	3,5625	501	3,6126	507	3,6633	512	3,7145	519
2,4	3,5891	510	3,6401	517	3,6918	522	3,7440	528	3,7968	544
2,5	3,6653	525	3,7178	531	3,7709	538	3,8247	544	3,8791	550
2,6	3,7414	541	3,7955	546	3,8501	553	3,9054	559	3,9613	566
2,7	3,8176	555	3,8731	562	3,9293	568	3,9861	575	4,0436	581
2,8	3,8937	570	3,9507	577	4,0084	584	4,0668	590	4,1258	598
2,9	3,9699	585	4,0284	592	4,0876	599	4,1475	606	4,2081	613
3,0	4,0460	600	4,1060	608	4,1668	614	4,2282	622	4,2904	628
3,1	4,1222	615	4,1837	622	4,2459	630	4,3089	637	4,3726	645
3,2	4,1983	630	4,2613	638	4,3251	645	4,3896	653	4,4549	660
3,3	4,2745	645	4,3390	653	4,4043	660	4,4703	668	4,5371	676
3,4	4,3506	660	4,4166	669	4,4835	675	4,5510	684	4,6194	691
3,5	4,4268	675	4,4943	683	4,5626	691	4,6317	700	4,7017	707
3,6	4,5029	690	4,5719	699	4,6418	706	4,7124	715	4,7839	723
3,7	4,5791	705	4,6496	714	4,7210	721	4,7931	731	4,8662	738
3,8	4,6552	720	4,7272	729	4,8001	737	4,8738	746	4,9484	755
3,9	4,7314	735	4,8049	744	4,8793	753	4,9546	761	5,0307	770
4,0	4,8075	751	4,8826	759	4,9585	768	5,0353	776	5,1129	786
4,1	4,8837	765	4,9602	774	5,0376	784	5,1160	792	5,1952	802
4,2	4,9598	781	5,0379	789	5,1168	799	5,1967	808	5,2775	817
	$\Delta_v = 762$.		$\Delta_v = 777$.		$\Delta_v = 792$.		$\Delta_v = 807$.		$\Delta_v = 823$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}60$.		$z = 1{,}62$.		$z = 1{,}64$.		$z = 1{,}66$.		$z = 1{,}68$.	
V_0^2	$\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z	$\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z	$\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z	$\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z	$\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,8383	159	1,8542	161	1,8703	163	1,8866	164	1,9030	167
0,1	1,9221	175	1,9396	177	1,9573	179	1,9752	181	1,9933	184
0,2	2,0060	190	2,0250	194	2,0444	195	2,0639	197	2,0836	200
0,3	2,0898	207	2,1105	209	2,1314	211	2,1525	214	2,1739	217
0,4	2,1736	223	2,1959	225	2,2184	228	2,2412	230	2,2642	234
0,5	2,2575	238	2,2813	241	2,3054	244	2,3298	247	2,3545	250
0,6	2,3413	254	2,3667	258	2,3925	260	2,4185	263	2,4448	267
0,7	2,4251	271	2,4522	273	2,4795	277	2,5072	280	2,5352	283
0,8	2,5090	286	2,5376	289	2,5665	293	2,5958	297	2,6255	299
0,9	2,5928	302	2,6230	306	2,6536	309	2,6845	313	2,7158	316
1,0	2,6766	318	2,7084	322	2,7406	325	2,7731	330	2,8061	333
1,1	2,7604	334	2,7938	338	2,8276	342	2,8618	346	2,8964	349
1,2	2,8443	350	2,8793	353	2,9146	358	2,9504	363	2,9867	366
1,3	2,9281	366	2,9647	370	3,0017	374	3,0391	379	3,0770	383
1,4	3,0119	382	3,0501	386	3,0887	391	3,1278	395	3,1673	399
1,5	3,0958	397	3,1355	402	3,1757	407	3,2164	412	3,2576	416
1,6	3,1796	413	3,2209	419	3,2628	423	3,3051	428	3,3479	433
1,7	3,2634	430	3,3064	434	3,3498	439	3,3937	445	3,4382	450
1,8	3,3473	445	3,3918	450	3,4368	456	3,4824	461	3,5285	466
1,9	3,4311	461	3,4772	466	3,5238	472	3,5710	478	3,6188	483
2,0	3,5149	477	3,5626	483	3,6109	488	3,6597	494	3,7091	500
2,1	3,5987	493	3,6480	499	3,6979	505	3,7484	510	3,7994	516
2,2	3,6826	509	3,7335	514	3,7849	521	3,8370	527	3,8897	533
2,3	3,7664	525	3,8189	531	3,8720	537	3,9257	543	3,9800	550
2,4	3,8502	541	3,9043	547	3,9590	553	4,0143	560	4,0703	566
2,5	3,9341	556	3,9897	563	4,0460	570	4,1030	576	4,1606	583
2,6	4,0179	572	4,0751	580	4,1331	585	4,1916	593	4,2509	600
2,7	4,1017	589	4,1606	595	4,2201	602	4,2803	609	4,3412	616
2,8	4,1856	604	4,2460	611	4,3071	619	4,3690	625	4,4315	633
2,9	4,2694	620	4,3314	627	4,3941	635	4,4576	642	4,5218	650
3,0	4,3532	636	4,4168	644	4,4812	651	4,5463	658	4,6121	666
3,1	4,4371	651	4,5022	660	4,5682	667	4,6349	675	4,7024	683
3,2	4,5209	668	4,5877	675	4,6552	684	4,7236	691	4,7927	700
3,3	4,6047	684	4,6731	692	4,7423	699	4,8122	708	4,8830	716
3,4	4,6885	700	4,7585	708	4,8293	716	4,9009	724	4,9733	733
3,5	4,7724	715	4,8439	724	4,9163	732	4,9895	741	5,0636	750
3,6	4,8562	731	4,9293	740	5,0033	749	5,0782	757	5,1539	767
3,7	4,9400	748	5,0148	756	5,0904	765	5,1669	773	5,2442	783
3,8	5,0239	763	5,1002	772	5,1774	781	5,2555	790	5,3345	800
3,9	5,1077	779	5,1856	788	5,2644	798	5,3442	806	5,4248	817
4,0	5,1915	795	5,2710	805	5,3515	813	5,4328	824	5,5152	832
4,1	5,2754	811	5,3565	820	5,4385	830	5,5215	840	5,6055	849
4,2	5,3592	827	5,4419	836	5,5255	846	5,6101	857	5,6958	866
	$\Delta_v = 838$.		$\Delta_v = 854$.		$\Delta_v = 870$.		$\Delta_v = 887$.		$\Delta_v = 903$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}00$.		$z = 0{,}02$.		$z = 0{,}04$.		$z = 0{,}06$.		$z = 0{,}08$.	
V_0^2	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,0000	101	1,0101	102	1,0203	103	1,0306	105	1,0411	106
0,1	1,0000	111	1,0111	112	1,0223	114	1,0337	115	1,0452	117
0,2	1,0000	121	1,0121	122	1,0243	124	1,0367	126	1,0493	128
0,3	1,0000	131	1,0131	133	1,0264	134	1,0398	136	1,0534	138
0,4	1,0000	141	1,0141	143	1,0284	145	1,0429	146	1,0575	149
0,5	1,0000	151	1,0151	153	1,0304	155	1,0459	157	1,0616	160
0,6	1,0000	161	1,0161	163	1,0324	166	1,0490	167	1,0657	170
0,7	1,0000	171	1,0171	174	1,0345	175	1,0520	178	1,0698	181
0,8	1,0000	181	1,0181	184	1,0365	186	1,0551	189	1,0740	191
0,9	1,0000	191	1,0191	194	1,0385	197	1,0582	199	1,0781	201
1,0	1,0000	201	1,0201	204	1,0405	207	1,0612	210	1,0822	212
1,1	1,0000	211	1,0211	215	1,0426	217	1,0643	220	1,0863	223
1,2	1,0000	221	1,0221	225	1,0446	227	1,0673	231	1,0904	234
1,3	1,0000	232	1,0232	234	1,0466	238	1,0704	241	1,0945	244
1,4	1,0000	242	1,0242	244	1,0486	249	1,0735	251	1,0986	255
1,5	1,0000	252	1,0252	255	1,0507	258	1,0765	262	1,1027	266
1,6	1,0000	262	1,0262	265	1,0527	269	1,0796	272	1,1068	276
1,7	1,0000	272	1,0272	275	1,0547	279	1,0826	283	1,1109	287
1,8	1,0000	282	1,0282	286	1,0568	289	1,0857	293	1,1150	298
1,9	1,0000	292	1,0292	296	1,0588	300	1,0888	304	1,1192	308
2,0	1,0000	302	1,0302	306	1,0608	310	1,0918	315	1,1233	318
2,1	1,0000	312	1,0312	316	1,0628	321	1,0949	325	1,1274	329
2,2	1,0000	322	1,0322	327	1,0649	330	1,0979	336	1,1315	340
2,3	1,0000	332	1,0332	337	1,0669	341	1,1010	346	1,1356	350
2,4	1,0000	342	1,0342	347	1,0689	352	1,1041	356	1,1397	361
2,5	1,0000	352	1,0352	357	1,0709	362	1,1071	367	1,1438	372
2,6	1,0000	362	1,0362	368	1,0730	372	1,1102	377	1,1479	383
2,7	1,0000	372	1,0372	378	1,0750	383	1,1133	387	1,1520	393
2,8	1,0000	383	1,0383	387	1,0770	393	1,1163	398	1,1561	404
2,9	1,0000	393	1,0393	397	1,0790	404	1,1194	408	1,1602	415
3,0	1,0000	403	1,0403	408	1,0811	413	1,1224	420	1,1644	424
3,1	1,0000	413	1,0413	418	1,0831	424	1,1255	430	1,1685	435
3,2	1,0000	423	1,0423	428	1,0851	435	1,1286	440	1,1726	446
3,3	1,0000	433	1,0433	439	1,0872	444	1,1316	451	1,1767	456
3,4	1,0000	443	1,0443	449	1,0892	455	1,1347	461	1,1808	467
3,5	1,0000	453	1,0453	459	1,0912	465	1,1377	472	1,1849	478
3,6	1,0000	463	1,0463	469	1,0932	476	1,1408	482	1,1890	489
3,7	1,0000	473	1,0473	480	1,0953	486	1,1439	492	1,1931	499
3,8	1,0000	483	1,0483	490	1,0973	496	1,1469	503	1,1972	510
3,9	1,0000	493	1,0493	500	1,0993	507	1,1500	513	1,2018	521
4,0	1,0000	503	1,0503	510	1,1013	517	1,1530	524	1,2054	531
4,1	1,0000	513	1,0513	521	1,1034	527	1,1561	534	1,2095	542
4,2	1,0000	523	1,0523	531	1,1054	538	1,1592	545	1,2137	552
	$\Delta_v = 0$.		$\Delta_v = 10$.		$\Delta_v = 20$.		$\Delta_v = 30$.		$\Delta_v = 41$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}10$.		$z = 0{,}12$.		$z = 0{,}14$.		$z = 0{,}16$.		$z = 0{,}18$.	
V_0^2	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,0517	108	1,0625	109	1,0734	110	1,0844	113	1,0957	113
0,1	1,0569	118	1,0687	120	1,0807	122	1,0929	123	1,1052	125
0,2	1,0621	129	1,0750	131	1,0881	132	1,1013	135	1,1148	136
0,3	1,0672	140	1,0812	142	1,0954	144	1,1098	145	1,1243	148
0,4	1,0724	151	1,0875	152	1,1027	155	1,1182	157	1,1339	159
0,5	1,0776	161	1,0937	164	1,1101	166	1,1267	168	1,1435	170
0,6	1,0827	173	1,1000	174	1,1174	177	1,1351	179	1,1530	182
0,7	1,0879	183	1,1062	186	1,1248	188	1,1436	190	1,1626	193
0,8	1,0931	194	1,1125	196	1,1321	199	1,1520	202	1,1722	204
0,9	1,0982	205	1,1187	207	1,1394	210	1,1604	213	1,1817	216
1,0	1,1034	215	1,1249	219	1,1468	221	1,1689	224	1,1913	227
1,1	1,1086	226	1,1312	229	1,1541	232	1,1773	236	1,2009	238
1,2	1,1138	236	1,1374	240	1,1614	244	1,1858	246	1,2104	250
1,3	1,1189	248	1,1437	251	1,1688	254	1,1942	258	1,2200	261
1,4	1,1241	258	1,1499	262	1,1761	266	1,2027	269	1,2296	272
1,5	1,1293	269	1,1562	273	1,1835	276	1,2111	280	1,2391	284
1,6	1,1344	280	1,1624	284	1,1908	288	1,21967	291	1,2487	295
1,7	1,1396	291	1,1687	294	1,1981	299	1,2280	303	1,2583	306
1,8	1,1448	301	1,1749	306	1,2055	309	1,2364	314	1,2678	318
1,9	1,1500	312	1,1812	316	1,2128	321	1,2449	325	1,2774	329
2,0	1,1551	323	1,1874	328	1,2202	331	1,2533	337	1,2870	340
2,1	1,1603	334	1,1937	338	1,2275	343	1,2618	347	1,2965	352
2,2	1,1655	344	1,1999	349	1,2348	354	1,2702	359	1,3061	363
2,3	1,1706	356	1,2062	360	1,2422	365	1,2787	370	1,3157	374
2,4	1,1758	366	1,2124	371	1,2495	376	1,2871	381	1,3252	386
2,5	1,1810	377	1,2187	381	1,2568	387	1,2955	393	1,3348	397
2,6	1,1862	388	1,2250	392	1,2642	398	1,3040	403	1,3443	409
2,7	1,1913	399	1,2312	403	1,2715	409	1,3124	415	1,3539	421
2,8	1,1965	409	1,2374	415	1,2789	420	1,3209	426	1,3635	432
2,9	1,2017	419	1,2436	426	1,2862	431	1,3293	437	1,3730	444
3,0	1,2068	431	1,2499	436	1,2935	443	1,3378	448	1,3826	455
3,1	1,2120	441	1,2561	448	1,3009	453	1,3462	460	1,3922	466
3,2	1,2172	452	1,2624	458	1,3082	465	1,3547	470	1,4017	478
3,3	1,2223	463	1,2686	470	1,3156	475	1,3631	482	1,4113	489
3,4	1,2275	474	1,2749	480	1,3229	486	1,3715	494	1,4209	500
3,5	1,2327	484	1,2811	491	1,3302	498	1,3800	504	1,4304	512
3,6	1,2379	495	1,2874	502	1,3376	508	1,3884	516	1,4400	523
3,7	1,2430	506	1,2936	513	1,3449	520	1,3969	527	1,4496	534
3,8	1,2482	517	1,2999	523	1,3522	531	1,4053	538	1,4591	546
3,9	1,2534	527	1,3061	535	1,3596	542	1,4138	549	1,4687	557
4,0	1,2585	539	1,3124	545	1,3669	553	1,4222	561	1,4783	568
4,1	1,2637	549	1,3186	557	1,3743	564	1,4307	571	1,4878	580
4,2	1,2689	560	1,3249	567	1,3816	575	1,4391	583	1,4974	591
	$\Delta_v = 52$.		$\Delta_v = 62$.		$\Delta_v = 73$.		$\Delta_v = 84$.		$\Delta_v = 96$.	

Digitized by Google

$J(z, V_0^2)$; $z = \frac{a}{c^2}$, $V_0^2 = \frac{}{}$

	$z = 0{,}20$.		$z = 0{,}22$.		$z = 0{,}24$.		$z = 0{,}26$.		$z = 0{,}28$.	
V_0^2	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,1070	115	1,1185	117	1,1302	118	1,1420	120	1,1540	122
0,1	1,1177	127	1,1304	128	1,1432	130	1,1562	132	1,1694	134
0,2	1,1284	138	1,1422	140	1,1562	142	1,1704	144	1,1848	146
0,3	1,1391	150	1,1541	152	[illegible]	154	1,1847	155	1,2002	159
0,4	1,1498	161	1,1659	164	[illegible]	166	1,1989	167	1,2156	171
0,5	1,1605	173	1,1778	175	1,1953	178	1,2131	180	1,2311	182
0,6	1,1712	184	1,1896	187	1,2083	190	1,2273	192	1,2465	194
0,7	1,1819	196	1,2015	198	1,2213	202	1,2415	204	1,2619	206
0,8	1,1926	208	1,2134	210	1,2344	213	1,2557	216	1,2773	219
0,9	1,2033	219	1,2252	222	1,2474	225	1,2699	228	1,2927	231
1,0	1,2140	231	1,2371	233	1,2604	237	1,2841	240	1,3081	243
1,1	1,2247	242	1,2489	245	1,2734	249	1,2983	252	1,3235	255
1,2	1,2354	254	1,2608	257	1,2565	260	1,3[illegible]	264	1,3389	267
1,3	1,2461	265	1,2726	269	1,2995	272	1,3267	276	1,[illegible]	280
1,4	1,2568	277	1,2845	280	1,3125	284	1,3409	288	1,[illegible]	292
1,5	1,2675	288	1,2963	292	1,3255	296	1,3551	300	1,[illegible]	304
1,6	1,2782	300	1,3082	303	1,3385	308	1,3693	312	1,4005	316
1,7	1,2889	311	1,3200	316	1,3516	319	1,3835	324	1,4159	328
1,8	1,2996	323	1,3319	327	1,3646	331	1,3977	336	1,4313	340
1,9	1,3103	334	1,3437	339	1,3776	343	1,4119	348	1,4467	353
2,0	1,3210	346	1,3556	350	1,3906	355	1,4261	360	1,4621	365
2,1	1,3317	357	1,3674	362	1,4036	367	1,4403	372	1,4775	377
2,2	1,3424	369	1,3793	374	1,4167	378	1,4545	384	1,4929	389
2,3	1,3531	381	1,3912	385	1,4297	390	1,4687	396	1,5083	401
2,4	1,3638	392	1,4030	397	1,4427	402	1,4829	408	1,5237	414
2,5	1,3745	404	1,4149	408	1,4557	414	1,4971	420	1,5391	426
2,6	1,3852	415	1,4267	420	1,4687	426	1,5113	432	1,5545	438
2,7	1,3960	426	1,4386	432	1,4818	437	1,5255	444	1,5699	450
2,8	1,4067	437	1,4504	444	1,4948	449	1,5397	456	1,5853	462
2,9	1,4174	449	1,4623	455	1,5078	462	1,5540	467	1,6007	475
3,0	1,4281	460	1,4741	467	1,5208	474	1,5682	479	1,6161	487
3,1	1,4388	472	1,4860	478	1,5338	486	1,5824	491	1,6315	499
3,2	1,4495	483	1,4978	491	1,5469	497	1,5966	503	1,6469	511
3,3	1,4602	495	1,5097	502	1,5599	509	1,6108	516	1,6624	522
3,4	1,4709	506	1,5215	514	1,5729	521	1,6250	528	1,6778	535
3,5	1,4816	518	1,5334	525	1,5859	533	1,6392	540	1,6932	547
3,6	1,4923	529	1,5452	537	1,5989	545	1,6534	552	1,7086	559
3,7	1,5030	541	1,5571	549	1,6120	556	1,6676	564	1,7240	571
3,8	1,5137	552	1,5689	561	1,6250	568	1,6818	576	1,7394	583
3,9	1,5244	564	1,5808	572	1,6380	580	1,6960	588	1,7548	596
4,0	1,5351	576	1,5927	583	1,6510	592	1,7102	600	1,7702	608
4,1	1,5458	587	1,6045	595	1,6640	604	1,7244	612	1,7856	620
4,2	1,5565	599	1,6164	607	1,6771	615	1,7386	624	1,8010	632
	$\Delta_v = 107$.		$\Delta_v = 119$.		$\Delta_v = 130$.		$\Delta_v = 142$.		$\Delta_v = 154$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}30$.		$z = 0{,}32$.		$z = 0{,}34$.		$z = 0{,}36$.		$z = 0{,}38$.	
V_0^2	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,1662	123	1,1785	125	1,1910	127	1,2037	128	1,2165	131
0,1	1,1828	136	1,1964	137	1,2101	140	1,2241	141	1,2382	143
0,2	1,1994	148	1,2142	150	1,2292	152	1,2444	154	1,2598	157
0,3	1,2161	160	1,2321	162	1,2483	165	1,2648	167	1,2815	169
0,4	1,2327	172	1,2499	175	1,2674	178	1,2852	180	1,3032	182
0,5	1,2493	185	1,2678	187	1,2865	190	1,3055	193	1,3248	195
0,6	1,2659	197	1,2856	200	1,3056	203	1,3259	206	1,3465	208
0,7	1,2825	210	1,3035	212	1,3247	216	1,3468	218	1,3681	222
0,8	1,2992	221	1,3213	225	1,3438	228	1,3666	232	1,3898	234
0,9	1,3158	234	1,3392	237	1,3629	241	1,3870	244	1,4114	248
1,0	1,3324	246	1,3570	250	1,3820	254	1,4074	257	1,4331	260
1,1	1,3490	259	1,3749	262	1,4011	266	1,4277	270	1,4547	274
1,2	1,3656	272	1,3928	274	1,4202	279	1,4481	283	1,4764	286
1,3	1,3823	283	1,4106	288	1,4394	291	1,4685	295	1,4980	300
1,4	1,3989	296	1,4285	300	1,4585	304	1,4889	308	1,5197	312
1,5	1,4155	308	1,4463	313	1,4776	316	1,5092	321	1,5413	326
1,6	1,4321	321	1,4642	325	1,4967	329	1,5296	334	1,5630	339
1,7	1,4487	333	1,4820	338	1,5158	342	1,5500	347	1,5847	351
1,8	1,4653	346	1,4999	350	1,5349	354	1,5703	360	1,6063	365
1,9	1,4820	357	1,5177	363	1,5540	367	1,5907	373	1,6280	377
2,0	1,4986	370	1,5356	375	1,5731	380	1,6111	385	1,6496	391
2,1	1,5152	382	1,5534	388	1,5922	392	1,6314	399	1,6713	403
2,2	1,5318	395	1,5713	400	1,6113	405	1,6518	411	1,6929	417
2,3	1,5484	407	1,5891	413	1,6304	418	1,6722	424	1,7146	430
2,4	1,5651	419	1,6070	425	1,6495	431	1,6926	436	1,7362	443
2,5	1,5817	431	1,6248	438	1,6686	443	1,7129	450	1,7579	456
2,6	1,5983	444	1,6427	450	1,6877	456	1,7333	462	1,7795	469
2,7	1,6149	456	1,6605	463	1,7068	469	1,7537	475	1,8012	482
2,8	1,6315	469	1,6784	475	1,7259	481	1,7740	488	1,8228	495
2,9	1,6482	480	1,6962	488	1,7450	494	1,7944	501	1,8445	508
3,0	1,6648	493	1,7141	500	1,7641	507	1,8148	514	1,8662	520
3,1	1,6814	505	1,7319	513	1,7832	519	1,8351	527	1,8878	534
3,2	1,6980	518	1,7498	525	1,8023	532	1,8555	540	1,9095	547
3,3	1,7146	531	1,7677	537	1,8214	545	1,8759	552	1,9311	560
3,4	1,7313	542	1,7855	550	1,8405	557	1,8962	566	1,9528	573
3,5	1,7479	555	1,8034	562	1,8596	570	1,9166	578	1,9744	586
3,6	1,7645	567	1,8212	575	1,8787	583	1,9370	591	1,9961	599
3,7	1,7811	580	1,8391	587	1,8978	596	1,9574	603	2,0177	612
3,8	1,7977	592	1,8569	600	1,9169	608	1,9777	617	2,0394	625
3,9	1,8144	604	1,8748	612	1,9360	621	1,9981	629	2,0610	639
4,0	1,8310	616	1,8926	625	1,9551	634	2,0185	642	2,0827	651
4,1	1,8476	629	1,9105	637	1,9742	646	2,0388	655	2,1043	665
4,2	1,8642	641	1,9283	650	1,9933	659	2,0592	668	2,1260	677
	$\Delta_v = 166$.		$\Delta_v = 179$.		$\Delta_v = 191$.		$\Delta_v = 204$.		$\Delta_v = 217$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}40$.		$z = 0{,}42$.		$z = 0{,}44$.		$z = 0{,}46$.		$z = 0{,}48$.	
V_0^2	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,2296	132	1,2428	134	1,2562	135	1,2697	138	1,2835	139
0,1	1,2525	145	1,2670	148	1,2818	149	1,2967	151	1,3118	154
0,2	1,2755	158	1,2913	161	1,3074	163	1,3237	165	1,3402	167
0,3	1,2984	172	1,3156	174	1,3330	176	1,3506	179	1,3685	182
0,4	1,3214	185	1,3399	187	1,3586	190	1,3776	193	1,3969	195
0,5	1,3443	198	1,3641	201	1,3842	204	1,4046	206	1,4252	210
0,6	1,3673	211	1,3884	214	1,4098	218	1,4316	220	1,4536	223
0,7	1,3903	224	1,4127	228	1,4355	230	1,4585	234	1,4819	238
0,8	1,4132	238	1,4370	241	1,4611	244	1,4855	248	1,5103	251
0,9	1,4362	251	1,4613	254	1,4867	258	1,5125	261	1,5386	265
1,0	1,4591	264	1,4855	268	1,5123	272	1,5395	275	1,5670	279
1,1	1,4821	277	1,5098	281	1,5379	285	1,5664	289	1,5953	293
1,2	1,5050	291	1,5341	294	1,5635	299	1,5934	303	1,6237	307
1,3	1,5280	304	1,5584	308	1,5892	312	1,6204	316	1,6520	321
1,4	1,5509	317	1,5826	322	1,6148	325	1,6473	331	1,6804	335
1,5	1,5739	330	1,6069	335	1,6404	339	1,6743	344	1,7087	349
1,6	1,5969	343	1,6312	348	1,6660	353	1,7013	358	1,7371	363
1,7	1,6198	357	1,6555	361	1,6916	367	1,7283	371	1,7654	377
1,8	1,6428	369	1,6797	375	1,7172	380	1,7552	386	1,7938	390
1,9	1,6657	383	1,7040	388	1,7428	394	1,7822	399	1,8221	405
2,0	1,6887	396	1,7283	402	1,7685	407	1,8092	413	1,8505	418
2,1	1,7116	410	1,7526	415	1,7941	421	1,8362	426	1,8788	433
2,2	1,7346	422	1,7768	429	1,8197	434	1,8631	441	1,9072	446
2,3	1,7576	435	1,8011	442	1,8453	448	1,8901	454	1,9355	461
2,4	1,7805	449	1,8254	455	1,8709	462	1,9171	468	1,9639	474
2,5	1,8035	462	1,8497	468	1,8965	475	1,9440	482	1,9922	488
2,6	1,8264	476	1,8740	481	1,9221	489	1,9710	496	2,0206	502
2,7	1,8494	488	1,8982	496	1,9478	502	1,9980	509	2,0489	516
2,8	1,8723	502	1,9225	509	1,9734	516	2,0250	523	2,0773	530
2,9	1,8953	515	1,9468	522	1,9990	529	2,0519	537	2,1056	544
3,0	1,9182	529	1,9711	535	2,0246	543	2,0789	551	2,1340	558
3,1	1,9412	541	1,9953	549	2,0502	557	2,1059	564	2,1623	572
3,2	1,9642	554	2.0196	562	2,0758	570	2,1328	578	2,1906	587
3,3	1,9871	568	2,0439	576	2,1015	583	2,1598	592	2,2190	600
3,4	2,0101	581	2,0682	589	2,1271	597	2,1868	605	2,2473	614
3,5	2,0330	594	2,0924	603	2,1527	611	2,2138	619	2,2757	628
3,6	2,0560	607	2,1167	616	2,1783	624	2,2407	633	2,3040	642
3,7	2,0789	621	2,1410	629	2,2039	638	2,2677	647	2,3324	656
3,8	2,1019	634	2,1653	642	2,2295	652	2,2947	660	2,3607	670
3,9	2,1249	647	2,1896	655	2,2551	666	2,3217	674	2,3891	684
4,0	2,1478	660	2,2138	670	2,2808	678	2,3486	688	2,4174	698
4,1	2,1708	673	2,2381	683	2,3064	692	2,3756	702	2,4458	712
4,2	2,1937	687	2,2624	696	2,3320	706	2,4026	715	2,4741	726
	$\Delta_v = 230$.		$\Delta_v = 243$.		$\Delta_v = 256$.		$\Delta_v = 270$.		$\Delta_v = 283$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}50$.		$z = 0{,}52$.		$z = 0{,}54$.		$z = 0{,}56$.		$z = 0{,}58$.	
V_0^2	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,2974	142	1,3116	143	1,3259	146	1,3405	147	1,3552	150
0,1	1,3272	156	1,3428	157	1,3585	160	1,3745	163	1,3908	164
0,2	1,3569	170	1,3739	172	1,3911	175	1,4086	177	1,4263	179
0,3	1,3867	184	1,4051	186	1,4237	189	1,4426	192	1,4618	195
0,4	1,4164	198	1,4362	201	1,4563	204	1,4767	206	1,4973	210
0,5	1,4462	212	1,4674	215	1,4889	218	1,5107	222	1,5329	224
0,6	1,4759	226	1,4985	230	1,5215	233	1,5448	236	1,5684	239
0,7	1,5057	240	1,5297	244	1,5541	247	1,5788	251	1,6039	254
0,8	1,5354	255	1,5609	258	1,5867	262	1,6129	265	1,6394	270
0,9	1,5651	269	1,5920	273	1,6193	276	1,6469	281	1,6750	284
1,0	1,5949	283	1,6232	287	1,6519	291	1,6810	295	1,7105	299
1,1	1,6246	297	1,6543	302	1,6845	305	1,7150	310	1,7460	314
1,2	1,6544	311	1,6855	316	1,7171	320	1,7491	324	1,7815	329
1,3	1,6841	326	1,7167	330	1,7497	334	1,7831	339	1,8170	345
1,4	1,7139	339	1,7478	345	1,7823	349	1,8172	354	1,8526	359
1,5	1,7436	354	1,7790	358	1,8148	364	1,8512	369	1,8881	374
1,6	1,7734	367	1,8101	373	1,8474	379	1,8853	383	1,9236	389
1,7	1,8031	382	1,8413	387	1,8800	393	1,9193	398	1,9591	404
1,8	1,8328	397	1,8725	401	1,9126	408	1,9534	413	1,9947	419
1,9	1,8626	410	1,9036	416	1,9452	422	1,9874	428	2,0302	434
2,0	1,8923	425	1,9348	430	1,9778	437	2,0215	442	2,0657	449
2,1	1,9221	438	1,9659	445	2,0104	451	2,0555	457	2,1012	464
2,2	1,9518	453	1,9971	459	2,0430	466	2,0896	472	2,1368	478
2,3	1,9816	467	2,0283	473	2,0756	480	2,1236	487	2,1723	494
2,4	2,0113	481	2,0594	488	2,1082	494	2,1577	502	2,2078	509
2,5	2,0410	496	2,0906	502	2,1408	509	2,1917	516	2,2433	524
2,6	2,0708	509	2,1217	517	2,1734	524	2,2258	531	2,2789	538
2,7	2,1005	524	2,1529	531	2,2060	538	2,2598	546	2,3144	553
2,8	2,1303	537	2,1840	546	2,2386	552	2,2938	561	2,3499	569
2,9	2,1600	552	2,2152	560	2,2712	567	2,3279	575	2,3854	584
3,0	2,1898	566	2,2464	574	2,3038	581	2,3619	591	2,4210	598
3,1	2,2195	580	2,2775	588	2,3363	597	2,3960	605	2,4565	613
3,2	2,2493	594	2,3087	602	2,3689	611	2,4300	620	2,4920	628
3,3	2,2790	608	2,3398	617	2,4015	626	2,4641	634	2,5275	644
3,4	2,3087	623	2,3710	631	2,4341	640	2,4981	650	2,5631	658
3,5	2,3385	637	2,4022	645	2,4667	655	2,5322	664	2,5986	673
3,6	2,3682	651	2,4333	660	2,4993	669	2,5662	679	2,6341	688
3,7	2,3980	665	2,4645	674	2,5319	684	2,6003	693	2,6696	703
3,8	2,4277	679	2,4956	689	2,5645	698	2,6343	708	2,7051	719
3,9	2,4575	693	2,5268	703	2,5971	713	2,6684	723	2,7407	733
4,0	2,4872	708	2,5580	717	2,6297	727	2,7024	738	2,7762	748
4,1	2,5170	721	2,5891	732	2,6623	742	2,7365	752	2,8117	763
4,2	2,5467	736	2,6203	746	2,6949	756	2,7705	767	2,8472	778
	$\Delta_v = 297$.		$\Delta_v = 312$.		$\Delta_v = 326$.		$\Delta_v = 340$.		$\Delta_v = 355$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}60$.		$z = 0{,}62$.		$z = 0{,}64$.		$z = 0{,}66$.		$z = 0{,}68$.	
V_0^2	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,3702	152	1,3854	154	1,4008	156	1,4164	158	1,4322	160
0,1	1,4072	167	1,4239	169	1,4408	172	1,4580	174	1,4754	176
0,2	1,4442	182	1,4624	185	1,4809	187	1,4996	190	1,5186	193
0,3	1,4813	197	1,5010	200	1,5210	203	1,[illegible]	205	1,5618	209
0,4	1,5183	212	1,5395	216	1,5611	218	1,5829	221	1,6050	225
0,5	1,5553	228	1,5781	230	1,6011	234	1,6245	238	1,6483	240
0,6	1,5923	243	1,6166	246	1,6412	250	1,6662	253	1,6915	256
0,7	1,6293	258	1,6551	262	1,6813	265	1,7078	269	1,7347	273
0,8	1,6664	273	1,6937	277	1,7214	280	1,7494	285	1,7779	289
0,9	1,7034	288	1,7322	[illegible]	1,7614	297	1,7911	300	1,8211	305
1,0	1,7404	303	1,7707	[illegible]	1,8015	312	1,8327	316	1,8643	321
1,1	1,7774	319	1,8093	323	1,8416	327	1,8743	333	1,9076	337
1,2	1,8144	334	1,8478	339	1,8817	343	1,9160	348	1,9508	353
1,3	1,8515	348	1,8863	354	1,9217	359	1,9576	364	1,9940	369
1,4	1,8885	364	1,9249	369	1,9618	374	1,9992	380	2,0372	385
1,5	1,9255	379	1,9634	385	2,0019	390	2,0409	395	2,0804	401
1,6	1,9625	395	2,0020	400	2,0420	405	2,0825	412	2,1237	417
1,7	1,9995	410	2,0405	415	2,0820	422	2,1242	427	2,1669	433
1,8	2,0366	424	2,0790	431	2,1221	437	2,1658	443	2,2101	449
1,9	2,0736	440	2,1176	446	2,1622	452	2,2074	459	2,2533	465
2,0	2,1106	455	2,1561	462	2,2023	468	2,2491	474	2,2965	482
2,1	2,1476	470	2,1946	477	2,2423	484	2,2907	490	2,3397	498
2,2	2,1846	486	2,2332	492	2,2824	499	2,3323	507	2,3830	513
2,3	2,2217	500	2,2717	508	2,3225	515	2,3740	522	2,4262	529
2,4	2,2587	516	2,3103	523	2,3626	530	2,4156	538	2,4694	545
2,5	2,2957	531	2,3488	538	2,4026	546	2,4572	554	2,5126	562
2,6	2,3327	546	2,3873	554	2,4427	562	2,4989	569	2,5558	578
2,7	2,3697	562	2,4259	569	2,4828	577	2,5405	585	2,5990	594
2,8	2,4068	576	2,4644	585	2,5229	592	2,5821	602	2,6423	609
2,9	2,4438	587	2,5029	600	2,5629	609	2,6238	617	2,6855	626
3,0	2,4808	607	2,5415	615	2,6030	624	2,6654	633	2,7287	642
3,1	2,5178	622	2,5800	631	2,6431	639	2,7070	649	2,7719	658
3,2	2,5548	637	2,6185	647	2,6832	655	2,7487	664	2,8151	674
3,3	2,5919	652	2,6571	661	2,7232	671	2,7903	680	2,8583	690
3,4	2,6289	667	2,6956	677	2,7633	686	2,8319	697	2,9016	706
3,5	2,6659	683	2,7342	692	2,8034	702	2,8736	712	2,9448	722
3,6	2,7029	698	2,7727	708	2,8435	717	2,9152	728	2,9880	738
3,7	2,7399	713	2,8112	723	2,8835	734	2,9569	743	3,0312	754
3,8	2,7770	728	2,8498	738	2,9236	749	2,9985	759	3,0744	770
3,9	2,8140	743	2,8883	754	2,9637	764	3,0401	775	3,1176	787
4,0	2,8510	758	2,9268	770	3,0038	780	3,0818	791	3,1609	802
4,1	2,8880	774	2,9654	784	3,0438	796	3,1234	807	3,2041	818
4,2	2,9250	789	3,0039	800	3,0839	811	3,1650	823	3,2473	834
	$\Delta_v = 370$.		$\Delta_v = 385$.		$\Delta_v = 401$.		$\Delta_v = 416$.		$\Delta_v = 432$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}70$.		$z = 0{,}72$.		$z = 0{,}74$.		$z = 0{,}76$.		$z = 0{,}78$.	
V_0^2	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,4482	163	1,4645	165	1,4810	167	1,4977	170	1,5147	172
0,1	1,4930	179	1,5109	182	1,5291	184	1,5475	187	1,5662	189
0,2	1,5379	195	1,5574	198	1,5772	201	1,5973	203	1,6176	207
0,3	1,5827	211	1,6038	215	1,6253	218	1,6471	220	1,6691	224
0,4	1,6275	228	1,6503	231	1,6734	234	1,6968	238	1,7206	241
0,5	1,6723	244	1,6967	248	1,7215	251	1,7466	255	1,7721	258
0,6	1,7171	261	1,7432	264	1,7696	268	1,7964	271	1,8235	276
0,7	1,7620	276	1,7896	281	1,8177	284	1,8461	289	1,8750	293
0,8	1,8068	293	1,8361	297	1,8658	301	1,8959	306	1,9265	310
0,9	1,8516	309	1,8825	314	1,9139	318	1,9457	322	1,9779	328
1,0	1,8964	326	1,9290	330	1,9620	335	1,9955	339	2,0294	345
1,1	1,9413	341	1,9754	347	2,0101	351	2,0452	357	2,0809	361
1,2	1,9861	358	2,0219	363	2,0582	368	2,0950	374	2,1324	378
1,3	2,0309	374	2,0683	380	2,1063	385	2,1448	390	2,1838	396
1,4	2,0757	391	2,1148	396	2,1544	402	2,1946	407	2,2353	413
1,5	2,1205	407	2,1612	413	2,2025	418	2,2443	425	2,2868	430
1,6	2,1654	423	2,2077	429	2,2506	435	2,2941	441	2,3382	448
1,7	2,2102	439	2,2541	446	2,2987	452	2,3439	458	2,3897	465
1,8	2,2550	456	2,3006	462	2,3468	468	2,3936	476	2,4412	482
1,9	2,2998	472	2,3470	479	2,3949	485	2,4434	493	2,4927	499
2,0	2,3447	488	2,3935	495	2,4430	502	2,4932	509	2,5441	517
2,1	2,3895	504	2,4399	512	2,4911	519	2,5430	526	2,5956	534
2,2	2,4343	521	2,4864	528	2,5392	535	2,5927	544	2,6471	551
2,3	2,4791	537	2,5328	545	2,5873	552	2,6425	560	2,6985	569
2,4	2,5239	554	2,5793	561	2,6354	569	2,6923	577	2,7500	585
2,5	2,5688	569	2,6257	578	2,6835	586	2,7421	594	2,8015	602
2,6	2,6136	586	2,6722	594	2,7316	602	2,7918	611	2,8529	620
2,7	2,6584	602	2,7186	611	2,7797	619	2,8416	628	2,9044	637
2,8	2,7032	619	2,7651	627	2,8278	636	2,8914	645	2,9559	654
2,9	2,7481	634	2,8115	644	2,8759	653	2,9412	662	3,0074	671
3,0	2,7929	651	2,8580	660	2,9240	669	2,9909	679	3,0588	689
3,1	2,8377	667	2,9044	677	2,9721	686	3,0407	696	3,1103	706
3,2	2,8825	684	2,9509	693	3,0202	703	3,0905	713	3,1618	723
3,3	2,9273	700	2,9973	710	3,0683	719	3,1402	730	3,2132	741
3,4	2,9722	716	3,0438	726	3,1164	736	3,1900	747	3,2647	758
3,5	3,0170	732	3,0902	743	3,1645	753	3,2398	764	3,3162	775
3,6	3,0618	749	3,1367	759	3,2126	770	3,2896	781	3,3677	792
3,7	3,1066	765	3,1831	776	3,2607	786	3,3393	798	3,4191	810
3,8	3,1514	782	3,2296	792	3,3088	803	3,3891	815	3,4706	826
3,9	3,1963	797	3,2760	809	3,3569	820	3,4389	831	3,5220	844
4,0	3,2411	814	3,3225	825	3,4050	837	3,4887	848	3,5735	861
4,1	3,2859	830	3,3689	842	3,4531	853	3,5384	866	3,6250	878
4,2	3,3307	847	3,4154	858	3,5012	870	3,5882	883	3,6765	895
	$\Delta_v = 448$.		$\Delta_v = 464$.		$\Delta_v = 481$.		$\Delta_v = 498$.		$\Delta_v = 515$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}80$.		$z = 0{,}82$.		$z = 0{,}84$.		$z = 0{,}86$.		$z = 0{,}88$.	
V_0^2	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,5319	175	1,5494	177	1,5671	180	1,5851	182	1,6033	185
0,1	1,5851	192	1,6043	195	1,6238	198	1,6436	200	1,6636	204
0,2	1,6383	210	1,6593	212	1,6805	216	1,7021	219	1,7240	221
0,3	1,6915	227	1,7142	230	1,7372	234	1,7606	237	1,7843	240
0,4	1,7447	244	1,7691	248	1,7939	252	1,8191	255	1,8446	259
0,5	1,7979	262	1,8241	266	1,8507	269	1,8776	273	1,9049	278
0,6	1,8511	279	1,8790	284	1,9074	287	1,9361	292	1,9653	295
0,7	1,9043	297	1,9340	301	1,9641	305	1,9946	310	2,0256	314
0,8	1,9575	314	1,9889	319	2,0208	323	2,0531	328	2,0859	333
0,9	2,0107	331	2,0436	337	2,0775	341	2,1116	347	2,1463	351
1,0	2,0639	349	2,0988	354	2,1342	359	2,1701	365	2,2066	370
1,1	2,1170	367	2,1537	372	2,1909	377	2,2286	383	2,2669	388
1,2	2,1702	385	2,2087	389	2,2476	396	2,2872	400	2,3272	407
1,3	2,2234	402	2,2636	407	2,3043	414	2,3457	419	2,3876	425
1,4	2,2766	419	2,3185	425	2,3610	432	2,4042	437	2,4479	444
1,5	2,3298	437	2,3735	443	2,4178	449	2,4627	455	2,5082	463
1,6	2,3830	454	2,4284	461	2,4745	467	2,5212	474	2,5686	480
1,7	2,4362	472	2,4834	478	2,5312	485	2,5797	492	2,6289	499
1,8	2,4894	489	2,5383	496	2,5879	503	2,6382	510	2,6892	518
1,9	2,5426	506	2,5932	514	2,6446	521	2,6967	529	2,7496	536
2,0	2,5958	524	2,6482	531	2,7013	539	2,7552	547	2,8099	554
2,1	2,6490	541	2,7031	549	2,7580	557	2,8137	565	2,8702	573
2,2	2,7022	558	2,7580	567	2,8147	575	2,8722	583	2,9305	592
2,3	2,7554	576	2,8130	584	2,8714	593	2,9307	602	2,9909	610
2,4	2,8085	594	2,8679	603	2,9282	610	2,9892	620	3,0512	629
2,5	2,8617	612	2,9229	620	2,9849	628	3,0477	638	3,1115	647
2,6	2,9149	629	2,9778	638	3,0416	647	3,1063	656	3,1719	665
2,7	2,9681	646	3,0327	656	3,0983	665	3,1648	674	3,2322	684
2,8	3,0213	664	3,0877	673	3,1550	683	3,2233	692	3,2925	703
2,9	3,0745	681	3,1426	691	3,2117	701	3,2818	711	3,3529	720
3,0	3,1277	699	3,1976	708	3,2684	719	3,3403	729	3,4132	739
3,1	3,1809	716	3,2525	726	3,3251	737	3,3988	747	3,4735	758
3,2	3,2341	733	3,3074	744	3,3818	755	3,4573	765	3,5338	777
3,3	3,2873	751	3,3624	761	3,4385	773	3,5158	784	3,5942	795
3,4	3,3405	768	3,4173	780	3,4953	790	3,5743	802	3,6545	813
3,5	3,3937	786	3,4723	797	3,5520	808	3,6328	820	3,7148	832
3,6	3,4469	803	3,5272	815	3,6087	826	3,6913	839	3,7752	850
3,7	3,5001	820	3,5821	833	3,6654	844	3,7498	857	3,8355	869
3,8	3,5532	839	3,6371	850	3,7221	862	3,8083	875	3,8958	887
3,9	3,6064	856	3,6920	868	3,7788	880	3,8668	893	3,9561	906
4,0	3,6596	874	3,7470	885	3,8355	899	3,9254	911	4,0165	924
4,1	3,7128	891	3,8019	903	3,8922	917	3,9839	929	4,0768	943
4,2	3,7660	908	3,8568	921	3,9489	935	4,0424	947	4,1371	962
	$\Delta_v = 532$.		$\Delta_v = 549$.		$\Delta_v = 567$.		$\Delta_v = 585$.		$\Delta_v = 603$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}90$.		$z = 0{,}92$.		$z = 0{,}94$.		$z = 0{,}96$.		$z = 0{,}98$.	
V_0^2	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,6218	187	1,6405	191	1,6596	193	1,6789	195	1,6984	199
0,1	1,6840	206	1,7046	209	1,7255	212	1,7467	216	1,7683	218
0,2	1,7461	225	1,7686	229	1,7915	231	1,8146	235	1,8381	238
0,3	1,8083	244	1,8327	247	1,8574	251	1,8825	255	1,9080	258
0,4	1,8705	262	1,8967	267	1,9234	270	1,9504	274	1,9778	278
0,5	1,9327	281	1,9608	285	1,9893	290	2,0183	293	2,0476	298
0,6	1,9948	301	2,0249	304	2,0553	309	2,0862	313	2,1175	318
0,7	2,0570	319	2,0889	323	2,1212	328	2,1540	333	2,1873	338
0,8	2,1192	338	2,1530	342	2,1872	347	2,2219	353	2,2572	357
0,9	2,1814	356	2,2170	362	2,2532	366	2,2898	372	2,3270	377
1,0	2,2436	375	2,2811	380	2,3191	386	2,3577	391	2,3968	398
1,1	2,3057	394	2,3451	400	2,3851	405	2,4256	411	2,4667	417
1,2	2,3679	413	2,4092	418	2,4510	425	2,4935	430	2,5365	437
1,3	2,4301	431	2,4732	438	2,5170	444	2,5614	450	2,6064	456
1,4	2,4923	450	2,5373	456	2,5829	463	2,6292	470	2,6762	477
1,5	2,5545	468	2,6013	476	2,6489	482	2,6971	490	2,7461	496
1,6	2,6166	488	2,6654	494	2,7148	502	2,7650	509	2,8159	516
1,7	2,6788	506	2,7294	514	2,7808	521	2,8329	528	2,8857	537
1,8	2,7410	525	2,7935	533	2,8468	540	2,9008	548	2,9556	556
1,9	2,8032	543	2,8575	552	2,9127	560	2,9687	567	3,0254	576
2,0	2,8653	563	2,9216	571	2,9787	579	3,0366	587	3,0953	595
2,1	2,9275	582	2,9857	589	3,0446	598	3,1044	607	3,1651	616
2,2	2,9897	600	3,0497	609	3,1106	617	3,1723	627	3,2350	635
2,3	3,0519	619	3,1138	627	3,1765	637	3,2402	646	3,3048	655
2,4	3,1141	637	3,1778	647	3,2425	656	3,3081	665	3,3746	676
2,5	3,1762	657	3,2419	665	3,3084	676	3,3760	685	3,4445	695
2,6	3,2384	675	3,3059	685	3,3744	695	3,4439	704	3,5143	715
2,7	3,3006	694	3,3700	704	3,4404	713	3,5117	725	3,5842	734
2,8	3,3628	712	3,4340	723	3,5063	733	3,5796	744	3,6540	755
2,9	3,4249	732	3,4981	742	3,5723	752	3,6475	764	3,7239	774
3,0	3,4871	750	3,5621	761	3,6382	772	3,7154	783	3,7937	794
3,1	3,5493	769	3,6262	780	3,7042	791	3,7833	802	3,8635	815
3,2	3,6115	787	3,6902	799	3,7701	811	3,8512	822	3,9334	834
3,3	3,6737	806	3,7543	818	3,8361	830	3,9191	841	4,0032	854
3,4	3,7358	825	3,8183	837	3,9020	849	3,9869	862	4,0731	873
3,5	3,7980	844	3,8824	856	3,9680	868	4,0548	881	4,1429	894
3,6	3,8602	863	3,9465	875	4,0340	887	4,1227	901	4,2128	913
3,7	3,9224	881	4,0105	894	4,0999	907	4,1906	920	4,2826	933
3,8	3,9845	901	4,0746	913	4,1659	926	4,2585	939	4,3524	954
3,9	4,0467	919	4,1386	932	4,2318	946	4,3264	959	4,4223	973
4,0	4,1089	938	4,2027	951	4,2978	965	4,3943	978	4,4921	993
4,1	4,1711	956	4,2667	970	4,3637	984	4,4621	999	4,5620	1012
4,2	4,2333	975	4,3308	989	4,4297	1003	4,5300	1018	4,6318	1033
	$\Delta_v = 622$.		$\Delta_v = 641$.		$\Delta_v = 660$.		$\Delta_v = 679$.		$\Delta_v = 698$.	

Digitized by Google

$$\mathfrak{J}(z, V_0^2); \quad z = \frac{\alpha x}{c}, \quad V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 1{,}00$.		$z = 1{,}02$.		$z = 1{,}04$.		$z = 1{,}06$.		$z = 1{,}08$.	
V_0^2	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,7183	201	1,7384	205	1,7589	207	1,7796	210	1,8006	214
0,1	1,7901	222	1,8123	224	1,8347	229	1,8576	231	1,8807	235
0,2	1,8619	242	1,8861	245	1,9106	249	1,9355	253	1,9608	256
0,3	1,9338	262	1,9600	265	1,9865	270	2,0135	273	2,0408	278
0,4	2,0056	282	2,0338	286	2,0624	290	2,0914	295	2,1209	299
0,5	2,0774	302	2,1076	307	2,1383	311	2,1694	315	2,2009	321
0,6	2,1493	322	2,1815	327	2,2142	332	2,2474	336	2,2810	342
0,7	2,2211	342	2,2553	348	2,2901	352	2,3253	358	2,3611	362
0,8	2,2929	363	2,3292	368	2,3660	373	2,4033	378	2,4411	384
0,9	2,3647	383	2,4030	388	2,4418	394	2,4812	400	2,5212	405
1,0	2,4366	403	2,4769	408	2,5177	415	2,5592	421	2,6013	426
1,1	2,5084	423	2,5507	429	2,5936	436	2,6372	441	2,6813	448
1,2	2,5802	443	2,6245	450	2,6695	456	2,7151	463	2,7614	469
1,3	2,6520	464	2,6984	470	2,7454	477	2,7931	483	2,8414	491
1,4	2,7239	483	2,7722	491	2,8213	497	2,8710	505	2,9215	512
1,5	2,7957	504	2,8461	511	2,8972	518	2,9490	526	3,0016	533
1,6	2,8675	524	2,9199	531	2,9730	539	3,0269	547	3,0816	555
1,7	2,9394	544	2,9938	551	3,0489	560	3,1049	568	3,1617	576
1,8	3,0112	564	3,0676	572	3,1248	581	3,1829	589	3,2418	597
1,9	3,0830	584	3,1414	593	3,2007	601	3,2608	610	3,3218	619
2,0	3,1548	605	3,2153	603	3,2766	622	3,3388	631	3,4019	640
2,1	3,2267	624	3,2891	634	3,3525	642	3,4167	653	3,4820	661
2,2	3,2985	645	3,3630	654	3,4284	663	3,4947	673	3,5620	683
2,3	3,3703	665	3,4368	674	3,5042	685	3,5727	694	3,6421	704
2,4	3,4422	684	3,5106	695	3,5801	705	3,6506	715	3,7221	726
2,5	3,5140	705	3,5845	715	3,6560	726	3,7286	736	3,8022	747
2,6	3,5858	725	3,6583	736	3,7319	746	3,8065	758	3,8823	768
2,7	3,6576	746	3,7322	756	3,8078	767	3,8845	778	3,9623	790
2,8	3,7295	765	3,8060	777	3,8837	788	3,9625	799	4,0424	811
2,9	3,8013	786	3,8799	797	3,9596	808	4,0404	821	4,1225	832
3,0	3,8731	806	3,9537	818	4,0355	829	4,1184	841	4,2025	854
3,1	3,9450	825	4,0275	838	4,1113	850	4,1963	863	4,2826	875
3,2	4,0168	846	4,1014	858	4,1872	871	4,2743	883	4,3626	897
3,3	4,0886	866	4,1752	879	4,2631	892	4,3523	904	4,4427	918
3,4	4,1604	887	4,2491	899	4,3390	912	4,4302	926	4,5228	939
3,5	4,2323	906	4,3229	920	4,4149	933	4,5082	946	4,6028	961
3,6	4,3041	927	4,3968	940	4,4908	953	4,5861	968	4,6829	982
3,7	4,3759	947	4,4706	961	4,5667	974	4,6641	989	4,7630	1003
3,8	4,4478	966	4,5444	981	4,6425	996	4,7421	1009	4,8430	1025
3,9	4,5196	987	4,6183	1001	4,7184	1016	4,8200	1031	4,9231	1045
4,0	4,5914	1007	4,6921	1022	4,7943	1037	4,8980	1051	5,0031	1067
4,1	4,6632	1028	4,7660	1042	4,8702	1057	4,9759	1073	5,0832	1088
4,2	4,7351	1047	4,8398	1063	4,9461	1078	5,0539	1094	5,1633	1109
	$\Delta_v = 718$.		$\Delta_v = 738$.		$\Delta_v = 759$.		$\Delta_c = 780$.		$\Delta_v = 801$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}10$.		$z = 1{,}12$.		$z = 1{,}14$.		$z = 1{,}16$.		$z = 1{,}18$.	
V_0^2	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,8220	216	1,8436	220	1,8656	223	1,8879	226	1,9105	229
0,1	1,9042	238	1,9280	241	1,9521	246	1,9767	248	2,0015	253
0,2	1,9864	259	2,0123	264	2,0387	267	2,0654	272	2,0926	275
0,3	2,0686	281	2,0967	286	2,1253	289	2,1542	294	2,1836	299
0,4	2,1508	303	2,1811	307	2,2118	312	2,2430	317	2,2747	321
0,5	2,2330	324	2,2654	330	2,2984	334	2,3318	339	2,3657	344
0,6	2,3152	346	2,3498	351	2,3849	357	2,4206	362	2,4568	367
0,7	2,3978	369	2,4342	378	2,4715	379	2,5094	384	2,5478	390
0,8	2,4795	390	2,5185	396	2,5581	401	2,5982	407	2,6389	413
0,9	2,5617	412	2,6029	417	2,6446	424	2,6870	429	2,7299	436
1,0	2,6489	433	2,6872	440	2,7312	445	2,7757	453	2,8210	459
1,1	2,7261	455	2,7716	461	2,8177	468	2,8645	475	2,9120	482
1,2	2,8083	477	2,8560	483	2,9043	490	2,9533	498	3,0031	504
1,3	2,8905	498	2,9403	505	2,9908	513	3,0421	520	3,0941	528
1,4	2,9727	520	3,0247	527	3,0774	535	3,1309	543	3,1852	550
1,5	3,0549	541	3,1090	550	3,1640	557	3,2197	565	3,2762	574
1,6	3,1371	563	3,1934	571	3,2505	580	3,3085	588	3,3678	596
1,7	3,2193	585	3,2778	593	3,3371	602	3,3973	610	3,4583	620
1,8	3,3015	606	3,3621	615	3,4236	624	3,4860	634	3,5494	642
1,9	3,3837	628	3,4465	637	3,5102	646	3,5748	656	3,6404	665
2,0	3,4659	650	3,5309	659	3,5968	668	3,6636	679	3,7315	688
2,1	3,5481	671	3,6152	681	3,6833	691	3,7524	701	3,8225	711
2,2	3,6303	693	3,6996	703	3,7699	713	3,8412	724	3,9136	734
2,3	3,7125	714	3,7839	725	3,8564	736	3,9300	746	4,0046	757
2,4	3,7947	736	3,8683	747	3,9430	758	4,0188	769	4,0957	780
2,5	3,8769	758	3,9527	769	4,0296	780	4,1076	791	4,1867	803
2,6	3,9591	779	4,0370	791	4,1161	802	4,1963	815	4,2778	826
2,7	4,0413	801	4,1214	813	4,2027	824	4,2851	837	4,3688	849
2,8	4,1235	823	4,2058	834	4,2892	847	4,3739	859	4,4598	872
2,9	4,2057	844	4,2901	857	4,3758	869	4,4627	882	4,5509	895
3,0	4,2879	866	4,3745	878	4,4623	892	4,5515	904	4,6419	918
3,1	4,3701	887	4,4588	901	4,5489	914	4,6403	927	4,7330	941
3,2	4,4523	909	4,5432	923	4,6355	936	4,7291	949	4,8240	964
3,3	4,5345	931	4,6276	944	4,7220	959	4,8179	972	4,9151	987
3,4	4,6167	952	4,7119	967	4,8086	980	4,9066	995	5,0061	1010
3,5	4,6989	974	4,7963	988	4,8951	1003	4,9954	1018	5,0972	1032
3,6	4,7811	996	4,8807	1010	4,9817	1025	5,0842	1040	5,1882	1056
3,7	4,8633	1017	4,9650	1033	5,0683	1047	5,1730	1063	5,2793	1078
3,8	4,9455	1039	5,0494	1054	5,1548	1070	5,2618	1085	5,3703	1102
3,9	5,0276	1061	5,1337	1077	5,2414	1092	5,3506	1108	5,4614	1124
4,0	5,1098	1083	5,2181	1098	5,3279	1115	5,4394	1130	5,5524	1148
4,1	5,1920	1105	5,3025	1120	5,4145	1137	5,5282	1153	5,6435	1170
4,2	5,2742	1126	5,3868	1142	5,5010	1159	5,6169	1176	5,7345	1193
	$\Delta_v = 822$.		$\Delta_v = 844$.		$\Delta_v = 866$.		$\Delta_v = 888$.		$\Delta_v = 910$.	

Digitized by Google

$$\mathfrak{J}(z, V_0^2);\quad z = \frac{\alpha x}{c},\quad V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 1{,}20$.		$z = 1{,}22$.		$z = 1{,}24$.		$z = 1{,}26$.		$z = 1{,}28$.	
V_0^2	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,9334	233	1,9567	236	1,9803	240	2,0043	243	2,0286	247
0,1	2,0268	256	2,0524	260	2,0784	263	2,1047	268	2,1315	271
0,2	2,1201	280	2,1481	283	2,1764	288	2,2052	291	2,2343	297
0,3	2,2135	302	2,2437	307	2,2744	312	2,3056	316	2,3372	321
0,4	2,3068	326	2,3394	331	2,3725	335	2,4060	341	2,4401	345
0,5	2,4001	350	2,4351	354	2,4705	360	2,5065	364	2,5429	371
0,6	2,4935	372	2,5307	378	2,5685	384	2,6069	389	2,6458	395
0,7	2,5868	396	2,6264	402	2,6666	407	2,7073	414	2,7487	419
0,8	2,6802	419	2,7221	425	2,7646	431	2,8077	438	2,8515	444
0,9	2,7735	443	2,8178	448	2,8626	456	2,9082	462	2,9544	469
1,0	2,8669	465	2,9134	473	2,9607	479	3,0086	486	3,0572	494
1,1	2,9602	489	3,0091	496	3,0587	503	3,1090	511	3,1601	518
1,2	3,0535	513	3,1048	519	3,1567	528	3,2095	535	3,2630	543
1,3	3,1469	535	3,2004	544	3,2548	551	3,3099	559	3,3658	568
1,4	3,2402	559	3,2961	567	3,3528	575	3,4103	584	3,4687	592
1,5	3,3336	582	3,3918	590	3,4508	600	3,5108	608	3,5716	617
1,6	3,4269	605	3,4874	615	3,5489	623	3,6112	632	3,6744	642
1,7	3,5203	628	3,5831	638	3,6469	647	3,7116	657	3,7773	666
1,8	3,6136	652	3,6788	661	3,7449	671	3,8120	681	3,8801	692
1,9	3,7069	676	3,7745	685	3,8430	695	3,9125	705	3,9830	716
2,0	3,8003	698	3,8701	709	3,9410	719	4,0129	730	4,0859	740
2,1	3,8936	722	3,9658	732	4,0390	743	4,1133	754	4,1887	765
2,2	3,9870	745	4,0615	756	4,1371	767	4,2138	778	4,2916	790
2,3	4,0803	768	4,1571	780	4,2351	791	4,3142	803	4,3945	814
2,4	4,1737	791	4,2528	803	4,3331	815	4,4146	827	4,4973	839
2,5	4,2670	815	4,3485	827	4,4312	839	4,5151	851	4,6002	864
2,6	4,3604	836	4,4442	850	4,5292	863	4,6155	875	4,7030	889
2,7	4,4537	861	4,5398	874	4,6272	887	4,7159	900	4,8059	913
2,8	4,5470	885	4,6355	898	4,7253	911	4,8164	924	4,9088	938
2,9	4,6404	908	4,7312	921	4,8233	935	4,9168	948	5,0116	963
3,0	4,7337	931	4,8268	945	4,9213	959	5,0172	973	5,1145	987
3,1	4,8271	954	4,9225	969	5,0194	982	5,1176	998	5,2174	1012
3,2	4,9204	978	5,0182	992	5,1174	1007	5,2181	1021	5,3202	1037
3,3	5,0138	1001	5,1139	1015	5,2154	1031	5,3185	1046	5,4231	1061
3,4	5,1071	1024	5,2095	1040	5,3135	1054	5,4189	1070	5,5259	1086
3,5	5,2004	1048	5,3052	1063	5,4115	1079	5,5194	1094	5,6288	1111
3,6	5,2938	1071	5,4009	1086	5,5095	1103	5,6198	1119	5,7317	1135
3,7	5,3871	1094	5,4965	1111	5,6076	1126	5,7202	1143	5,8345	1160
3,8	5,4805	1117	5,5922	1134	5,7056	1151	5,8207	1167	5,9374	1185
3,9	5,5738	1141	5,6879	1157	5,8036	1175	5,9211	1192	6,0403	1209
4,0	5,6672	1164	5,7836	1181	5,9017	1198	6,0215	1216	6,1431	1234
4,1	5,7605	1187	5,8792	1205	5,9997	1222	6,1219	1241	6,2460	1259
4,2	5,8538	1211	5,9749	1228	6,0977	1247	6,2224	1264	6,3488	1284
	$\Delta_v = 933$.		$\Delta_v = 957$.		$\Delta_v = 980$.		$\Delta_v = 1004$.		$\Delta_v = 1029$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}30$.		$z = 1{,}32$.		$z = 1{,}34$.		$z = 1{,}36$.		$z = 1{,}38$.	
V_0^2	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	2,0533	250	2,0783	255	2,1038	258	2,1296	261	2,1557	266
0,1	2,1586	276	2,1862	279	2,2141	284	2,2425	288	2,2713	292
0,2	2,2640	300	2,2940	305	2,3245	310	2,3555	314	2,3869	318
0,3	2,3693	326	2,4019	330	2,4349	335	2,4684	340	2,5024	346
0,4	2,4746	351	2,5037	356	2,5453	361	2,5814	366	2,6180	372
0,5	2,5800	375	2,6175	381	2,6556	387	2,6943	393	2,7336	398
0,6	2,6853	401	2,7254	406	2,7660	413	2,8073	419	2,8492	425
0,7	2,7906	426	2,8332	432	2,8764	438	2,9202	445	2,9647	452
0,8	2,8959	451	2,9410	458	2,9868	464	3,0332	471	3,0803	478
0,9	3,0013	476	3,0489	483	3,0972	490	3,1462	497	3,1959	504
1,0	3,1066	501	3,1567	508	3,2075	516	3,2591	524	3,3115	531
1,1	3,2119	526	3,2645	534	3,3179	542	3,3721	549	3,4270	558
1,2	3,3173	551	3,3724	559	3,4283	567	3,4850	576	3,5426	584
1,3	3,4226	576	3,4802	585	3,5387	593	3,5980	602	3,6582	611
1,4	3,5279	601	3,5880	610	3,6490	619	3,7109	628	3,7737	638
1,5	3,6333	626	3,6959	635	3,7594	645	3,8239	654	3,8893	664
1,6	3,7386	651	3,8037	661	3,8698	670	3,9368	681	4,0049	690
1,7	3,8439	676	3,9115	687	3,9802	696	4,0498	707	4,1205	717
1,8	3,9493	701	4,0194	711	4,0905	723	4,1628	732	4,2360	744
1,9	4,0546	726	4,1272	737	4,2009	748	4,2757	759	4,3516	770
2,0	4,1599	751	4,2350	763	4,3113	774	4,3887	785	4,4672	797
2,1	4,2652	777	4,3429	788	4,4217	799	4,5016	811	4,5827	824
2,2	4,3706	801	4,4507	813	4,5320	826	4,6146	837	4,6983	850
2,3	4,4759	827	4,5586	838	4,6424	851	4,7275	864	4,8139	876
2,4	4,5812	852	4,6664	864	4,7528	877	4,8405	890	4,9295	903
2,5	4,6866	876	4,7742	890	4,8632	902	4,9534	916	5,0450	930
2,6	4,7919	902	4,8821	914	4,9735	929	5,0664	942	5,1606	956
2,7	4,8972	927	4,9899	940	5,0839	954	5,1793	969	5,2762	983
2,8	5,0026	951	5,0977	966	5,1943	980	5,2923	995	5,3918	1009
2,9	5,1079	977	5,2056	991	5,3047	1006	5,4053	1020	5,5073	1036
3,0	5,2132	1002	5,3134	1017	5,4151	1031	5,5182	1047	5,6229	1062
3,1	5,3186	1026	5,4212	1042	5,5254	1058	5,6312	1073	5,7385	1089
3,2	5,4239	1052	5,5291	1067	5,6358	1083	5,7441	1099	5,8540	1116
3,3	5,5292	1077	5,6369	1093	5,7462	1109	5,8571	1125	5,9696	1142
3,4	5,6345	1102	5,7447	1119	5,8566	1134	5,9700	1152	6,0852	1169
3,5	5,7399	1127	5,8526	1143	5,9669	1161	6,0830	1178	6,2008	1195
3,6	5,8452	1152	5,9604	1169	6,0773	1186	6,1959	1204	6,3163	1222
3,7	5,9505	1177	6,0682	1195	6,1877	1212	6,3089	1230	6,4319	1248
3,8	6,0559	1202	6,1761	1220	6,2981	1238	6,4219	1256	6,5475	1275
3,9	6,1612	1227	6,2839	1245	6,4084	1264	6,5348	1283	6,6631	1301
4,0	6,2665	1252	6,3917	1271	6,5188	1290	6,6478	1308	6,7786	1328
4,1	6,3719	1277	6,4996	1296	6,6292	1315	6,7607	1335	6,8942	1355
4,2	6,4772	1302	6,6074	1322	6,7396	1341	6,8737	1367	7,0098	1381
	$\Delta_v = 1053$.		$\Delta_v = 1078$.		$\Delta_v = 1104$.		$\Delta_v = 1130$.		$\Delta_v = 1156$.	

Digitized by Google

$$\mathfrak{J}(z, V_0^2); \quad z = \frac{\alpha x}{c}, \quad V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 1{,}40$.		$z = 1{,}42$.		$z = 1{,}44$.		$z = 1{,}46$.		$z = 1{,}48$.	
V_0^2	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	2,1823	269	2,2092	274	2,2366	278	2,2644	279	2,2923	288
0,1	2,3005	297	2,3302	301	2,3603	305	2,3908	310	2,4218	314
0,2	2,4187	324	2,4511	328	2,4839	333	2,5172	338	2,5510	344
0,3	2,5370	350	2,5720	356	2,6076	361	2,6437	366	2,6803	372
0,4	2,6552	377	2,6929	383	2,7312	389	2,7701	394	2,8095	401
0,5	2,7734	405	2,8139	410	2,8549	416	2,8965	423	2,9388	429
0,6	2,8917	431	2,9348	438	2,9786	444	3,0230	450	3,0680	458
0,7	3,0099	458	3,0557	465	3,1022	472	3,1494	479	3,1973	486
0,8	3,1281	485	3,1766	493	3,2259	499	3,2758	508	3,3266	514
0,9	3,2463	513	3,2976	519	3,3495	528	3,4023	535	3,4558	543
1,0	3,3646	539	3,4185	547	3,4732	555	3,5287	564	3,5851	572
1,1	3,4828	566	3,5394	574	3,5968	583	3,6551	592	3,7143	601
1,2	3,6010	593	3,6603	602	3,7205	611	3,7816	620	3,8436	629
1,3	3,7193	620	3,7813	629	3,8442	638	3,9080	648	3,9728	658
1,4	3,8375	647	3,9022	656	3,9678	667	4,0345	676	4,1021	686
1,5	3,9557	674	4,0231	684	4,0915	694	4,1609	704	4,2318	710
1,6	4,0739	701	4,1440	711	4,2151	722	4,2873	733	4,3606	743
1,7	4,1922	727	4,2649	739	4,3388	750	4,4138	760	4,4898	772
1,8	4,3104	755	4,3859	766	4,4625	777	4,5402	796	4,6198	794
1,9	4,4286	782	4,5068	793	4,5861	805	4,6666	817	4,7483	830
2,0	4,5469	808	4,6277	821	4,7098	833	4,7931	845	4,8776	858
2,1	4,6651	835	4,7486	848	4,8334	861	4,9195	873	5,0068	887
2,2	4,7833	863	4,8696	875	4,9571	888	5,0459	902	5,1361	915
2,3	4,9015	890	4,9905	903	5,0808	916	5,1724	930	5,2654	943
2,4	5,0198	916	5,1114	930	5,2044	944	5,2988	958	5,3946	972
2,5	5,1380	943	5,2323	958	5,3281	971	5,4252	987	5,5239	1000
2,6	5,2562	971	5,3533	984	5,4517	1000	5,5517	1014	5,6531	1030
2,7	5,3745	997	5,4742	1012	5,5754	1027	5,6781	1043	5,7824	1058
2,8	5,4927	1024	5,5951	1040	5,6991	1055	5,8046	1070	5,9116	1087
2,9	5,6109	1051	5,7160	1067	5,8227	1083	5,9310	1099	6,0409	1115
3,0	5,7291	1079	5,8370	1094	5,9464	1110	6,0574	1127	6,1701	1144
3,1	5,8474	1105	5,9579	1121	6,0700	1139	6,1839	1155	6,2994	1172
3,2	5,9656	1132	6,0788	1149	6,1937	1166	6,3103	1183	6,4286	1201
3,3	6,0838	1159	6,1997	1177	6,3174	1193	6,4367	1212	6,5579	1229
3,4	6,2021	1186	6,3207	1203	6,4410	1222	6,5632	1239	6,6871	1259
3,5	6,3203	1213	6,4416	1231	6,5647	1249	6,6896	1268	6,8164	1287
3,6	6,4385	1240	6,5625	1258	6,6883	1277	6,8160	1296	6,9456	1316
3,7	6,5567	1267	6,6834	1286	6,8120	1305	6,9425	1324	7,0749	1344
3,8	6,6750	1294	6,8044	1313	6,9357	1332	7,0689	1352	7,2041	1373
3,9	6,7932	1321	6,9253	1340	7,0593	1360	7,1953	1381	7,3334	1401
4,0	6,9114	1348	7,0462	1368	7,1830	1388	7,3218	1409	7,4627	1429
4,1	7,0297	1374	7,1671	1395	7,3066	1416	7,4482	1437	7,5919	1458
4,2	7,1479	1401	7,2880	1423	7,4303	1444	7,5747	1465	7,7212	1487
	$\Delta_v = 1182$.		$\Delta_v = 1209$.		$\Delta_v = 1237$.		$\Delta_v = 1264$.		$\Delta_v = 1293$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}50$.		$z = 1{,}52$.		$z = 1{,}54$.		$z = 1{,}56$.		$z = 1{,}58$.	
V_0^2	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z	$J(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	2,3211	290	2,3501	295	2,3796	299	2,4095	303	2,4398	308
0,1	2,4532	320	2,4852	324	2,5176	329	2,5505	333	2,5838	339
0,2	2,5854	348	2,6202	353	2,6555	359	2,6914	364	2,7278	370
0,3	2,7175	377	2,7552	383	2,7935	389	2,8324	394	2,8718	400
0,4	2,8496	406	2,8902	412	2,9314	419	2,9733	425	3,0158	431
0,5	2,9817	435	3,0252	442	3,0694	449	3,1143	455	3,1598	462
0,6	3,1138	464	3,1602	472	3,2074	478	3,2552	486	3,3038	492
0,7	3,2459	494	3,2953	500	3,3453	509	3,3962	515	3,4477	524
0,8	3,3780	523	3,4303	530	3,4833	538	3,5371	546	3,5917	555
0,9	3,5101	552	3,5653	559	3,6212	569	3,6781	576	3,7357	585
1,0	3,6423	580	3,7003	589	3,7592	598	3,8190	607	3,8797	616
1,1	3,7744	609	3,8353	619	3,8972	628	3,9600	637	4,0237	647
1,2	3,9065	638	3,9703	648	4,0351	658	4,1009	668	4,1677	677
1,3	4,0386	667	4,1053	678	4,1731	688	4,2419	697	4,3116	709
1,4	4,1707	697	4,2404	706	4,3110	718	4,3828	728	4,4556	739
1,5	4,3028	731	4,3754	736	4,4490	748	4,5238	758	4,5996	770
1,6	4,4349	755	4,5104	766	4,5870	777	4,6647	789	4,7436	801
1,7	4,5670	784	4,6454	795	4,7249	808	4,8057	819	4,8876	831
1,8	4,6992	812	4,7804	825	4,8629	837	4,9466	850	5,0316	862
1,9	4,8313	841	4,9154	855	5,0009	867	5,0876	880	5,1756	893
2,0	4,9634	870	5,0504	884	5,1388	897	5,2285	910	5,3195	924
2,1	5,0955	900	5,1855	913	5,2768	927	5,3695	940	5,4635	955
2,2	5,2276	929	5,3205	942	5,4147	957	5,5104	971	5,6075	986
2,3	5,3597	958	5,4555	972	5,5527	987	5,6514	1001	5,7515	1016
2,4	5,4918	987	5,5905	1002	5,6907	1016	5,7923	1032	5,8955	1047
2,5	5,6239	1016	5,7255	1031	5,8286	1047	5,9333	1062	6,0395	1078
2,6	5,7561	1044	5,8605	1061	5,9666	1076	6,0742	1092	6,1834	1109
2,7	5,8882	1073	5,9955	1090	6,1045	1107	6,2152	1122	6,3274	1140
2,8	6,0203	1103	6,1306	1119	6,2425	1136	6,3561	1153	6,4714	1181
2,9	6,1524	1132	6,2656	1149	6,3805	1166	6,4971	1188	6,6154	1201
3,0	6,2845	1161	6,4006	1178	6,5184	1196	6,6380	1214	6,7594	1232
3,1	6,4166	1190	6,5356	1208	6,6564	1226	6,7790	1244	6,9034	1262
3,2	6,5487	1219	6,6706	1237	6,7943	1256	6,9199	1275	7,0474	1293
3,3	6,6808	1248	6,8056	1267	6,9323	1286	7,0609	1304	7,1913	1325
3,4	6,8130	1277	6,9407	1296	7,0703	1315	7,2018	1335	7,3353	1355
3,5	6,9451	1306	7,0757	1325	7,2082	1346	7,3428	1365	7,4793	1386
3,6	7,0772	1335	7,2107	1355	7,3462	1375	7,4837	1396	7,6233	1417
3,7	7,2093	1364	7,3457	1384	7,4841	1406	7,6247	1426	7,7673	1447
3,8	7,3414	1393	7,4807	1414	7,6221	1435	7,7656	1457	7,9113	1478
3,9	7,4735	1422	7,6157	1444	7,7601	1465	7,9066	1486	8,0552	1510
4,0	7,6056	1451	7,7507	1473	7,8980	1495	8,0475	1517	8,1992	1540
4,1	7,7377	1481	7,8858	1502	8,0360	1525	8,1885	1547	8,3482	1571
4,2	7,8699	1509	8,0208	1531	8,1739	1555	8,3294	1578	8,4872	1602
	$\Delta_v = 1321$.		$\Delta_v = 1350$.		$\Delta_v = 1380$.		$\Delta_v = 1410$.		$\Delta_v = 1440$.	

Digitized by Google

$$\mathfrak{J}(z, V_0^2);\ z = \frac{\alpha x}{c},\ V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 1{,}60$.		$z = 1{,}62$.		$z = 1{,}64$.		$z = 1{,}66$.		$z = 1{,}68$.	
V_0^2	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	2,4706	313	2,5019	317	2,5336	322	2,5658	327	2,5985	332
0,1	2,6177	344	2,6521	349	2,6870	354	2,7224	360	2,7584	365
0,2	2,7648	375	2,8023	381	2,8404	386	2,8790	393	2,9183	398
0,3	2,9118	407	2,9525	412	2,9937	419	3,0356	425	3,0781	432
0,4	3,0589	438	3,1027	444	3,1471	451	3,1922	458	3,2380	464
0,5	3,2060	469	3,2529	476	3,3005	483	3,3488	490	3,3978	498
0,6	3,3530	501	3,4031	507	3,4538	516	3,5054	523	3,5577	531
0,7	3,5001	531	3,5532	540	3,6072	547	3,6619	556	3,7175	564
0,8	3,6472	562	3,7034	572	3,7606	579	3,8185	589	3,8774	597
0,9	3,7942	594	3,8536	603	3,9139	612	3,9751	621	4,0372	631
1,0	3,9413	625	4,0038	635	4,0673	644	4,1317	654	4,1971	664
1,1	4,0884	656	4,1540	666	4,2206	677	4,2883	686	4,3569	697
1,2	4,2354	688	4,3042	698	4,3740	709	4,4449	719	4,5168	730
1,3	4,3825	719	4,4544	730	4,5274	741	4,6015	752	4,6767	763
1,4	4,5295	751	4,6046	761	4,6807	773	4,7580	785	4,8365	797
1,5	4,6766	782	4,7548	793	4,8341	805	4,9146	818	4,9964	829
1,6	4,8237	813	4,9050	825	4,9875	837	5,0712	850	5,1562	863
1,7	4,9707	845	5,0552	856	5,1408	870	5,2278	883	5,3161	896
1,8	5,1178	875	5,2053	889	5,2942	902	5,3844	915	5,4759	930
1,9	5,2649	906	5,3555	921	5,4476	934	5,5410	948	5,6358	962
2,0	5,4119	938	5,5057	952	5,6009	966	5,6975	981	5,7956	996
2,1	5,5590	969	5,6559	984	5,7543	998	5,8541	1014	5,9555	1029
2,2	5,7061	1000	5,8061	1015	5,9076	1031	6,0107	1046	6,1153	1062
2,3	5,8531	1032	5,9563	1047	6,0610	1063	6,1673	1079	6,2752	1095
2,4	6,0002	1063	6,1065	1079	6,2144	1095	6,3239	1112	6,4351	1128
2,5	6,1473	1094	6,2567	1110	6,3677	1128	6,4805	1144	6,5949	1162
2,6	6,2943	1126	6,4069	1142	6,5211	1160	6,6371	1177	6,7548	1194
2,7	6,4414	1157	6,5571	1174	6,6745	1191	6,7936	1210	6,9146	1228
2,8	6,5895	1177	6,7072	1206	6,8278	1224	6,9502	1243	7,0745	1261
2,9	6,7355	1219	6,8574	1238	6,9812	1256	7,1068	1275	7,2343	1295
3,0	6,8826	1250	7,0076	1270	7,1346	1288	7,2634	1308	7,3942	1327
3,1	7,0296	1282	7,1578	1301	7,2879	1321	7,4200	1340	7,5540	1361
3,2	7,1767	1313	7,3080	1333	7,4413	1353	7,5766	1373	7,7139	1394
3,3	7,3238	1344	7,4582	1365	7,5947	1385	7,7332	1405	7,8737	1428
3,4	7,4708	1376	7,6084	1396	7,7480	1417	7,8897	1439	8,0336	1460
3,5	7,6179	1407	7,7586	1428	7,9014	1449	8,0463	1472	8,1935	1493
3,6	7,7650	1438	7,9088	1459	8,0547	1482	8,2029	1504	8,3533	1527
3,7	7,9120	1470	8,0590	1491	8,2081	1514	8,3595	1537	8,5132	1559
3,8	8,0591	1501	8,2092	1523	8,3615	1546	8,5161	1569	8,6730	1593
3,9	8,2062	1531	8,3593	1555	8,5148	1579	8,6727	1602	8,8329	1626
4,0	8,3532	1563	8,5095	1587	8,6682	1610	8,8292	1635	8,9927	1660
4,1	8,5003	1594	8,6597	1619	8,8216	1642	8,9858	1668	9,1526	1692
4,2	8,6474	1625	8,8099	1650	8,9749	1675	9,1424	1700	9,3124	1726
	$\Delta_v = 1471$.		$\Delta_v = 1502$.		$\Delta_v = 1534$.		$\Delta_v = 1566$.		$\Delta_v = 1599$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}00$.			$z = 0{,}02$.			$z = 0{,}04$.			$z = 0{,}06$.			$z = 0{,}08$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,000	0	10	1,010	1	10	1,020	2	10	1,030	3	11	1,041	4	10
0,1	1,000	0	11	1,011	1	11	1,022	2	11	1,033	3	12	1,045	4	11
0,2	1,000	0	12	1,012	1	12	1,024	2	12	1,036	3	13	1,049	4	12
0,3	1,000	0	13	1,013	1	13	1,026	2	13	1,039	3	14	1,053	4	13
0,4	1,000	0	14	1,014	1	14	1,028	2	14	1,042	3	15	1,057	4	14
0,5	1,000	0	15	1,015	1	15	1,030	2	15	1,045	3	16	1,061	4	15
0,6	1,000	0	16	1,016	1	16	1,032	2	16	1,048	3	17	1,065	4	16
0,7	1,000	0	17	1,017	1	17	1,034	2	17	1,051	3	18	1,069	3	17
0,8	1,000	0	18	1,018	1	18	1,036	2	18	1,054	3	18	1,072	4	18
0,9	1,000	0	19	1,019	1	19	1,038	2	19	1,057	3	19	1,076	4	19
1,0	1,000	0	20	1,020	1	20	1,040	2	20	1,060	3	20	1,080	4	20
1,1	1,000	0	21	1,021	1	21	1,042	2	21	1,063	3	21	1,084	4	21
1,2	1,000	0	22	1,022	1	22	1,044	2	22	1,066	3	22	1,088	4	22
1,3	1,000	0	23	1,023	1	23	1,046	2	23	1,069	3	23	1,092	3	22
1,4	1,000	0	24	1,024	1	24	1,048	2	24	1,072	3	23	1,095	4	24
1,5	1,000	0	25	1,025	1	25	1,050	2	25	1,075	2	24	1,099	4	25
1,6	1,000	0	26	1,026	1	26	1,052	2	25	1,077	3	26	1,103	4	26
1,7	1,000	0	27	1,027	1	27	1,054	2	26	1,080	3	27	1,107	4	26
1,8	1,000	0	28	1,028	1	28	1,056	2	27	1,083	3	28	1,111	3	27
1,9	1,000	0	29	1,029	1	29	1,058	2	28	1,086	3	28	1,114	4	28
2,0	1,000	0	30	1,030	1	29	1,059	1	30	1,089	3	29	1,118	4	29
2,1	1,000	0	31	1,031	1	30	1,061	2	31	1,092	3	30	1,122	4	30
2,2	1,000	0	32	1,032	1	31	1,063	2	31	1,094	2	31	1,125	3	31
2,3	1,000	0	33	1,033	1	32	1,065	2	32	1,097	3	32	1,129	4	32
2,4	1,000	0	34	1,034	1	33	1,067	2	33	1,100	3	33	1,133	4	32
2,5	1,000	0	35	1,035	1	34	1,069	2	34	1,103	3	34	1,137	4	33
2,6	1,000	0	36	1,036	1	35	1,071	2	35	1,106	3	34	1,140	3	34
2,7	1,000	0	37	1,037	1	36	1,073	2	35	1,108	2	36	1,144	4	35
2,8	1,000	0	38	1,038	1	37	1,075	2	36	1,111	3	37	1,148	4	35
2,9	1,000	0	39	1,039	1	38	1,077	2	37	1,114	3	37	1,151	3	37
3,0	1,000	0	40	1,040	1	39	1,079	2	38	1,117	3	38	1,155	4	37
3,1	1,000	0	41	1,041	1	39	1,080	1	40	1,120	3	38	1,158	3	38
3,2	1,000	0	42	1,042	1	40	1,082	2	40	1,122	2	40	1,162	4	39
3,3	1,000	0	43	1,043	1	41	1,084	2	41	1,125	3	40	1,165	3	40
3,4	1,000	0	44	1,044	1	42	1,086	2	42	1,128	3	41	1,169	4	41
3,5	1,000	0	45	1,045	1	43	1,088	2	42	1,130	2	43	1,173	4	41
3,6	1,000	0	45	1,045	0	45	1,090	2	43	1,133	3	43	1,176	3	42
3,7	1,000	0	46	1,046	1	46	1,092	2	44	1,136	3	44	1,180	4	43
3,8	1,000	0	47	1,047	1	47	1,094	2	45	1,139	3	44	1,183	3	44
3,9	1,000	0	48	1,048	1	47	1,095	1	46	1,141	2	46	1,187	4	44
4,0	1,000	0	49	1,049	1	48	1,097	2	47	1,144	3	46	1,190	3	45
4,1	1,000	0	50	1,050	1	49	1,099	2	48	1,147	3	47	1,194	4	46
4,2	1,000	0	51	1,051	1	50	1,101	2	49	1,150	3	47	1,197	3	47

Digitized by Google

$$\mathcal{V}(z, V_0^2); \quad z = \frac{ax}{c}, \quad V_0^2 = \frac{d^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 0{,}10$.			$z = 0{,}12$.			$z = 0{,}14$.			$z = 0{,}16$.			$z = 0{,}18$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,051	5	11	1,062	6	10	1,072	7	11	1,083	8	11	1,094	9	11
0,1	1,056	5	12	1,068	6	11	1,079	7	12	1,091	8	12	1,103	9	12
0,2	1,061	5	13	1,074	6	12	1,086	7	13	1,099	8	13	1,112	9	13
0,3	1,066	5	14	1,080	6	13	1,093	7	14	1,107	8	14	1,121	9	14
0,4	1,071	5	15	1,086	6	14	1,100	7	15	1,115	8	15	1,130	8	15
0,5	1,076	5	16	1,092	5	15	1,107	7	16	1,123	7	15	1,138	9	16
0,6	1,081	5	16	1,097	6	17	1,114	7	16	1,130	8	17	1,147	9	17
0,7	1,086	4	17	1,103	6	18	1,121	6	17	1,138	8	18	1,156	8	17
0,8	1,090	5	19	1,109	6	18	1,127	7	19	1,146	7	18	1,164	9	19
0,9	1,095	5	20	1,115	5	19	1,134	6	19	1,153	8	20	1,173	8	19
1,0	1,100	5	20	1,120	6	20	1,140	7	21	1,161	7	20	1,181	8	20
1,1	1,105	5	21	1,126	6	21	1,147	7	21	1,168	8	21	1,189	8	21
1,2	1,110	4	22	1,132	5	22	1,154	6	22	1,176	7	21	1,197	9	22
1,3	1,114	5	23	1,137	6	23	1,160	7	23	1,183	7	23	1,206	8	22
1,4	1,119	5	24	1,143	5	24	1,167	6	24	1,190	7	24	1,214	8	23
1,5	1,124	5	24	1,148	6	25	1,173	6	24	1,197	8	25	1,222	8	24
1,6	1,129	4	25	1,154	5	25	1,179	7	26	1,205	7	25	1,230	8	25
1,7	1,133	5	26	1,159	6	27	1,186	6	26	1,212	7	26	1,238	8	26
1,8	1,138	4	27	1,165	5	27	1,192	6	27	1,219	7	27	1,246	8	27
1,9	1,142	5	28	1,170	6	28	1,198	7	28	1,226	7	28	1,254	8	28
2,0	1,147	5	29	1,176	5	29	1,205	6	28	1,233	7	29	1,262	7	28
2,1	1,152	4	29	1,181	6	30	1,211	6	29	1,240	7	29	1,269	8	30
2,2	1,156	5	31	1,187	5	30	1,217	6	30	1,247	7	30	1,277	8	30
2,3	1,161	4	31	1,192	5	31	1,223	6	31	1,254	7	31	1,285	8	31
2,4	1,165	5	32	1,197	6	32	1,229	6	32	1,261	7	32	1,293	7	31
2,5	1,170	4	33	1,203	5	32	1,235	6	33	1,268	7	32	1,300	7	32
2,6	1,174	5	34	1,208	5	33	1,241	6	34	1,275	7	33	1,308	7	33
2,7	1,179	4	34	1,213	5	34	1,247	6	34	1,281	6	34	1,315	8	34
2,8	1,183	5	35	1,218	6	35	1,253	6	35	1,288	7	35	1,323	7	34
2,9	1,188	4	36	1,224	5	35	1,259	6	36	1,295	7	35	1,330	7	35
3,0	1,192	4	37	1,229	5	36	1,265	6	37	1,302	7	36	1,338	8	35
3,1	1,196	5	38	1,234	5	37	1,271	6	37	1,308	6	37	1,345	7	36
3,2	1,201	4	38	1,239	5	38	1,277	6	38	1,315	7	37	1,352	7	37
3,3	1,205	5	39	1,244	5	39	1,283	6	38	1,321	6	38	1,359	7	38
3,4	1,210	4	39	1,249	5	40	1,289	6	39	1,328	7	39	1,367	8	38
3,5	1,214	4	40	1,254	6	41	1,295	6	39	1,334	6	40	1,374	7	39
3,6	1,218	5	42	1,260	5	41	1,301	6	40	1,341	7	40	1,381	7	40
3,7	1,223	4	42	1,265	5	41	1,306	5	41	1,347	6	41	1,388	7	40
3,8	1,227	4	43	1,270	5	42	1,312	6	42	1,354	7	41	1,395	7	41
3,9	1,231	4	44	1,275	5	43	1,318	6	42	1,360	6	42	1,402	7	42
4,0	1,235	5	45	1,280	5	44	1,324	6	43	1,367	7	42	1,409	7	42
4,1	1,240	4	45	1,285	5	44	1,329	5	44	1,373	6	43	1,416	7	43
4,2	1,244		46	1,290	5	45	1,335	6	44	1,379	6	44	1,423	7	44

Digitized by Google

	$z = 0{,}20$.			$z = 0{,}22$.			$z = 0{,}24$.			$z = 0{,}26$.			$z = 0{,}28$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,105		11	1,116		11	1,127		12	1,139		11	1,150		12
		10			11			12			13			14	
0,1	1,115		12	1,127		12	1,139		13	1,152		12	1,164		13
		10			11			12			13			14	
0,2	1,125		13	1,138		13	1,151		14	1,165		13	1,178		14
		10			11			12			12			14	
0,3	1,135		14	1,149		14	1,163		14	1,177		15	1,192		14
		10			11			12			13			13	
0,4	1,145		15	1,160		15	1,175		15	1,190		15	1,205		16
		9			10			11			12			13	
0,5	1,154		16	1,170		16	1,186		16	1,202		16	1,218		17
		10			11			12			12			13	
0,6	1,164		17	1,181		17	1,198		16	1,214		17	1,231		18
		9			10			11			12			13	
0,7	1,173		18	1,191		18	1,209		17	1,226		18	1,244		19
		10			10			11			12			13	
0,8	1,183		18	1,201		19	1,220		18	1,238		19	1,257		20
		9			10			11			12			13	
0,9	1,192		19	1,211		20	1,231		19	1,250		20	1,270		20
		9			10			11			12			13	
1,0	1,201		20	1,221		21	1,242		20	1,262		21	1,283		21
		9			10			11			12			13	
1,1	1,210		21	1,231		22	1,253		21	1,274		22	1,296		21
		9			10			11			12			12	
1,2	1,219		22	1,241		23	1,264		22	1,286		22	1,308		22
		9			10			10			11			12	
1,3	1,228		23	1,251		23	1,274		23	1,297		23	1,320		23
		9			10			11			11			12	
1,4	1,237		24	1,261		24	1,285		23	1,308		24	1,332		24
		9			10			10			12			12	
1,5	1,246		25	1,271		24	1,295		25	1,320		24	1,344		25
		9			10			11			11			12	
1,6	1,255		26	1,281		25	1,306		25	1,331		25	1,356		26
		9			9			10			11			12	
1,7	1,264		26	1,290		26	1,316		26	1,342		26	1,368		26
		9			10			10			11			12	
1,8	1,273		27	1,300		26	1,326		27	1,353		27	1,380		27
		9			9			11			11			12	
1,9	1,282		27	1,309		28	1,337		27	1,364		28	1,392		27
		8			9			10			11			11	
2,0	1,290		28	1,318		29	1,347		28	1,375		28	1,403		29
		9			10			10			11			12	
2,1	1,299		29	1,328		29	1,357		29	1,386		29	1,415		29
		8			9			10			11			11	
2,2	1,307		30	1,337		30	1,367		30	1,397		29	1,426		30
		9			9			10			10			11	
2,3	1,316		30	1,346		31	1,377		30	1,407		30	1,437		31
		8			9			9			11			12	
2,4	1,324		31	1,355		31	1,386		32	1,418		31	1,449		31
		8			9			10			10			11	
2,5	1,332		32	1,364		32	1,396		32	1,428		32	1,460		31
		9			9			10			10			11	
2,6	1,341		32	1,373		33	1,406		32	1,438		33	1,471		32
		8			9			9			11			11	
2,7	1,349		33	1,382		33	1 415		34	1,449		33	1,482		33
		8			9			10			10			11	
2,8	1,357		34	1,391		34	1,425		34	1,459		34	1,493		33
		8			9			10			10			10	
2,9	1,365		35	1,400		35	1,435		34	1,469		34	1,503		35
		8			9			9			10			11	
3,0	1,373		36	1,409		35	1,444		35	1,479		35	1,514		35
		8			8			9			10			11	
3,1	1,381		36	1,417		36	1,453		36	1,489		36	1,525		35
		8			9			10			10			10	
3,2	1,389		37	1,426		37	1,463		36	1,499		36	1,535		36
		8			9			9			10			11	
3,3	1,397		38	1,435		37	1,472		37	1,509		37	1,546		36
		8			8			9			10			10	
3,4	1,405		38	1,443		38	1,481		38	1,519		37	1,556		37
		8			9			9			9			11	
3,5	1,413		39	1,452		38	1,490		38	1,528		39	1,567		37
		8			8			9			10			10	
3,6	1,421		39	1,460		39	1,499		39	1,538		39	1,577		38
		7			9			9			10			10	
3,7	1,428		41	1,469		39	1,508		40	1,548		39	1,587		39
		8			8			9			9			10	
3,8	1,436		41	1,477		40	1,517		40	1,557		40	1,597		40
		8			8			9			10			10	
3,9	1,444		41	1,485		41	1,526		41	1,567		40	1,607		41
		7			8			9			9			10	
4,0	1,451		42	1,493		42	1,535		41	1,576		41	1,617		41
		8			9			9			10			10	
4,1	1,459		43	1,502		42	1,544		42	1,586		41	1,627		42
		8			8			9			9			10	
4,2	1,467		43	1,510		43	1,553		42	1,595		42	1,637		42

Digitized by Google

$$\mathcal{V}(z, V_0^2);\quad z = \frac{\alpha x}{c},\quad V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 0{,}30$.			$z = 0{,}32$.			$z = 0{,}34$.			$z = 0{,}36$.			$z = 0{,}38$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,162	15	11	1,178	16	12	1,185	17	12	1,197	18	12	1,209	19	12
0,1	1,177	15	12	1,189	16	13	1,202	17	13	1,215	18	13	1,228	19	13
0,2	1,192	14	13	1,205	16	14	1,219	17	14	1,233	17	14	1,247	18	14
0,3	1,206	15	15	1,221	15	15	1,236	16	14	1,250	18	15	1,265	18	15
0,4	1,221	15	15	1,236	15	16	1,252	16	16	1,268	17	15	1,283	18	16
0,5	1,235	14	16	1,251	15	17	1,268	16	17	1,285	16	16	1,301	18	17
0,6	1,249	14	17	1,266	15	18	1,284	16	17	1,301	16	18	1,319	17	18
0,7	1,263	14	18	1,281	15	18	1,299	15	19	1,318	17	18	1,336	18	19
0,8	1,277	14	19	1,296	14	19	1,315	16	19	1,334	16	20	1,354	16	19
0,9	1,290	13	20	1,310	14	20	1,330	15	20	1,350	16	20	1,370	17	21
1,0	1,304	14	20	1,324	14	21	1,345	15	21	1,366	16	21	1,387	17	21
1,1	1,317	13	22	1,339	15	21	1,360	15	22	1,382	16	22	1,404	16	22
1,2	1,330	13	23	1,353	14	22	1,375	15	23	1,398	15	22	1,420	16	23
1,3	1,343	13	24	1,367	14	23	1,390	14	23	1,413	15	23	1,436	16	24
1,4	1,356	13	24	1,380	14	24	1,404	14	24	1,428	15	24	1,452	16	25
1,5	1,369	13	25	1,394	13	24	1,418	15	25	1,443	15	25	1,468	16	25
1,6	1,382	12	25	1,407	13	26	1,433	14	25	1,458	15	26	1,484	15	26
1,7	1,394	13	26	1,420	14	27	1,447	14	26	1,473	15	26	1,499	16	27
1,8	1,407	12	27	1,434	13	27	1,461	13	27	1,488	14	27	1,515	15	27
1,9	1,419	13	28	1,447	13	27	1,474	14	28	1,502	15	28	1,530	15	28
2,0	1,432	12	28	1,460	13	28	1,488	14	29	1,517	14	28	1,545	15	28
2,1	1,444	12	29	1,473	12	29	1,502	13	29	1,531	14	29	1,560	15	29
2,2	1,456	12	29	1,485	13	30	1,515	13	30	1,545	14	30	1,575	14	29
2,3	1,468	12	30	1,498	13	30	1,528	14	31	1,559	14	30	1,589	15	31
2,4	1,480	11	31	1,511	12	31	1,542	13	31	1,573	13	31	1,604	14	31
2,5	1,491	12	32	1,523	12	32	1,555	13	31	1,586	14	32	1,618	14	32
2,6	1,503	12	32	1,535	13	33	1,568	13	32	1,600	13	32	1,632	14	33
2,7	1,515	11	33	1,548	12	33	1,581	12	34	1,613	14	33	1,646	14	34
2,8	1,526	12	34	1,560	12	34	1,593	13	34	1,627	13	34	1,660	14	34
2,9	1,538	11	35	1,572	12	34	1,606	12	35	1,640	13	35	1,674	14	35
3,0	1,549	11	35	1,584	12	35	1,618	13	35	1,653	13	36	1,688	14	35
3,1	1,560	11	36	1,596	11	36	1,631	12	36	1,666	13	36	1,702	13	36
3,2	1,571	11	36	1,607	12	37	1,643	13	36	1,679	13	37	1,715	14	36
3,3	1,582	11	37	1,619	12	37	1,656	12	37	1,692	13	37	1,729	13	37
3,4	1,593	11	38	1,631	11	37	1,668	12	37	1,705	13	37	1,742	13	37
3,5	1,604	11	38	1,642	12	38	1,680	12	38	1,718	12	38	1,755	13	38
3,6	1,615	11	39	1,654	11	38	1,692	12	38	1,730	13	38	1,768	13	38
3,7	1,626	11	39	1,665	11	39	1,704	12	39	1,743	12	38	1,781	13	39
3,8	1,637	11	39	1,676	11	40	1,716	11	39	1,755	12	39	1,794	13	39
3,9	1,648	10	39	1,687	12	40	1,727	12	40	1,767	12	40	1,807	13	40
4,0	1,658	11	41	1,699	11	40	1,739	11	40	1,779	12	41	1,820	12	40
4,1	1,669	10	41	1,710	11	40	1,750	12	42	1,792	13	40	1,832	13	41
4,2	1,679		42	1,721		41	1,762		42	1,804	12	41	1,845		41

Digitized by Google

	$z = 0{,}40$.			$z = 0{,}42$.			$z = 0{,}44$.			$z = 0{,}46$.			$z = 0{,}48$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,221	20	13	1,234	21	12	1,246	22	13	1,259	23	12	1,271	24	13
0,1	1,241	20	14	1,255	20	13	1,268	22	14	1,282	22	13	1,295	24	14
0,2	1,261	19	14	1,275	21	15	1,290	21	14	1,304	22	15	1,319	23	15
0,3	1,280	19	16	1,296	19	15	1,311	21	15	1,326	22	16	1,342	23	16
0,4	1,299	19	16	1,315	20	17	1,332	20	16	1,348	22	17	1,365	22	16
0,5	1,318	19	17	1,335	20	17	1,352	21	18	1,370	21	17	1,387	22	18
0,6	1,337	18	18	1,355	19	18	1,373	20	18	1,391	21	18	1,409	22	19
0,7	1,355	18	19	1,374	19	19	1,393	19	19	1,412	20	19	1,431,	21	19
0,8	1,373	18	20	1,393	18	19	1,412	20	20	1,432	20	20	1,452	21	20
0,9	1,391	17	20	1,411	19	21	1,432	19	20	1,452	20	21	1,473	21	21
1,0	1,408	18	22	1,430	18	21	1,451	19	21	1,472	20	22	1,494	20	22
1,1	1,426	17	22	1,448	18	22	1,470	19	22	1,492	20	22	1,514	21	23
1,2	1,443	17	23	1,466	17	23	1,489	18	23	1,512	19	23	1,535	20	23
1,3	1,460	17	23	1,483	18	24	1,507	18	24	1,531	19	24	1,555	19	24
1,4	1,477	16	24	1,501	17	24	1,525	18	25	1,550	18	24	1,574	20	25
1,5	1,493	17	25	1,518	17	25	1,543	18	25	1,568	19	26	1,594	19	25
1,6	1,510	16	25	1,535	17	26	1,561	18	26	1,587	18	26	1,613	19	26
1,7	1,526	16	26	1,552	17	27	1,579	17	26	1,605	18	27	1,632	19	27
1,8	1,542	16	27	1,569	16	27	1,596	17	27	1,623	18	28	1,651	18	27
1,9	1,558	15	27	1,585	17	28	1,613	17	28	1,641	18	28	1,669	19	28
2,0	1,573	16	29	1,602	16	28	1,630	17	29	1,659	17	29	1,688	18	28
2,1	1,589	15	29	1,618	16	29	1,647	17	29	1,676	18	30	1,706	18	29
2,2	1,604	16	30	1,634	16	30	1,664	16	30	1,694	17	30	1,724	17	30
2,3	1,620	15	30	1,650	16	30	1,680	17	31	1,711	17	31	1,741	18	31
2,4	1,635	15	31	1,666	15	31	1,697	16	31	1,728	17	31	1,759	17	31
2,5	1,650	14	31	1,681	16	32	1,713	16	32	1,745	16	31	1,776	18	32
2,6	1,664	15	33	1,697	15	32	1,729	16	33	1,761	17	33	1,794	17	33
2,7	1,679	15	33	1,712	15	33	1,745	16	33	1,778	16	33	1,811	17	33
2,8	1,694	14	33	1,727	15	34	1,761	15	33	1,794	16	34	1,828	17	33
2,9	1,708	15	34	1,742	15	34	1,776	16	34	1,810	16	35	1,845	16	34
3,0	1,723	14	34	1,757	15	35	1,792	15	34	1,826	16	35	1,861	17	35
3,1	1,737	14	35	1,772	15	35	1,807	15	35	1,842	16	36	1,878	16	35
3,2	1,751	14	36	1,787	14	35	1,822	15	36	1,858	16	36	1,894	16	36
3,3	1,765	14	36	1,801	15	36	1,837	15	37	1,874	15	36	1,910	16	37
3,4	1,779	14	37	1,816	14	36	1,852	15	37	1,889	16	37	1,926	16	37
3,5	1,793	13	37	1,830	14	37	1,867	15	38	1,905	15	38	1,942	16	38
3,6	1,806	14	38	1,844	14	38	1,882	15	38	1,920	15	38	1,958	16	38
3,7	1,820	13	38	1,858	14	39	1,897	14	38	1,935	15	39	1,974	15	38
3,8	1,833	14	39	1,872	14	39	1,911	15	39	1,950	15	40	1,989	16	39
3,9	1,847	13	39	1,886	14	40	1,926	14	39	1,965	15	40	2,005	15	39
4,0	1,860	13	40	1,900	14	40	1,940	14	40	1,980	15	40	2,020	15	40
4,1	1,873	13	41	1,914	13	40	1,954	14	41	1,995	14	41	2,035	15	41
4,2	1,886		41	1,927		41	1,968		41	2,009		41	2,050		41

Digitized by Google

$$\mathcal{V}(z, V_0^2); \quad z = \frac{\alpha' x}{c}, \quad V_0^2 = \frac{\alpha'^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 0{,}50$.			$z = 0{,}52$.			$z = 0{,}54$.			$z = 0{,}56$.			$z = 0{,}58$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,284	25	13	1,297	26	13	1,310	27	13	1,323	28	13	1,336	29	14
0,1	1,309	25	14	1,323	25	14	1,337	26	14	1,351	28	14	1,365	29	15
0,2	1,334	24	14	1,348	25	15	1,363	26	16	1,379	27	15	1,394	28	15
0,3	1,358	23	15	1,373	25	16	1,389	26	17	1,406	26	16	1,422	27	16
0,4	1,381	24	17	1,398	24	17	1,415	25	17	1,432	26	17	1,449	27	17
0,5	1,405	23	17	1,422	24	18	1,440	25	18	1,458	26	18	1,476	27	18
0,6	1,428	22	18	1,446	23	19	1,465	24	19	1,484	25	19	1,503	26	19
0,7	1,450	22	19	1,469	23	20	1,489	24	20	1,509	24	20	1,529	25	19
0,8	1,472	22	20	1,492	23	21	1,513	23	20	1,533	25	21	1,554	25	21
0,9	1,494	22	21	1,515	22	21	1,536	23	22	1,558	24	21	1,579	25	22
1,0	1,516	21	21	1,537	22	22	1,559	23	23	1,582	23	22	1,604	24	22
1,1	1,537	21	22	1,559	22	23	1,582	23	23	1,605	23	23	1,628	24	23
1,2	1,558	21	23	1,581	22	24	1,605	22	23	1,628	23	24	1,652	24	24
1,3	1,579	20	24	1,603	21	24	1,627	22	24	1,651	23	25	1,676	23	24
1,4	1,599	20	25	1,624	21	25	1,649	21	25	1,674	22	25	1,699	23	25
1,5	1,619	20	26	1,645	20	25	1,670	22	26	1,696	22	26	1,722	23	26
1,6	1,639	20	26	1,665	21	27	1,692	21	26	1,718	22	27	1,745	22	26
1,7	1,659	19	27	1,686	20	27	1,713	20	27	1,740	21	27	1,767	22	27
1,8	1,678	19	28	1,706	20	27	1,733	21	28	1,761	21	28	1,789	22	28
1,9	1,697	19	29	1,726	19	28	1,754	20	28	1,782	21	29	1,811	21	29
2,0	1,716	19	29	1,745	20	29	1,774	20	29	1,803	21	29	1,832	22	30
2,1	1,735	19	30	1,765	19	29	1,794	20	30	1,824	20	30	1,854	21	30
2,2	1,754	18	30	1,784	19	30	1,814	20	30	1,844	21	31	1,875	21	30
2,3	1,772	18	31	1,803	19	31	1,834	19	31	1,865	20	31	1,896	20	31
2,4	1,790	18	32	1,822	18	31	1,853	19	32	1,885	20	31	1,916	21	32
2,5	1,808	18	32	1,840	19	32	1,872	19	33	1,905	19	32	1,937	20	32
2,6	1,826	18	33	1,859	18	32	1,891	19	33	1,924	20	33	1,957	20	33
2,7	1,844	17	34	1,877	18	33	1,910	19	34	1,944	19	33	1,977	20	33
2,8	1,861	18	34	1,895	18	34	1,929	18	34	1,963	19	34	1,997	19	34
2,9	1,879	17	35	1,913	18	34	1,947	19	35	1,982	19	34	2,016	20	35
3,0	1,896	17	35	1,931	17	35	1,966	18	35	2,001	18	35	2,036	19	35
3,1	1,913	17	35	1,948	18	36	1,984	18	35	2,019	19	36	2,055	19	36
3,2	1,930	17	36	1,966	17	36	2,002	18	36	2,038	18	36	2,074	19	36
3,3	1,947	16	36	1,983	17	37	2,020	17	36	2,056	18	37	2,093	18	37
3,4	1,963	17	37	2,000	17	37	2,037	18	37	2,074	18	37	2,111	19	38
3,5	1,980	16	37	2,017	17	38	2,055	17	37	2,092	18	38	2,130	18	38
3,6	1,996	16	38	2,034	17	38	2,072	17	38	2,110	18	38	2,148	19	39
3,7	2,012	16	39	2,051	16	38	2,089	17	39	2,128	17	39	2,167	18	38
3,8	2,028	16	39	2,067	17	39	2,106	17	39	2,145	18	40	2,185	18	39
3,9	2,044	16	40	2,084	16	39	2,123	17	40	2,163	17	40	2,203	17	39
4,0	2,060	16	40	2,100	16	40	2,140	17	40	2,180	17	40	2,220	18	41
4,1	2,076	16	40	2,116	16	41	2,157	16	40	2,197	17	41	2,238	17	41
4,2	2,091	15	41	2,132	16	41	2,173	16	41	2,214	17	41	2,255	17	42

Digitized by Google

	$z = 0{,}60$.			$z = 0{,}62$.			$z = 0{,}64$.			$z = 0{,}66$.			$z = 0{,}68$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,350	30	13	1,363	31	14	1,377	32	14	1,391	33	14	1,405	34	14
0,1	1,380	29	14	1,394	31	15	1,409	32	15	1,424	33	15	1,439	34	15
0,2	1,409	29	16	1,425	30	16	1,441	31	16	1,457	31	16	1,473	32	16
0,3	1,438	28	17	1,455	29	17	1,472	30	16	1,488	31	17	1,505	32	17
0,4	1,466	28	18	1,484	29	18	1,502	29	17	1,519	31	18	1,537	32	18
0,5	1,494	28	19	1,513	28	18	1,531	29	19	1,550	30	19	1,569	30	19
0,6	1,522	26	19	1,541	27	19	1,560	29	20	1,580	29	19	1,599	30	20
0,7	1,548	27	20	1,568	28	21	1,589	28	20	1,609	29	20	1,629	30	21
0,8	1,575	26	21	1,596	26	21	1,617	27	21	1,638	28	21	1,659	29	22
0,9	1,601	25	21	1,622	26	22	1,644	27	22	1,666	28	22	1,688	29	23
1,0	1,626	25	22	1,648	26	23	1,671	27	23	1,694	27	23	1,717	28	23
1,1	1,651	25	23	1,674	26	24	1,698	26	23	1,721	27	24	1,745	28	24
1,2	1,676	24	24	1,700	25	24	1,724	26	24	1,748	27	25	1,773	27	24
1,3	1,700	24	25	1,725	25	25	1,750	25	25	1,775	26	25	1,800	27	25
1,4	1,724	24	26	1,750	24	25	1,775	25	26	1,801	26	26	1,827	26	26
1,5	1,748	23	26	1,774	24	26	1,800	25	27	1,827	25	26	1,853	26	27
1,6	1,771	23	27	1,798	24	27	1,825	24	27	1,852	25	27	1,879	26	28
1,7	1,794	23	28	1,822	23	27	1,849	24	28	1,877	25	28	1,905	25	28
1,8	1,817	23	28	1,845	23	28	1,873	24	29	1,902	24	28	1,930	25	29
1,9	1,840	22	28	1,868	23	29	1,897	24	29	1,926	24	29	1,955	25	30
2,0	1,862	22	29	1,891	23	30	1,921	23	30	1,950	24	30	1,980	25	30
2,1	1,884	21	30	1,914	22	30	1,944	23	30	1,974	24	31	2,005	24	30
2,2	1,905	22	31	1,936	22	31	1,967	23	31	1,998	23	31	2,029	24	31
2,3	1,927	21	31	1,958	22	32	1,990	22	32	2,021	23	32	2,053	23	31
2,4	1,948	21	32	1,980	21	32	2,012	22	32	2,044	23	32	2,076	24	33
2,5	1,969	21	32	2,001	22	33	2,034	22	33	2,067	22	33	2,100	23	33
2,6	1,990	20	33	2,023	21	33	2,056	22	33	2,089	23	34	2,123	23	33
2,7	2,010	21	34	2,044	21	34	2,078	21	34	2,112	22	34	2,146	22	34
2,8	2,031	20	34	2,065	21	34	2,099	21	35	2,134	21	34	2,168	22	35
2,9	2,051	20	35	2,086	20	34	2,120	21	35	2,155	22	35	2,190	22	36
3,0	2,071	20	35	2,106	20	35	2,141	21	36	2,177	21	35	2,212	22	36
3,1	2,091	19	35	2,126	20	36	2,162	21	36	2,198	21	36	2,234	22	37
3,2	2,110	20	36	2,146	20	37	2,183	20	37	2,219	21	37	2,256	22	37
3,3	2,130	19	36	2,166	20	37	2,203	21	37	2,240	21	38	2,278	21	37
3,4	2,149	19	37	2,186	20	38	2,224	20	37	2,261	21	38	2,299	21	38
3,5	2,168	19	38	2,206	20	38	2,244	20	38	2,282	20	38	2,320	21	38
3,6	2,187	18	38	2,225	19	39	2,264	19	38	2,302	20	39	2,341	21	39
3,7	2,205	19	39	2,244	19	39	2,283	20	39	2,322	20	40	2,362	20	39
3,8	2,224	19	39	2,263	19	40	2,303	19	40	2,342	20	41	2,382	21	40
3,9	2,242	18	40	2,282	19	40	2,322	20	40	2,362	20	41	2,403	20	40
4,0	2,261	18	40	2,301	19	41	2,342	19	40	2,382	20	41	2,423	20	40
4,1	2,279	18	41	2,320	18	41	2,361	18	42	2,402	19	42	2,443	20	41
4,2	2,297			2,338			2,379			2,421			2,463		

Digitized by Google

	$z = 0{,}70$.			$z = 0{,}72$.			$z = 0{,}74$.			$z = 0{,}76$.			$z = 0{,}78$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,419	35	14	1,433	36	15	1,448	37	14	1,462	38	15	1,477	39	15
0,1	1,454	35	15	1,469	36	16	1,485	36	15	1,500	38	16	1,516	39	16
0,2	1,489	33	16	1,505	35	16	1,521	36	17	1,538	37	17	1,555	37	17
0,3	1,522	33	18	1,540	34	17	1,557	35	18	1,575	35	17	1,592	37	18
0,4	1,555	33	19	1,574	33	18	1,592	34	18	1,610	35	19	1,629	36	19
0,5	1,588	31	19	1,607	32	19	1,626	33	19	1,645	35	20	1,665	35	20
0,6	1,619	31	20	1,639	32	20	1,659	33	21	1,680	33	20	1,700	34	21
0,7	1,650	31	21	1,671	31	21	1,692	32	21	1,713	33	21	1,734	34	22
0,8	1,681	30	21	1,702	31	22	1,724	32	22	1,746	32	22	1,768	33	22
0,9	1,711	29	22	1,733	30	23	1,756	31	22	1,778	32	23	1,801	33	23
1,0	1,740	29	23	1,763	30	24	1,787	30	23	1,810	31	24	1,834	32	24
1,1	1,769	28	24	1,793	29	24	1,817	30	24	1,841	31	25	1,866	31	24
1,2	1,797	28	25	1,822	29	25	1,847	29	25	1,872	30	25	1,897	31	25
1,3	1,825	28	26	1,851	28	25	1,876	29	26	1,902	30	26	1,928	30	26
1,4	1,853	27	26	1,879	28	26	1,905	29	27	1,932	29	26	1,958	30	27
1,5	1,880	27	27	1,907	27	27	1,934	28	27	1,961	29	27	1,988	30	28
1,6	1,907	26	27	1,934	27	28	1,962	28	28	1,990	28	28	2,018	29	28
1,7	1,933	26	28	1,961	27	29	1,990	27	28	2,018	28	29	2,047	29	29
1,8	1,959	26	29	1,988	26	29	2,017	27	29	2,046	28	30	2,076	28	29
1,9	1,985	25	29	2,014	26	30	2,044	27	30	2,074	27	30	2,104	28	30
2,0	2,010	25	30	2,040	26	31	2,071	26	30	2,101	27	31	2,132	27	30
2,1	2,035	25	31	2,066	25	31	2,097	26	31	2,128	26	31	2,159	27	32
2,2	2,060	24	31	2,091	25	32	2,123	26	31	2,154	27	32	2,186	27	33
2,3	2,084	25	32	2,116	25	33	2,149	25	32	2,181	26	32	2,213	27	33
2,4	2,109	24	32	2,141	25	33	2,174	25	33	2,207	25	33	2,240	26	33
2,5	2,133	23	33	2,166	24	33	2,199	25	33	2,232	26	34	2,266	26	34
2,6	2,156	24	34	2,190	24	34	2,224	24	34	2,258	25	34	2,292	26	34
2,7	2,180	23	34	2,214	24	34	2,248	24	35	2,283	25	35	2,318	25	35
2,8	2,203	23	35	2,238	23	34	2,272	24	36	2,308	24	35	2,343	25	36
2,9	2,226	22	35	2,261	23	35	2,296	24	36	2,332	24	36	2,368	25	36
3,0	2,248	23	36	2,284	23	36	2,320	24	36	2,356	24	37	2,393	24	36
3,1	2,271	22	36	2,307	23	37	2,344	23	36	2,380	24	37	2,417	25	37
3,2	2,293	22	37	2,330	23	37	2,367	23	37	2,404	24	38	2,442	24	38
3,3	2,315	22	38	2,353	22	37	2,390	23	38	2,428	23	38	2,466	24	38
3,4	2,337	21	38	2,375	22	38	2,413	23	38	2,451	23	39	2,490	23	38
3,5	2,358	22	39	2,397	22	39	2,436	22	39	2,474	23	39	2,513	24	39
3,6	2,380	21	39	2,419	22	39	2,458	22	40	2,497	23	40	2,537	23	40
3,7	2,401	21	40	2,441	21	39	2,480	22	40	2,520	22	40	2,560	23	41
3,8	2,422	21	40	2,462	21	40	2,502	22	41	2,542	23	41	2,583	23	41
3,9	2,443	20	40	2,483	21	41	2,524	22	41	2,565	22	41	2,606	22	42
4,0	2,463	21	41	2,504	21	42	2,546	21	42	2,587	22	42	2,628	23	42
4,1	2,484	20	41	2,525	21	42	2,567	21	42	2,609	21	43	2,651	22	42
4,2	2,504		42	2,546		42	2,588		42	2,630			2,673		

Digitized by Google

	$z = 0{,}80$.			$z = 0{,}82$.			$z = 0{,}84$.			$z = 0{,}86$.			$z = 0{,}88$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,492	40	15	1,507	41	15	1,522	42	15	1,537	44	16	1,553	44	15
0,1	1,532	40	16	1,548	41	17	1,564	42	17	1,581	43	16	1,597	44	17
0,2	1,572	38	17	1,589	39	17	1,606	40	18	1,624	41	17	1,641	42	18
0,3	1,610	38	18	1,628	39	18	1,646	40	19	1,665	40	18	1,683	42	19
0,4	1,648	37	19	1,667	38	19	1,686	39	19	1,705	40	20	1,725	40	19
0,5	1,685	36	20	1,705	36	20	1,725	37	20	1,745	39	20	1,765	40	21
0,6	1,721	35	20	1,741	36	21	1,762	37	22	1,784	37	21	1,805	39	21
0,7	1,756	34	21	1,777	36	22	1,799	36	22	1,821	37	22	1,843	38	23
0,8	1,790	34	23	1,813	35	22	1,835	36	23	1,858	37	23	1,881	38	24
0,9	1,824	34	24	1,848	34	23	1,871	35	24	1,895	35	24	1,919	36	24
1,0	1,858	32	24	1,882	33	24	1,906	34	24	1,930	35	25	1,955	36	25
1,1	1,890	32	25	1,915	33	25	1,940	34	25	1,965	35	26	1,991	35	25
1,2	1,922	32	26	1,948	32	26	1,974	33	27	2,000	34	26	2,026	34	26
1,3	1,954	31	26	1,980	32	27	2,007	32	28	2,034	33	27	2,060	34	27
1,4	1,985	31	27	2,012	31	27	2,039	32	29	2,067	33	28	2,094	34	28
1,5	2,016	30	28	2,043	31	28	2,071	32	29	2,100	32	29	2,128	33	28
1,6	2,046	30	29	2,074	31	29	2,103	31	29	2,132	31	29	2,161	32	29
1,7	2,076	29	30	2,105	30	29	2,134	31	30	2,163	32	30	2,193	32	30
1,8	2,105	29	30	2,135	29	30	2,165	30	31	2,195	31	30	2,225	31	30
1,9	2,134	28	30	2,164	29	31	2,195	30	31	2,226	30	30	2,256	31	31
2,0	2,162	29	31	2,193	29	32	2,225	29	32	2,256	30	31	2,287	31	32
2,1	2,191	28	31	2,222	29	32	2,254	29	32	2,286	30	32	2,318	30	32
2,2	2,219	27	32	2,251	28	32	2,283	29	33	2,316	29	32	2,348	30	33
2,3	2,246	27	33	2,279	27	33	2,312	28	34	2,345	29	33	2,378	30	34
2,4	2,273	27	33	2,306	28	34	2,340	28	34	2,374	28	34	2,408	29	34
2,5	2,300	26	34	2,334	27	34	2,368	27	35	2,402	28	35	2,437	29	35
2,6	2,326	27	35	2,361	27	35	2,395	28	35	2,430	28	36	2,466	28	36
2,7	2,353	26	35	2,388	26	36	2,423	27	36	2,458	28	36	2,494	28	37
2,8	2,379	25	36	2,414	26	37	2,450	27	36	2,486	27	37	2,522	28	37
2,9	2,404	25	37	2,440	26	37	2,477	26	37	2,513	27	38	2,550	28	37
3,0	2,429	25	38	2,466	26	37	2,503	26	38	2,540	27	38	2,578	27	38
3,1	2,454	25	38	2,492	25	38	2,529	26	38	2,567	26	39	2,605	27	38
3,2	2,479	25	38	2,517	25	39	2,555	26	38	2,593	26	39	2,632	26	39
3,3	2,504	24	39	2,542	25	39	2,581	25	39	2,619	26	40	2,658	27	39
3,4	2,528	24	40	2,567	25	39	2,606	25	40	2,645	26	40	2,685	26	40
3,5	2,552	24	40	2,592	24	40	2,631	25	40	2,671	25	41	2,711	26	40
3,6	2,576	24	40	2,616	24	40	2,656	25	41	2,696	25	41	2,737	25	41
3,7	2,600	24	40	2,640	24	41	2,681	24	41	2,721	25	42	2,762	26	41
3,8	2,624	23	41	2,664	24	41	2,705	24	42	2,746	25	42	2,788	25	42
3,9	2,647	23	41	2,688	23	42	2,729	24	43	2,771	25	43	2,813	25	43
4,0	2,670	23	42	2,711	24	42	2,753	24	43	2,796	24	43	2,838	25	43
4,1	2,693	22	43	2,735	23	43	2,777	24	43	2,820	24	43	2,863	24	44
4,2	2,715			2,758			2,801			2,844			2,887		

Digitized by Google

$$\mathcal{V}(z, V_0^2);\ z = \frac{\alpha x}{c},\ V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 0{,}90$.			$z = 0{,}92$.			$z = 0{,}94$.			$z = 0{,}96$.			$z = 0{,}98$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,568	46	16	1,584	47	16	1,600	48	16	1,616	49	16	1,632	50	17
0,1	1,614	45	17	1,631	46	17	1,648	47	17	1,665	48	17	1,682	49	18
0,2	1,659	43	18	1,677	44	18	1,695	45	18	1,713	46	18	1,731	48	19
0,3	1,702	42	19	1,721	43	19	1,740	44	19	1,759	45	20	1,779	46	19
0,4	1,744	42	20	1,764	43	20	1,784	43	20	1,804	44	21	1,825	45	20
0,5	1,786	40	21	1,807	41	20	1,827	43	21	1,848	44	22	1,870	44	21
0,6	1,826	40	22	1,848	40	22	1,870	41	22	1,892	42	22	1,914	43	22
0,7	1,866	39	22	1,888	40	23	1,911	40	23	1,934	41	23	1,957	42	23
0,8	1,905	38	23	1,928	39	23	1,951	40	24	1,975	40	24	1,999	41	24
0,9	1,943	37	24	1,967	38	24	1,991	39	24	2,015	40	25	2,040	40	25
1,0	1,980	36	25	2,005	37	25	2,030	38	25	2,055	39	25	2,080	40	26
1,1	2,016	36	26	2,042	37	26	2,068	37	26	2,094	38	26	2,120	39	26
1,2	2,052	35	27	2,079	36	26	2,105	37	27	2,132	37	27	2,159	38	27
1,3	2,087	35	28	2,115	35	27	2,142	36	27	2,169	37	28	2,197	38	28
1,4	2,122	34	28	2,150	35	28	2,178	36	28	2,206	37	29	2,235	37	28
1,5	2,156	34	29	2,185	34	29	2,214	35	29	2,243	35	29	2,272	36	29
1,6	2,190	33	29	2,219	34	30	2,249	34	29	2,278	35	30	2,308	36	30
1,7	2,223	32	30	2,253	33	30	2,283	34	30	2,313	35	31	2,344	35	31
1,8	2,255	32	31	2,286	33	31	2,317	33	31	2,348	34	31	2,379	35	32
1,9	2,287	32	32	2,319	32	31	2,350	33	32	2,382	34	32	2,414	34	32
2,0	2,319	32	32	2,351	32	32	2,383	33	33	2,416	33	32	2,448	34	33
2,1	2,350	31	33	2,383	32	33	2,416	33	33	2,449	33	33	2,482	34	33
2,2	2,381	31	33	2,414	31	34	2,448	32	33	2,481	32	34	2,515	33	34
2,3	2,412	30	33	2,445	31	34	2,479	31	34	2,513	32	35	2,548	33	35
2,4	2,442	29	34	2,476	30	35	2,511	32	34	2,545	32	35	2,580	32	36
2,5	2,471	30	35	2,506	30	36	2,542	31	35	2,577	32	35	2,612	32	36
2,6	2,501	29	35	2,536	30	36	2,572	30	36	2,608	31	36	2,644	32	36
2,7	2,530	29	36	2,566	29	36	2,602	30	37	2,639	31	36	2,675	31	37
2,8	2,559	28	36	2,595	29	37	2,632	30	37	2,669	30	37	2,706	31	38
2,9	2,587	28	37	2,624	29	38	2,662	29	37	2,699	30	38	2,737	31	38
3,0	2,615	28	38	2,653	29	38	2,691	29	38	2,729	29	38	2,767	30	39
3,1	2,643	27	38	2,681	28	39	2,720	28	38	2,758	29	39	2,797	30	39
3,2	2,670	27	39	2,709	28	39	2,748	28	39	2,787	29	40	2,827	29	40
3,3	2,697	27	40	2,737	27	39	2,776	28	40	2,816	29	40	2,856	29	40
3,4	2,724	27	40	2,764	27	40	2,804	28	41	2,845	28	40	2,885	29	41
3,5	2,751	26	40	2,791	27	41	2,832	27	41	2,873	28	41	2,914	28	41
3,6	2,777	26	41	2,818	27	41	2,859	27	42	2,901	27	41	2,942	28	42
3,7	2,803	26	42	2,845	26	41	2,886	27	42	2,928	28	42	2,970	28	43
3,8	2,829	26	42	2,871	26	42	2,913	27	43	2,956	27	42	2,998	28	43
3,9	2,855	26	42	2,897	26	43	2,940	26	43	2,983	27	43	3,026	27	43
4,0	2,881	25	42	2,923	26	43	2,966	27	44	3,010	26	43	3,053	27	44
4,1	2,906	25	43	2,949	26	44	2,993	26	43	3,036	27	44	3,080	27	45
4,2	2,931		44	2,975		44	3,019		44	3,063		44	3,107		45

Digitized by Google

	$z = 1{,}00$.			$z = 1{,}02$.			$z = 1{,}04$.			$z = 1{,}06$.			$z = 1{,}08$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,649		16	1,665		17	1,682		17	1,699		17	1,716		17
		51			52			53			54			56	
0,1	1,700		17	1,717		18	1,735		18	1,753		19	1,772		18
		50			51			52			53			54	
0,2	1,750		18	1,768		19	1,787		19	1,806		20	1,826		19
		48			50			51			52			52	
0,3	1,798		20	1,818		20	1,838		20	1,858		20	1,878		21
		47			48			49			50			51	
0,4	1,845		21	1,866		21	1,887		21	1,908		21	1,929		22
		46			47			48			49			50	
0,5	1,891		22	1,913		22	1,935		22	1,957		22	1,979		22
		45			46			47			48			49	
0,6	1,936		23	1,959		23	1,982		23	2,005		23	2,028		23
		44			44			45			46			47	
0,7	1,980		23	2,003		24	2,027		24	2,051		24	2,075		24
		43			44			45			45			46	
0,8	2,023		24	2,047		25	2,072		24	2,096		25	2,121		25
		42			43			43			45			46	
0,9	2,065		25	2,090		25	2,115		26	2,141		26	2,167		26
		41			42			43			44			44	
1,0	2,106		26	2,132		26	2,158		27	2,185		26	2,211		27
		40			41			42			42			44	
1,1	2,146		27	2,173		27	2,200		27	2,227		28	2,255		27
		40			41			41			42			42	
1,2	2,186		28	2,214		27	2,241		28	2,269		28	2,297		29
		39			39			41			41			42	
1,3	2,225		28	2,253		29	2,282		28	2,310		29	2,339		29
		38			39			40			41			42	
1,4	2,263		29	2,292		30	2,322		29	2,351		30	2,381		29
		38			39			39			40			40	
1,5	2,301		30	2,331		30	2,361		30	2,391		30	2,421		30
		37			38			38			39			40	
1,6	2,338		31	2,369		30	2,399		31	2,430		31	2,461		31
		37			37			38			38			39	
1,7	2,375		31	2,406		31	2,437		31	2,468		32	2,500		32
		36			36			37			38			39	
1,8	2,411		31	2,442		32	2,474		32	2,506		33	2,539		32
		35			36			37			38			38	
1,9	2,446		32	2,478		33	2,511		33	2,544		33	2,577		33
		35			36			36			37			37	
2,0	2,481		33	2,514		33	2,547		34	2,581		33	2,614		34
		34			35			36			36			37	
2,1	2,515		34	2,549		34	2,583		34	2,617		34	2,651		35
		34			34			35			35			36	
2,2	2,549		34	2,583		35	2,618		34	2,652		35	2,687		36
		34			34			34			36			36	
2,3	2,583		34	2,617		35	2,652		36	2,688		35	2,723		36
		33			34			35			35			36	
2,4	2,616		35	2,651		36	2,687		36	2,723		36	2,759		36
		32			33			34			34			35	
2,5	2,648		36	2,684		37	2,721		36	2,757		37	2,794		37
		32			33			33			34			35	
2,6	2,680		37	2,717		37	2,754		37	2,791		38	2,829		37
		32			33			33			34			34	
2,7	2,712		38	2,750		37	2,787		38	2,825		38	2,863		38
		32			32			33			33			33	
2,8	2,744		38	2,782		38	2,820		38	2,858		38	2,896		39
		31			31			32			33			34	
2,9	2,775		38	2,813		39	2,852		39	2,891		39	2,930		39
		31			32			32			32			33	
3,0	2,806		39	2,845		39	2,884		39	2,923		40	2,963		40
		30			31			31			32			33	
3,1	2,836		40	2,876		39	2,915		40	2,955		41	2,996		40
		30			30			31			32			32	
3,2	2,866		40	2,906		40	2,946		41	2,987		41	3,028		41
		30			31			31			31			32	
3,3	2,896		41	2,937		40	2,977		41	3,018		42	3,060		41
		30			30			31			31			31	
3,4	2,926		41	2,967		41	3,008		41	3,049		42	3,091		42
		29			30			30			31			32	
3,5	2,955		42	2,997		41	3,038		42	3,080		43	3,123		42
		29			29			30			31			31	
3,6	2,984		42	3,026		42	3,068		43	3,111		43	3,154		43
		29			29			30			30			30	
3,7	3,013		42	3,055		43	3,098		43	3,141		43	3,184		44
		28			29			29			30			31	
3,8	3,041		43	3,084		43	3,127		44	3,171		44	3,215		44
		28			29			29			29			30	
3,9	3,069		44	3,113		43	3,156		44	3,200		45	3,245		44
		28			28			29			30			30	
4,0	3,097		44	3,141		44	3,185		45	3,230		45	3,275		45
		28			28			29			29			29	
4,1	3,125		44	3,169		45	3,214		45	3,259		45	3,304		46
		27			28			28			29			30	
4,2	3,152		45	3,197		45	3,242		46	3,288		46	3,334		46

Digitized by Google

$$\mathcal{V}(z, V_0^2); \quad z = \frac{\alpha x}{c}, \quad V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 1{,}10$.			$z = 1{,}12$.			$z = 1{,}14$.			$z = 1{,}16$.			$z = 1{,}18$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,733			1,751			1,768			1,786			1,804		
		57	18		58	17		59	18		60	18		61	18
0,1	1,790		19	1,809		18	1,827		19	1,846		19	1,865		19
		55			56			57			58			59	
0,2	1,845		20	1,865		19	1,884		20	1,904		20	1,924		21
		54			54			56			57			58	
0,3	1,899		20	1,919		21	1,940		21	1,961		21	1,982		22
		52			53			54			55			56	
0,4	1,951		21	1,972		22	1,994		22	2,016		22	2,038		23
		50			52			53			54			55	
0,5	2,001		23	2,024		23	2,047		23	2,070		23	2,093		23
		50			51			51			52			53	
0,6	2,051		24	2,075		23	2,098		24	2,122		24	2,146		25
		48			49			50			51			52	
0,7	2,099		25	2,124		24	2,148		25	2,173		25	2,198		25
		47			48			49			50			51	
0,8	2,146		26	2,172		25	2,197		26	2,223		26	2,249		26
		47			47			48			49			50	
0,9	2,193		26	2,219		26	2,245		27	2,272		27	2,299		27
		45			46			47			47			48	
1,0	2,238		27	2,265		27	2,292		27	2,319		28	2,347		28
		44			45			46			47			48	
1,1	2,282		28	2,310		28	2,338		28	2,366		29	2,395		28
		44			44			45			46			46	
1,2	2,326		28	2,354		29	2,383		29	2,412		29	2,441		29
		42			43			44			45			46	
1,3	2,368		29	2,397		30	2,427		30	2,457		30	2,487		30
		42			43			43			44			45	
1,4	2,410		30	2,440		30	2,470		31	2,501		31	2,532		31
		41			42			43			43			44	
1,5	2,451		31	2,482		31	2,513		31	2,544		32	2,576		32
		41			41			42			43			43	
1,6	2,492		31	2,523		32	2,555		32	2,587		32	2,619		33
		40			41			41			42			43	
1,7	2,532		32	2,564		32	2,596		33	2,629		33	2,662		33
		39			40			41			41			42	
1,8	2,571		33	2,604		33	2,637		33	2,670		34	2,704		34
		39			39			40			41			41	
1,9	2,610		33	2,643		34	2,677		34	2,711		34	2,745		35
		38			39			40			40			41	
2,0	2,648		34	2,682		35	2,717		34	2,751		35	2,786		35
		38			39			39			40			40	
2,1	2,686		35	2,721		35	2,756		35	2,791		35	2,826		36
		37			37			38			39			40	
2,2	2,723		35	2,758		36	2,794		36	2,830		36	2,866		36
		36			37			38			38			39	
2,3	2,759		36	2,795		37	2,832		36	2,868		37	2,905		37
		36			37			37			38			39	
2,4	2,795		37	2,832		37	2,869		37	2,906		38	2,944		37
		36			36			37			38			38	
2,5	2,831		37	2,868		38	2,906		38	2,944		38	2,982		38
		35			36			36			37			37	
2,6	2,866		38	2,904		38	2,942		39	2,981		38	3,019		39
		35			35			36			36			37	
2,7	2,901		38	2,939		39	2,978		39	3,017		39	3,056		40
		34			35			36			36			37	
2,8	2,935		39	2,974		40	3,014		39	3,053		40	3,093		40
		34			35			35			36			36	
2,9	2,969		40	3,009		40	3,049		40	3,089		40	3,129		41
		34			34			34			35			36	
3,0	3,003		40	3,043		40	3,083		41	3,124		41	3,165		41
		33			34			35			35			35	
3,1	3,036		41	3,077		41	3,118		41	3,159		41	3,200		42
		33			33			34			34			35	
3,2	3,069		41	3,110		42	3,152		41	3,193		42	3,235		43
		32			33			33			34			35	
3,3	3,101		42	3,143		42	3,185		42	3,227		43	3,270		43
		32			33			33			34			34	
3,4	3,133		43	3,176		42	3,218		43	3,261		43	3,304		44
		32			32			33			34			34	
3,5	3,165		43	3,208		43	3,251		44	3,295		43	3,338		44
		32			32			33			33			34	
3,6	3,197		43	3,240		44	3,284		44	3,328		44	3,372		44
		31			32			32			32			33	
3,7	3,228		44	3,272		44	3,316		44	3,360		45	3,405		45
		31			31			32			33			33	
3,8	3,259		44	3,303		45	3,348		45	3,393		45	3,438		46
		30			31			32			32			33	
3,9	3,289		45	3,334		46	3,380		45	3,425		46	3,471		46
		31			31			31			32			32	
4,0	3,320		45	3,365		46	3,411		46	3,457		46	3,503		47
		30			31			31			31			32	
4,1	3,350		46	3,396		46	3,442		46	3,488		47	3,535		47
		30			30			31			32			32	
4,2	3,380		46	3,426		47	3,473		47	3,520		47	3,567		47

Digitized by Google

	$z = 1{,}20$.			$z = 1{,}22$.			$z = 1{,}24$.			$z = 1{,}26$.			$z = 1{,}28$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,822	62	18	1,840	64	19	1,859	65	18	1,877	66	19	1,896	67	20
0,1	1,884	61	20	1,904	62	20	1,924	62	19	1,943	64	20	1,963	65	21
0,2	1,945	59	21	1,966	60	20	1,986	61	21	2,007	62	21	2,028	64	22
0,3	2,004	57	22	2,026	58	21	2,047	59	22	2,069	60	23	2,092	61	22
0,4	2,061	55	23	2,084	56	22	2,106	58	23	2,129	59	24	2,153	59	23
0,5	2,116	55	24	2,140	55	24	2,164	56	24	2,188	57	24	2,212	58	25
0,6	2,171	52	24	2,195	54	25	2,220	55	25	2,245	56	25	2,270	57	26
0,7	2,223	52	26	2,249	52	26	2,275	53	26	2,301	54	26	2,327	55	26
0,8	2,275	51	26	2,301	52	27	2,328	52	27	2,355	53	27	2,382	54	27
0,9	2,326	49	27	2,353	50	27	2,380	51	28	2,408	52	28	2,436	53	28
1,0	2,375	48	28	2,403	49	28	2,431	50	29	2,460	51	29	2,489	51	29
1,1	2,423	47	29	2,452	48	29	2,481	49	30	2,511	49	29	2,540	51	30
1,2	2,470	47	30	2,500	47	30	2,530	48	30	2,560	49	31	2,591	49	30
1,3	2,517	46	30	2,547	47	31	2,578	47	31	2,609	48	31	2,640	49	32
1,4	2,563	45	31	2,594	46	31	2,625	47	32	2,657	47	32	2,689	48	32
1,5	2,608	44	32	2,640	45	32	2,672	45	32	2,704	46	33	2,737	47	33
1,6	2,652	43	33	2,685	44	32	2,717	45	33	2,750	46	34	2,784	46	34
1,7	2,695	43	34	2,729	43	33	2,762	44	34	2,796	45	34	2,830	46	35
1,8	2,738	42	34	2,772	43	34	2,806	44	35	2,841	44	35	2,876	45	35
1,9	2,780	41	35	2,815	42	35	2,850	43	35	2,885	44	36	2,921	44	35
2,0	2,821	41	36	2,857	41	36	2,893	42	36	2,929	42	36	2,965	43	36
2,1	2,862	40	36	2,898	41	37	2,935	41	37	2,971	42	37	3,008	43	37
2,2	2,902	40	37	2,939	40	37	2,976	41	37	3,013	42	38	3,051	42	38
2,3	2,942	39	37	2,979	40	38	3,017	41	38	3,055	41	38	3,093	42	39
2,4	2,981	39	38	3,019	40	39	3,058	40	38	3,096	41	39	3,135	41	39
2,5	3,020	38	39	3,059	38	39	3,098	39	39	3,137	40	39	3,176	41	40
2,6	3,058	38	39	3,097	39	40	3,137	39	40	3,177	39	40	3,217	40	40
2,7	3,096	37	40	3,136	38	40	3,176	38	40	3,216	39	41	3,257	40	41
2,8	3,133	37	41	3,174	37	40	3,214	38	41	3,255	39	42	3,297	39	41
2,9	3,170	36	41	3,211	37	41	3,252	38	42	3,294	38	42	3,336	38	42
3,0	3,206	36	42	3,248	36	42	3,290	37	42	3,332	37	42	3,374	38	43
3,1	3,242	36	42	3,284	36	43	3,327	36	42	3,369	38	43	3,412	38	44
3,2	3,278	35	42	3,320	36	43	3,363	37	44	3,407	37	43	3,450	38	44
3,3	3,313	35	43	3,356	36	44	3,400	36	44	3,444	36	44	3,488	37	44
3,4	3,348	34	44	3,392	35	44	3,436	35	44	3,480	36	45	3,525	37	45
3,5	3,382	34	45	3,427	34	44	3,471	35	45	3,516	36	46	3,562	36	46
3,6	3,416	34	45	3,461	35	45	3,506	35	46	3,552	35	46	3,598	36	46
3,7	3,450	34	46	3,496	34	45	3,541	35	46	3,587	35	47	3,634	35	46
3,8	3,484	33	46	3,530	33	46	3,576	34	46	3,622	35	47	3,669	35	47
3,9	3,517	33	46	3,563	34	47	3,610	34	47	3,657	34	47	3,704	35	48
4,0	3,550	32	47	3,597	33	47	3,644	33	47	3,691	34	48	3,739	35	49
4,1	3,582	32	48	3,630	32	47	3,677	34	48	3,725	34	49	3,774	34	49
4,2	3,614		48	3,662		49	3,711		48	3,759		49	3,808		50

Digitized by Google

$$\mathcal{V}(z, V_0^2);\ z = \frac{\alpha x}{c},\ V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 1{,}30$.			$z = 1{,}32$.			$z = 1{,}34$.			$z = 1{,}36$.			$z = 1{,}38$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,916	68	19	1,985	69	19	1,954	71	20	1,974	72	20	1,994	73	20
0,1	1,984	66	20	2,004	67	21	2,025	68	21	2,046	69	21	2,067	70	21
0,2	2,050	64	21	2,071	66	22	2,093	67	22	2,115	68	22	2,137	69	23
0,3	2,114	62	23	2,137	63	23	2,160	64	23	2,183	65	23	2,206	66	24
0,4	2,176	61	24	2,200	61	24	2,224	62	24	2,248	64	24	2,272	65	25
0,5	2,237	59	24	2,261	60	25	2,286	61	26	2,312	62	25	2,337	63	25
0,6	2,296	57	25	2,321	59	26	2,347	59	27	2,374	60	26	2,400	61	26
0,7	2,353	56	27	2,380	57	26	2,406	58	28	2,434	59	27	2,461	60	27
0,8	2,409	55	28	2,437	56	27	2,464	57	29	2,493	57	28	2,521	58	28
0,9	2,464	54	28	2,493	54	28	2,521	55	29	2,550	56	29	2,579	57	29
1,0	2,518	52	29	2,547	53	29	2,576	54	30	2,606	55	30	2,636	56	30
1,1	2,570	51	30	2,600	52	30	2,630	54	31	2,661	54	31	2,692	55	31
1,2	2,621	51	31	2,652	52	32	2,684	52	31	2,715	53	32	2,747	53	32
1,3	2,672	49	32	2,704	50	32	2,736	51	32	2,768	52	32	2,800	53	33
1,4	2,721	49	33	2,754	49	33	2,787	50	33	2,820	51	33	2,853	52	33
1,5	2,770	48	33	2,803	49	34	2,837	49	34	2,871	50	34	2,905	50	34
1,6	2,818	47	34	2,852	47	34	2,886	48	35	2,921	49	34	2,955	50	35
1,7	2,865	46	34	2,899	47	35	2,934	48	36	2,970	48	35	3,005	49	36
1,8	2,911	45	35	2,946	46	36	2,982	47	36	3,018	48	36	3,054	49	37
1,9	2,956	45	36	2,992	46	37	3,029	46	37	3,066	47	37	3,103	47	37
2,0	3,001	44	37	3,038	45	37	3,075	46	38	3,113	46	37	3,150	47	38
2,1	3,045	44	38	3,083	44	38	3,121	45	38	3,159	45	38	3,197	46	39
2,2	3,089	43	38	3,127	44	39	3,166	44	38	3,204	45	39	3,243	46	40
2,3	3,132	42	39	3,171	43	39	3,210	43	39	3,249	44	40	3,289	45	40
2,4	3,174	42	40	3,214	42	39	3,253	43	40	3,293	44	41	3,334	44	41
2,5	3,216	41	40	3,256	42	40	3,296	43	41	3,337	43	41	3,378	44	42
2,6	3,257	41	41	3,298	41	41	3,339	42	41	3,380	43	42	3,422	43	42
2,7	3,298	40	41	3,339	41	42	3,381	41	42	3,423	42	42	3,465	43	43
2,8	3,338	40	42	3,380	40	42	3,422	41	43	3,465	41	43	3,508	42	43
2,9	3,378	39	42	3,420	40	43	3,463	41	43	3,506	41	44	3,550	41	44
3,0	3,417	39	43	3,460	40	44	3,504	40	43	3,547	41	44	3,591	42	45
3,1	3,456	38	44	3,500	39	44	3,544	39	44	3,588	40	45	3,633	41	45
3,2	3,494	38	45	3,539	38	45	3,583	39	46	3,628	40	46	3,674	40	46
3,3	3,532	38	45	3,577	38	45	3,622	39	46	3,668	39	46	3,714	40	46
3,4	3,570	37	45	3,615	38	46	3,661	38	46	3,707	39	47	3,754	39	46
3,5	3,607	37	46	3,653	37	46	3,699	38	47	3,746	39	47	3,793	39	47
3,6	3,644	36	46	3,690	37	47	3,737	38	48	3,785	38	47	3,832	39	48
3,7	3,680	36	47	3,727	37	48	3,775	37	48	3,823	37	48	3,871	38	48
3,8	3,716	36	48	3,764	36	48	3,812	37	49	3,860	38	49	3,909	38	49
3,9	3,752	36	48	3,800	36	49	3,849	36	49	3,898	37	49	3,947	37	49
4,0	3,788	35	48	3,836	36	49	3,885	36	50	3,935	36	50	3,984	37	50
4,1	3,823	35	49	3,872	35	49	3,921	36	50	3,971	36	50	4,021	37	51
4,2	3,858			3,907		50	3,957		50	4,007		51	4,058		51

Digitized by Google

	$z = 1{,}40$.			$z = 1{,}42$.			$z = 1{,}44$.			$z = 1{,}46$.			$z = 1{,}48$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	2,014	74	20	2,034	75	20	2,054	77	21	2,075	78	21	2,096	79	21
0,1	2,088	72	21	2,109	73	22	2,131	74	22	2,153	75	22	2,175	77	22
0,2	2,160	70	22	2,182	71	23	2,205	72	23	2,228	73	24	2,252	74	23
0,3	2,230	67	23	2,253	69	24	2,277	70	24	2,301	71	25	2,326	72	25
0,4	2,297	65	25	2,322	66	25	2,347	68	25	2,372	69	26	2,398	70	26
0,5	2,362	64	26	2,388	65	27	2,415	66	26	2,441	67	27	2,468	68	26
0,6	2,426	62	27	2,453	63	28	2,481	63	27	2,508	65	28	2,536	65	27
0,7	2,488	61	28	2,516	62	28	2,544	63	29	2,573	63	28	2,601	65	29
0,8	2,549	59	29	2,578	60	29	2,607	61	29	2,636	62	30	2,666	63	30
0,9	2,608	58	30	2,638	59	30	2,668	60	30	2,698	61	31	2,729	61	31
1,0	2,666	57	31	2,697	58	31	2,728	58	31	2,759	59	31	2,790	60	32
1,1	2,723	56	32	2,755	56	31	2,786	57	32	2,818	58	32	2,850	59	33
1,2	2,779	54	32	2,811	55	32	2,843	56	33	2,876	57	33	2,909	58	34
1,3	2,833	53	33	2,866	54	33	2,899	55	34	2,933	56	34	2,967	57	34
1,4	2,886	53	34	2,920	54	34	2,954	55	35	2,989	55	35	3,024	55	35
1,5	2,939	51	35	2,974	52	35	3,009	53	35	3,044	53	35	3,079	55	36
1,6	2,990	51	36	3,026	51	36	3,062	52	35	3,097	53	37	3,134	53	36
1,7	3,041	50	36	3,077	51	37	3,114	51	36	3,150	52	37	3,187	53	38
1,8	3,091	49	37	3,128	50	37	3,165	50	37	3,202	51	38	3,240	52	38
1,9	3,140	48	38	3,178	49	37	3,215	50	38	3,253	51	39	3,292	51	39
2,0	3,188	48	39	3,227	48	38	3,265	49	39	3,304	50	39	3,343	51	40
2,1	3,236	47	39	3,275	47	39	3,314	48	40	3,354	49	40	3,394	49	40
2,2	3,283	46	39	3,322	47	40	3,362	48	41	3,403	48	40	3,443	49	41
2,3	3,329	46	40	3,369	46	41	3,410	47	41	3,451	48	41	3,492	49	42
2,4	3,375	45	40	3,415	46	42	3,457	46	42	3,499	47	42	3,541	47	42
2,5	3,420	44	41	3,461	45	42	3,503	46	43	3,546	46	42	3,588	47	43
2,6	3,464	44	42	3,506	45	43	3,549	45	43	3,592	46	43	3,635	47	44
2,7	3,508	43	43	3,551	44	43	3,594	45	44	3,638	45	44	3,682	45	44
2,8	3,551	43	44	3,595	43	44	3,639	44	44	3,683	44	44	3,727	45	45
2,9	3,594	42	44	3,638	43	45	3,683	43	44	3,727	44	45	3,772	45	46
3,0	3,636	42	45	3,681	42	45	3,726	43	45	3,771	44	46	3,817	44	46
3,1	3,678	41	45	3,723	42	46	3,769	42	46	3,815	43	46	3,861	44	47
3,2	3,719	41	46	3,765	41	46	3,811	42	47	3,858	43	47	3,905	43	47
3,3	3,760	40	46	3,806	41	47	3,853	42	48	3,901	42	47	3,948	43	48
3,4	3,800	40	47	3,847	41	48	3,895	41	48	3,943	41	48	3,991	42	49
3,5	3,840	40	48	3,888	40	48	3,936	41	48	3,984	42	49	4,033	42	50
3,6	3,880	39	48	3,928	40	49	3,977	40	49	4,026	41	49	4,075	42	50
3,7	3,919	39	49	3,968	39	49	4,017	40	50	4,067	40	50	4,117	41	50
3,8	3,958	38	49	4,007	39	50	4,057	39	50	4,107	40	51	4,158	40	51
3,9	3,996	38	50	4,046	39	50	4,096	40	51	4,147	40	51	4,198	40	52
4,0	4,034	38	51	4,085	38	51	4,136	38	51	4,187	39	51	4,238	40	52
4,1	4,072	37	51	4,123	38	51	4,174	39	52	4,226	39	52	4,278	40	53
4,2	4,109		52	4,161		52	4,213		52	4,265		53	4,318		53

Digitized by Google

	$z = 1{,}50$.			$z = 1{,}52$.			$z = 1{,}54$.			$z = 1{,}56$.			$z = 1{,}58$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	2,117	80	21	2,138	82	22	2,160	83	21	2,181	85	22	2,203	86	23
0,1	2,197	78	23	2,220	79	23	2,243	80	23	2,266	81	23	2,289	83	23
0,2	2,275	76	24	2,299	77	24	2,323	78	24	2,347	79	25	2,372	80	24
0,3	2,351	73	25	2,376	74	25	2,401	75	25	2,426	76	26	2,452	77	25
0,4	2,424	70	26	2,450	71	26	2,476	73	26	2,502	74	27	2,529	75	27
0,5	2,494	69	27	2,521	70	28	2,549	71	27	2,576	72	28	2,604	73	28
0,6	2,563	67	28	2,591	68	29	2,620	69	28	2,648	70	29	2,677	71	29
0,7	2,630	66	29	2,659	67	30	2,689	67	29	2,718	68	30	2,748	69	30
0,8	2,696	64	30	2,726	65	30	2,756	66	30	2,786	67	31	2,817	68	31
0,9	2,760	62	31	2,791	63	31	2,822	64	31	2,853	65	32	2,885	66	32
1,0	2,822	61	32	2,854	62	32	2,886	63	32	2,918	64	33	2,951	65	33
1,1	2,883	60	33	2,916	60	33	2,949	61	33	2,982	63	34	3,016	63	34
1,2	2,943	58	33	2,976	60	34	3,010	61	35	3,045	61	34	3,079	62	35
1,3	3,001	58	35	3,036	58	35	3,071	59	35	3,106	60	35	3,141	61	36
1,4	3,059	56	35	3,094	57	36	3,130	58	36	3,166	58	36	3,202	59	36
1,5	3,115	55	36	3,151	56	37	3,188	57	36	3,224	58	37	3,261	59	38
1,6	3,170	55	37	3,207	56	38	3,245	56	37	3,282	57	38	3,320	58	38
1,7	3,225	53	38	3,263	54	38	3,301	55	38	3,339	56	39	3,378	56	39
1,8	3,278	53	39	3,317	53	39	3,356	54	39	3,395	55	39	3,434	56	40
1,9	3,331	52	39	3,370	53	40	3,410	53	40	3,450	54	40	3,490	55	40
2,0	3,383	51	40	3,423	52	40	3,463	53	41	3,504	53	41	3,545	54	41
2,1	3,434	50	41	3,475	51	41	3,516	51	41	3,557	52	42	3,599	53	42
2,2	3,484	50	42	3,526	50	41	3,567	51	42	3,609	52	43	3,652	52	43
2,3	3,534	49	42	3,576	50	42	3,618	51	43	3,661	51	43	3,704	52	44
2,4	3,583	48	43	3,626	49	43	3,669	49	43	3,712	50	44	3,756	51	44
2,5	3,631	48	44	3,675	48	43	3,718	49	44	3,762	50	45	3,807	50	45
2,6	3,679	47	44	3,723	48	44	3,767	49	45	3,812	49	45	3,857	50	46
2,7	3,726	46	45	3,771	47	45	3,816	47	45	3,861	48	46	3,907	49	46
2,8	3,772	46	46	3,818	46	45	3,863	47	46	3,909	48	47	3,956	48	47
2,9	3,818	45	46	3,864	46	46	3,910	47	47	3,957	47	47	4,004	48	48
3,0	3,863	45	47	3,910	45	47	3,957	46	47	4,004	47	48	4,052	47	48
3,1	3,908	44	47	3,955	45	48	4,003	46	48	4,051	46	48	4,099	47	49
3,2	3,952	44	48	4,000	45	49	4,049	45	48	4,097	46	49	4,146	46	49
3,3	3,996	44	49	4,045	44	49	4,094	44	49	4,143	45	49	4,192	46	50
3,4	4,040	43	49	4,089	43	49	4,138	44	50	4,188	44	50	4,238	45	51
3,5	4,083	42	49	4,132	43	50	4,182	44	50	4,232	45	51	4,283	45	52
3,6	4,125	42	50	4,175	43	51	4,226	43	51	4,277	43	51	4,328	44	52
3,7	4,167	42	51	4,218	42	51	4,269	43	51	4,320	44	52	4,372	44	53
3,8	4,209	41	51	4,260	42	52	4,312	42	52	4,364	43	52	4,416	44	53
3,9	4,250	40	52	4,302	41	52	4,354	42	53	4,407	42	53	4,460	43	53
4,0	4,290	41	53	4,343	41	53	4,396	41	53	4,449	42	54	4,503	42	54
4,1	4,331	40	53	4,384	40	53	4,437	41	54	4,491	42	54	4,545	43	55
4,2	4,371		53	4,424		54	4,478		55	4,533		55	4,588		55

Digitized by Google

	$z = 1{,}60$.			$z = 1{,}62$.			$z = 1{,}64$.			$z = 1{,}66$.			$z = 1{,}68$.		
V_0^2	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathcal{V}(z,V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	2,226	86	22	2,248	88	23	2,271	89	22	2,293	91	23	2,316	92	23
0,1	2,312	84	24	2,336	85	24	2,360	86	24	2,384	88	24	2,408	89	25
0,2	2,396	81	25	2,421	83	25	2,446	84	26	2,472	85	25	2,497	86	26
0,3	2,477	79	26	2,503	80	27	2,530	81	27	2,557	82	26	2,583	83	27
0,4	2,556	76	27	2,583	78	28	2,611	78	28	2,639	79	27	2,666	81	28
0,5	2,632	74	29	2,661	75	28	2,689	77	29	2,718	77	29	2,747	79	29
0,6	2,706	72	30	2,736	73	30	2,766	74	29	2,795	76	31	2,826	76	31
0,7	2,778	70	31	2,809	71	31	2,840	72	31	2,871	73	31	2,902	74	32
0,8	2,848	69	32	2,880	70	32	2,912	70	32	2,944	71	32	2,976	73	32
0,9	2,917	67	33	2,950	68	32	2,982	69	33	3,015	70	34	3,049	70	34
1,0	2,984	66	34	3,018	66	33	3,051	67	34	3,085	68	34	3,119	69	34
1,1	3,050	64	34	3,084	65	34	3,118	67	35	3,153	67	35	3,188	68	35
1,2	3,114	63	35	3,149	64	36	3,185	64	35	3,220	66	36	3,256	67	36
1,3	3,177	61	36	3,213	62	36	3,249	63	37	3,286	64	37	3,323	65	37
1,4	3,238	61	37	3,275	62	37	3,312	63	38	3,350	63	38	3,388	64	38
1,5	3,299	59	38	3,337	60	39	3,375	61	38	3,413	62	39	3,452	62	39
1,6	3,358	59	39	3,397	59	39	3,436	60	39	3,475	61	39	3,514	62	40
1,7	3,417	57	39	3,456	58	40	3,496	58	40	3,536	59	40	3,576	60	40
1,8	3,474	56	40	3,514	57	40	3,554	58	41	3,595	59	41	3,636	60	41
1,9	3,530	56	41	3,571	56	41	3,612	57	42	3,654	58	42	3,696	58	42
2,0	3,586	55	41	3,627	56	42	3,669	57	43	3,712	57	42	3,754	58	43
2,1	3,641	54	42	3,683	55	43	3,726	55	43	3,769	56	43	3,812	57	44
2,2	3,695	53	43	3,738	53	43	3,781	55	44	3,825	55	44	3,869	56	44
2,3	3,748	52	43	3,791	53	45	3,836	53	44	3,880	54	45	3,925	55	45
2,4	3,800	52	44	3,844	53	45	3,889	53	45	3,934	54	46	3,980	55	46
2,5	3,852	51	45	3,897	52	45	3,942	53	46	3,988	53	47	4,035	53	46
2,6	3,903	50	46	3,949	51	46	3,995	52	46	4,041	53	47	4,088	54	47
2,7	3,953	50	47	4,000	50	47	4,047	51	47	4,094	52	48	4,142	52	48
2,8	4,003	49	47	4,050	50	48	4,098	50	48	4,146	51	48	4,194	52	49
2,9	4,052	48	48	4,100	49	48	4,148	50	49	4,197	50	49	4,246	51	49
3,0	4,100	48	49	4,149	48	49	4,198	49	49	4,247	50	50	4,297	50	49
3,1	4,148	47	49	4,197	48	50	4,247	49	50	4,297	49	50	4,347	50	51
3,2	4,195	47	50	4,245	48	51	4,296	48	50	4,346	49	51	4,397	50	51
3,3	4,242	47	51	4,293	47	51	4,344	47	51	4,395	48	52	4,447	48	51
3,4	4,289	46	51	4,340	46	51	4,391	47	52	4,443	48	52	4,495	48	52
3,5	4,335	45	51	4,386	46	52	4,438	47	53	4,491	47	52	4,543	48	53
3,6	4,380	45	52	4,432	46	53	4,485	46	53	4,538	47	53	4,591	48	53
3,7	4,425	44	53	4,478	45	53	4,531	46	54	4,585	46	54	4,639	47	54
3,8	4,469	44	54	4,523	44	54	4,577	45	54	4,631	46	55	4,686	46	55
3,9	4,513	44	54	4,567	44	55	4,622	44	55	4,677	45	55	4,732	46	55
4,0	4,557	43	54	4,611	44	55	4,666	45	56	4,722	45	56	4,778	45	56
4,1	4,600	43	55	4,655	44	56	4,711	44	56	4,767	44	56	4,823	45	56
4,2	4,643		56	4,699		56	4,755		56	4,811		57	4,868		57

Digitized by Google

	$z = 0{,}00$.			$z = 0{,}02$.			$z = 0{,}04$.			$z = 0{,}06$.			$z = 0{,}08$.		
V_0^2	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,000	0	5	1,005	0	5	1,010	1	5	1,015	1	5	1,020	2	5
0,1	1,000	0	5	1,005	1	6	1,011	1	5	1,016	2	6	1,022	2	6
0,2	1,000	0	6	1,006	0	6	1,012	1	6	1,018	1	6	1,024	2	6
0,3	1,000	0	6	1,006	1	7	1,013	1	6	1,019	2	7	1,026	2	7
0,4	1,000	0	7	1,007	0	7	1,014	1	7	1,021	1	7	1,028	2	7
0,5	1,000	0	7	1,007	1	8	1,015	1	7	1,022	2	8	1,030	2	8
0,6	1,000	0	8	1,008	0	8	1,016	1	8	1,024	1	8	1,032	2	8
0,7	1,000	0	8	1,008	1	9	1,017	1	8	1,025	2	9	1,034	2	9
0,8	1,000	0	9	1,009	0	9	1,018	1	9	1,027	1	9	1,036	2	9
0,9	1,000	0	9	1,009	1	10	1,019	1	9	1,028	2	10	1,038	2	9
1,0	1,000	0	10	1,010	0	10	1,020	1	10	1,030	1	10	1,040	2	10
1,1	1,000	0	10	1,010	1	11	1,021	1	10	1,031	2	11	1,042	2	10
1,2	1,000	0	11	1,011	0	11	1,022	1	11	1,033	1	11	1,044	2	11
1,3	1,000	0	11	1,011	1	12	1,023	1	11	1,034	2	12	1,046	2	11
1,4	1,000	0	12	1,012	0	12	1,024	1	12	1,036	1	12	1,048	2	12
1,5	1,000	0	12	1,012	1	13	1,025	1	12	1,037	2	13	1,050	2	12
1,6	1,000	0	13	1,013	0	13	1,026	1	13	1,039	1	13	1,052	2	12
1,7	1,000	0	13	1,013	1	14	1,027	1	13	1,040	1	14	1,054	1	13
1,8	1,000	0	14	1,014	0	14	1,028	1	13	1,041	2	14	1,055	2	14
1,9	1,000	0	14	1,014	1	15	1,029	1	14	1,043	2	14	1,057	2	14
2,0	1,000	0	15	1,015	0	15	1,030	1	15	1,045	1	15	1,059	2	15
2,1	1,000	0	15	1,015	1	16	1,031	1	15	1,046	1	15	1,061	2	15
2,2	1,000	0	16	1,016	0	16	1,032	1	15	1,047	2	16	1,063	2	16
2,3	1,000	0	16	1,016	1	17	1,033	1	16	1,049	1	16	1,065	2	16
2,4	1,000	0	17	1,017	0	17	1,034	1	16	1,050	2	17	1,067	2	16
2,5	1,000	0	17	1,017	1	18	1,035	1	17	1,052	1	17	1,069	2	17
2,6	1,000	0	18	1,018	0	18	1,036	0	17	1,053	1	18	1,071	1	17
2,7	1,000	0	18	1,018	1	18	1,036	1	18	1,054	2	18	1,072	2	18
2,8	1,000	0	19	1,019	0	18	1,037	1	19	1,056	1	18	1,074	2	19
2,9	1,000	0	19	1,019	1	19	1,038	1	19	1,057	2	19	1,076	2	19
3,0	1,000	0	20	1,020	0	19	1,039	1	20	1,059	1	19	1,078	2	19
3,1	1,000	0	20	1,020	1	20	1,040	1	20	1,060	1	20	1,080	2	19
3,2	1,000	0	21	1,021	0	20	1,041	1	20	1,061	2	21	1,082	2	20
3,3	1,000	0	21	1,021	1	21	1,042	1	21	1,063	1	21	1,084	1	20
3,4	1,000	0	22	1,022	0	21	1,043	1	21	1,064	2	21	1,085	2	21
3,5	1,000	0	22	1,022	1	22	1,044	1	22	1,066	1	21	1,087	2	22
3,6	1,000	0	23	1,023	0	22	1,045	1	22	1,067	1	22	1,089	2	22
3,7	1,000	0	23	1,023	0	23	1,046	1	22	1,068	2	23	1,091	2	22
3,8	1,000	0	23	1,023	1	24	1,047	1	23	1,070	1	23	1,093	2	22
3,9	1,000	0	24	1,024	0	24	1,048	1	23	1,071	2	24	1,095	2	23
4,0	1,000	0	24	1,024	1	25	1,049	1	24	1,073	1	24	1,097	1	23
4,1	1,000	0	25	1,025	0	25	1,050	0	24	1,074	1	24	1,098	2	24
4,2	1,000		25	1,025		25	1,050		25	1,075		25	1,100		24

Digitized by Google

	$z = 0{,}10$.			$z = 0{,}12$.			$z = 0{,}14$.			$z = 0{,}16$.			$z = 0{,}18$.		
V_0^2	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,025	3	5	1,030	3	5	1,035	4	6	1,041	4	5	1,046	5	5
0,1	1,028	2	5	1,033	3	6	1,039	4	6	1,045	4	6	1,051	4	5
0,2	1,030	3	6	1,036	3	7	1,043	3	6	1,049	4	6	1,055	4	6
0,3	1,033	2	6	1,039	3	7	1,046	3	7	1,053	4	6	1,059	5	7
0,4	1,035	3	7	1,042	3	7	1,049	4	8	1,057	4	7	1,064	4	7
0,5	1,038	2	7	1,045	3	8	1,053	3	8	1,061	4	7	1,068	5	8
0,6	1,040	3	8	1,048	3	8	1,056	4	9	1,065	4	8	1,073	4	8
0,7	1,043	2	8	1,051	3	9	1,060	3	9	1,069	3	8	1,077	5	9
0,8	1,045	2	9	1,054	3	9	1,063	4	9	1,072	4	10	1,082	4	9
0,9	1,047	3	10	1,057	3	10	1,067	3	9	1,076	4	10	1,086	4	9
1,0	1,050	2	10	1,060	3	10	1,070	3	10	1,080	4	10	1,090	4	10
1,1	1,052	3	11	1,063	3	10	1,073	4	11	1,084	4	10	1,094	5	11
1,2	1,055	2	11	1,066	3	11	1,077	3	11	1,088	3	11	1,099	4	11
1,3	1,057	3	12	1,069	3	11	1,080	3	11	1,091	4	12	1,103	4	11
1,4	1,060	2	12	1,072	2	11	1,083	3	12	1,095	4	12	1,107	4	12
1,5	1,062	2	12	1,074	3	12	1,086	4	13	1,099	4	12	1,111	4	12
1,6	1,064	3	13	1,077	3	13	1,090	3	13	1,103	3	12	1,115	4	13
1,7	1,067	2	13	1,080	3	13	1,093	3	13	1,106	4	13	1,119	4	13
1,8	1,069	2	14	1,083	3	13	1,096	4	14	1,110	4	13	1,123	4	14
1,9	1,071	3	15	1,086	3	14	1,100	3	14	1,114	3	13	1,127	5	14
2,0	1,074	2	15	1,089	2	14	1,103	3	14	1,117	4	15	1,132	4	14
2,1	1,076	3	15	1,091	3	15	1,106	4	15	1,121	4	15	1,136	4	14
2,2	1,079	2	15	1,094	3	16	1,110	3	15	1,125	3	15	1,140	4	15
2,3	1,081	2	16	1,097	3	16	1,113	3	15	1,128	4	16	1,144	4	15
2,4	1,083	3	17	1,100	3	16	1,116	3	16	1,132	4	16	1,148	4	16
2,5	1,086	2	17	1,103	2	16	1,119	3	17	1,136	3	16	1,152	4	16
2,6	1,088	2	17	1,105	3	17	1,122	4	17	1,139	4	17	1,156	4	16
2,7	1,090	3	18	1,108	3	18	1,126	3	17	1,143	3	17	1,160	4	17
2,8	1,093	2	18	1,111	2	18	1,129	3	17	1,146	4	18	1,164	4	17
2,9	1,095	2	18	1,113	3	19	1,132	3	18	1,150	3	18	1,168	4	18
3,0	1,097	2	19	1,116	3	19	1,135	3	18	1,153	4	19	1,172	4	18
3,1	1,099	3	20	1,119	3	19	1,138	3	19	1,157	3	19	1,176	4	18
3,2	1,102	2	20	1,122	2	19	1,141	3	19	1,160	4	20	1,180	3	18
3,3	1,104	2	20	1,124	3	20	1,144	3	20	1,164	3	19	1,183	4	20
3,4	1,106	3	21	1,127	3	20	1,147	3	20	1,167	4	20	1,187	4	20
3,5	1,109	2	21	1,130	2	20	1,150	3	21	1,171	3	20	1,191	4	20
3,6	1,111	2	21	1,132	3	21	1,153	3	21	1,174	4	21	1,195	4	20
3,7	1,113	2	22	1,135	2	21	1,156	3	22	1,178	3	21	1,199	3	20
3,8	1,115	3	22	1,137	3	22	1,159	3	22	1,181	3	21	1,202	4	22
3,9	1,118	2	22	1,140	3	22	1,162	3	22	1,184	4	22	1,206	4	22
4,0	1,120	2	23	1,143	2	22	1,165	3	23	1,188	3	22	1,210	4	22
4,1	1,122	2	23	1,145	3	23	1,168	3	23	1,191	3	23	1,214	3	22
4,2	1,124		24	1,148		23	1,171		23	1,194		23	1,217		23

Digitized by Google

	$z = 0{,}20$.			$z = 0{,}22$.			$z = 0{,}24$.			$z = 0{,}26$.			$z = 0{,}28$.		
V_0^2	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,051	5	6	1,057	5	5	1,062	6	6	1,068	6	5	1,073	7	6
0,1	1,056	5	6	1,062	6	6	1,068	6	6	1,074	7	6	1,080	7	6
0,2	1,061	5	7	1,068	6	6	1,074	6	7	1,081	7	6	1,087	7	7
0,3	1,066	5	7	1,073	5	7	1,080	6	7	1,087	6	7	1,094	7	7
0,4	1,071	5	7	1,078	6	8	1,086	6	7	1,093	7	8	1,101	7	7
0,5	1,076	5	8	1,084	5	8	1,092	6	8	1,100	6	8	1,108	6	8
0,6	1,081	5	8	1,089	5	9	1,098	5	8	1,106	6	8	1,114	7	9
0,7	1,086	5	8	1,094	6	9	1,103	6	9	1,112	6	9	1,121	6	9
0,8	1,091	4	9	1,100	5	9	1,109	6	9	1,118	6	9	1,127	7	10
0,9	1,095	5	10	1,105	5	10	1,115	5	9	1,124	6	10	1,134	6	10
1,0	1,100	5	10	1,110	6	10	1,120	6	10	1,130	6	10	1,140	7	10
1,1	1,105	5	11	1,116	5	10	1,126	5	10	1,136	6	11	1,147	6	10
1,2	1,110	4	11	1,121	5	10	1,131	6	11	1,142	6	11	1,153	7	11
1,3	1,114	5	12	1,126	5	11	1,137	6	11	1,148	6	12	1,160	6	11
1,4	1,119	4	12	1,131	5	12	1,143	5	11	1,154	6	12	1,166	6	12
1,5	1,123	5	13	1,136	5	12	1,148	5	12	1,160	6	12	1,172	6	12
1,6	1,128	4	13	1,141	4	12	1,153	6	13	1,166	6	12	1,178	7	13
1,7	1,132	5	13	1,145	5	14	1,159	5	13	1,172	6	13	1,185	6	13
1,8	1,137	4	13	1,150	5	14	1,164	5	14	1,178	5	13	1,191	6	13
1,9	1,141	5	14	1,155	5	14	1,169	6	14	1,183	6	14	1,197	6	14
2,0	1,146	4	14	1,160	5	15	1,175	5	14	1,189	6	14	1,203	6	14
2,1	1,150	5	15	1,165	5	15	1,180	5	15	1,195	5	14	1,209	6	15
2,2	1,155	4	15	1,170	5	15	1,185	5	15	1,200	6	15	1,215	6	15
2,3	1,159	5	16	1,175	5	15	1,190	6	16	1,206	6	15	1,221	6	16
2,4	1,164	4	16	1,180	5	16	1,196	5	16	1,212	5	15	1,227	6	16
2,5	1,168	4	17	1,185	4	16	1,201	5	16	1,217	6	16	1,233	6	17
2,6	1,172	5	17	1,189	5	17	1,206	5	17	1,223	5	16	1,239	6	17
2,7	1,177	4	17	1,194	5	17	1,211	5	17	1,228	6	17	1,245	6	17
2,8	1,181	5	18	1,199	5	17	1,216	5	18	1,234	5	17	1,251	6	17
2,9	1,186	4	18	1,204	4	17	1,221	5	18	1,239	5	18	1,257	5	17
3,0	1,190	4	18	1,208	5	18	1,226	5	18	1,244	6	18	1,262	6	18
3,1	1,194	4	19	1,213	4	18	1,231	5	19	1,250	5	18	1,268	6	18
3,2	1,198	5	19	1,217	5	19	1,236	5	19	1,255	5	19	1,274	5	18
3,3	1,203	4	19	1,222	5	19	1,241	5	19	1,260	6	19	1,279	6	19
3,4	1,207	4	20	1,227	4	19	1,246	5	20	1,266	5	19	1,285	6	19
3,5	1,211	4	20	1,231	5	20	1,251	5	20	1,271	5	20	1,291	5	19
3,6	1,215	4	21	1,236	4	20	1,256	5	20	1,276	6	20	1,296	6	20
3,7	1,219	5	21	1,240	5	21	1,261	5	21	1,282	5	20	1,302	5	20
3,8	1,224	4	21	1,245	4	21	1,266	5	21	1,287	5	20	1,307	6	21
3,9	1,228	4	21	1,249	5	22	1,271	5	21	1,292	5	21	1,313	5	21
4,0	1,232	4	22	1,254	4	22	1,276	4	21	1,297	5	21	1,318	6	22
4,1	1,236	4	22	1,258	5	22	1,280	5	22	1,302	5	22	1,324	5	22
4,2	1,240	4	23	1,263		22	1,285		22	1,307		22	1,329		22

Digitized by Google

	$z = 0{,}30$.			$z = 0{,}32$.			$z = 0{,}34$.			$z = 0{,}36$.			$z = 1{,}38$.		
V_0^2	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,079	7	5	1,084	8	6	1,090	8	5	1,095	9	6	1,101	10	6
0,1	1,086	8	6	1,092	8	6	1,098	9	6	1,104	9	7	1,111	9	6
0,2	1,094	7	6	1,100	8	7	1,107	8	6	1,113	9	7	1,120	9	7
0,3	1,101	7	7	1,108	7	7	1,115	8	7	1,122	9	7	1,129	9	8
0,4	1,108	8	7	1,115	8	8	1,123	8	8	1,131	8	7	1,138	9	8
0,5	1,116	7	7	1,123	8	8	1,131	8	8	1,139	9	8	1,147	9	9
0,6	1,123	7	8	1,131	8	8	1,139	8	9	1,148	8	8	1,156	9	9
0,7	1,130	7	9	1,139	7	8	1,147	8	9	1,156	9	9	1,165	9	9
0,8	1,137	7	9	1,146	7	9	1,155	8	10	1,165	8	9	1,174	9	10
0,9	1,144	6	9	1,153	8	10	1,163	8	10	1,173	8	10	1,183	8	10
1,0	1,150	7	11	1,161	7	10	1,171	8	10	1,181	9	10	1,191	9	11
1,1	1,157	7	11	1,168	7	11	1,179	7	11	1,190	8	10	1,200	9	11
1,2	1,164	7	11	1,175	8	11	1,186	8	12	1,198	8	11	1,209	8	11
1,3	1,171	7	12	1,183	7	11	1,194	8	12	1,206	8	11	1,217	9	12
1,4	1,178	6	12	1,190	7	12	1,202	7	12	1,214	7	12	1,226	8	12
1,5	1,184	7	13	1,197	7	12	1,209	8	12	1,221	8	13	1,234	8	12
1,6	1,191	7	13	1,204	7	13	1,217	7	12	1,229	8	13	1,242	8	13
1,7	1,198	6	13	1,211	7	13	1,224	7	13	1,237	8	13	1,250	8	13
1,8	1,204	7	14	1,218	7	13	1,231	8	14	1,245	8	13	1,258	8	14
1,9	1,211	6	14	1,225	7	14	1,239	7	14	1,253	7	13	1,266	8	14
2,0	1,217	7	15	1,232	7	14	1,246	7	14	1,260	8	14	1,274	8	15
2,1	1,224	6	15	1,239	6	14	1,253	7	15	1,268	7	14	1,282	8	15
2,2	1,230	7	15	1,245	7	15	1,260	8	15	1,275	8	15	1,290	8	15
2,3	1,237	6	15	1,252	7	16	1,268	7	15	1,283	7	15	1,298	8	16
2,4	1,243	7	16	1,259	7	16	1,275	7	15	1,290	8	16	1,306	8	16
2,5	1,250	6	16	1,266	6	16	1,282	7	16	1,298	7	16	1,314	7	16
2,6	1,256	6	16	1,272	7	17	1,289	7	16	1,305	8	16	1,321	8	17
2,7	1,262	6	17	1,279	6	17	1,296	6	17	1,313	7	16	1,329	8	17
2,8	1,268	6	17	1,285	7	17	1,302	7	18	1,320	7	17	1,337	7	17
2,9	1,274	6	18	1,292	6	17	1,309	7	18	1,327	7	17	1,344	8	17
3,0	1,280	6	18	1,298	7	18	1,316	7	18	1,334	7	18	1,352	7	17
3,1	1,286	6	19	1,305	6	18	1,323	6	18	1,341	7	18	1,359	8	18
3,2	1,292	6	19	1,311	6	18	1,329	7	19	1,348	7	19	1,367	7	18
3,3	1,298	6	19	1,317	7	19	1,336	7	19	1,355	7	19	1,374	7	18
3,4	1,304	6	20	1,324	6	19	1,343	6	19	1,362	7	19	1,381	7	19
3,5	1,310	6	20	1,330	6	19	1,349	7	20	1,369	7	19	1,388	7	20
3,6	1,316	6	20	1,336	6	20	1,356	6	20	1,376	6	19	1,395	7	20
3,7	1,322	6	20	1,342	7	20	1,362	7	20	1,382	7	20	1,402	8	20
3,8	1,328	6	21	1,349	6	20	1,369	6	20	1,389	7	21	1,410	7	20
3,9	1,334	6	21	1,355	6	21	1,375	7	21	1,396	7	21	1,417	7	20
4,0	1,340	6	21	1,361	6	21	1,382	6	21	1,403	6	21	1,424	7	21
4,1	1,346	6	21	1,367	6	21	1,388	7	21	1,409	7	22	1,431	7	21
4,2	1,351	5	22	1,373	6	22	1,395		21	1,416		22	1,438		21

Digitized by Google

	$z = 0{,}40$.			$z = 0{,}42$.			$z = 0{,}44$.			$z = 0{,}46$.			$z = 0{,}48$.		
V_0^2	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,107	10	6	1,113	10	5	1,118	11	6	1,124	12	6	1,130	12	6
0,1	1,117	10	6	1,123	10	6	1,129	11	7	1,136	11	6	1,142	12	7
0,2	1,127	10	6	1,133	11	7	1,140	11	7	1,147	11	7	1,154	11	7
0,3	1,137	9	7	1,144	10	7	1,151	11	7	1,158	11	7	1,165	12	8
0,4	1,146	10	8	1,154	10	8	1.162	10	7	1,169	11	8	1,177	11	8
0,5	1,156	9	8	1.164	10	8	1,172	10	8	1,180	11	8	1,188	12	9
0,6	1,165	9	9	1,174	9	8	1,182	11	9	1,191	11	9	1,200	11	9
0,7	1,174	10	9	1,183	10	10	1,193	10	9	1,202	10	9	1,211	11	9
0,8	1,184	9	9	1,193	10	10	1,203	10	9	1,212	11	10	1,222	11	9
0,9	1,193	9	10	1,203	9	10	1,213	9	10	1,223	10	10	1,233	11	10
1,0	1,202	9	10	1,212	10	10	1,222	10	11	1,233	10	11	1,244	10	10
1,1	1,211	9	11	1,222	9	10	1,232	10	11	1,243	10	11	1,254	11	11
1,2	1,220	9	11	1,231	9	11	1,242	10	11	1,253	10	12	1,265	10	11
1,3	1,229	9	11	1,240	9	12	1,252	9	11	1,263	10	12	1,275	11	12
1,4	1,238	8	11	1,249	9	12	1,261	10	12	1,273	10	13	1,286	10	12
1,5	1,246	9	12	1,258	9	13	1,271	9	12	1,283	10	13	1,296	10	12
1,6	1,255	8	12	1,267	9	13	1,280	10	13	1,293	10	13	1,306	10	13
1,7	1,263	9	13	1,276	9	14	1,290	9	13	1,303	9	14	1,316	10	13
1,8	1,272	8	13	1,285	9	14	1,299	9	13	1,312	10	14	1,326	10	14
1,9	1,280	9	14	1,294	9	14	1,308	9	14	1,322	9	14	1,336	10	14
2,0	1,289	8	14	1,303	9	14	1,317	9	14	1,331	10	15	1,346	10	14
2,1	1,297	8	15	1,312	8	14	1,326	9	15	1,341	9	15	1,356	9	15
2,2	1,305	9	15	1,320	9	15	1,335	9	15	1,350	10	15	1,365	10	15
2,3	1,314	8	15	1,329	8	16	1,344	9	16	1,360	9	15	1,375	9	16
2,4	1,322	8	16	1,337	9	16	1,353	9	16	1,369	9	16	1,384	10	16
2,5	1,330	8	16	1,346	8	16	1,362	8	16	1,378	9	16	1,394	9	16
2,6	1,338	8	17	1,354	9	16	1,370	9	17	1,387	9	16	1,403	9	17
2,7	1,346	8	17	1,363	8	17	1,379	9	17	1,396	9	17	1,412	9	17
2,8	1,354	7	17	1,371	8	17	1,388	8	17	1,405	8	16	1,421	10	17
2,9	1,361	8	18	1,379	8	17	1,396	8	17	1,413	9	18	1,431	9	17
3,0	1,369	8	18	1,387	8	17	1,404	9	18	1,422	9	18	1,440	9	18
3,1	1,377	8	18	1,395	8	18	1,413	8	18	1,431	8	18	1,449	9	18
3,2	1,385	7	18	1,403	8	18	1,421	8	18	1,439	9	19	1,458	9	18
3,3	1,392	8	19	1,411	8	18	1,429	8	19	1,448	8	19	1,467	8	19
3,4	1,400	8	19	1,419	8	19	1,437	9	19	1,456	9	19	1,475	9	19
3,5	1,408	7	19	1,427	7	19	1,446	8	19	1,465	8	20	1,484	9	19
3,6	1,415	7	20	1,434	8	20	1,454	8	20	1,473	9	20	1,493	9	19
3,7	1,422	8	20	1,442	8	20	1,462	8	20	1,482	8	20	1,502	8	20
3,8	1,430	7	20	1,450	7	21	1,470	8	20	1,490	9	20	1,510	9	20
3,9	1,437	8	20	1,457	8	21	1,478	8	21	1,499	8	20	1,519	8	21
4,0	1,445	7	21	1,465	8	21	1,486	8	21	1,507	8	21	1,527	9	21
4,1	1,452	7	21	1,473	7	21	1,494	8	21	1,515	8	21	1,536	8	21
4,2	1,459			1,480		22	1,502		21	1,523		21	1,544		

Digitized by Google

	$z = 0{,}50$.			$z = 0{,}52$.			$z = 0{,}54$.			$z = 0{,}56$.			$z = 0{,}58$.		
V_0^2	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,136		6	1,142		6	1,148		6	1,154		6	1,160		6
		13			13			14			14			15	
0,1	1,149		6	1,155		7	1,162		6	1,168		7	1,175		6
		12			13			13			14			14	
0,2	1,161		7	1,168		7	1,175		7	1,182		7	1,189		7
		12			12			13			13			14	
0,3	1,173		7	1,180		8	1,188		7	1,195		8	1,203		7
		12			13			13			14			14	
0,4	1,185		8	1,193		8	1,201		8	1,209		8	1,217		8
		12			12			13			13			13	
0,5	1,197		8	1,205		9	1,214		8	1,222		8	1,230		9
		12			12			12			13			14	
0,6	1,209		8	1,217		9	1,226		9	1,235		9	1,244		9
		11			12			13			13			13	
0,7	1,220		9	1,229		10	1,239		9	1,248		9	1,257		10
		11			12			12			13			13	
0,8	1,231		10	1,241		10	1,251		10	1,261		9	1,270		10
		12			12			12			12			13	
0,9	1,243		10	1,253		10	1,263		10	1,273		10	1,283		11
		11			11			12			13			13	
1,0	1,254		10	1,264		11	1,275		11	1,286		10	1,296		11
		11			12			12			12			13	
1,1	1,265		11	1,276		11	1,287		11	1,298		11	1,309		11
		11			11			11			12			12	
1,2	1,276		11	1,287		11	1,298		12	1,310		11	1,321		12
		11			12			12			12			13	
1,3	1,287		12	1,299		11	1,310		12	1,322		12	1,334		12
		11			11			12			12			12	
1,4	1,298		12	1,310		12	1,322		12	1,334		12	1,346		12
		10			11			11			12			12	
1,5	1,308		13	1,321		12	1,333		13	1,346		12	1,358		13
		11			11			11			11			12	
1,6	1,319		13	1,332		12	1,344		13	1,357		13	1,370		13
		10			10			12			12			12	
1,7	1,329		13	1,342		14	1,356		13	1,369		13	1,382		13
		11			11			11			11			12	
1,8	1,340		13	1,353		14	1,367		13	1,380		14	1,394		13
		10			11			11			12			12	
1,9	1,350		14	1,364		14	1,378		14	1,392		14	1,406		13
		10			10			10			11			11	
2,0	1,360		14	1,374		14	1,388		15	1,403		14	1,417		14
		10			11			11			11			12	
2,1	1,370		15	1,385		14	1,399		15	1,414		15	1,429		14
		10			10			11			11			11	
2,2	1,380		15	1,395		15	1,410		15	1,425		15	1,440		15
		10			10			10			11			11	
2,3	1,390		15	1,405		15	1,420		16	1,436		15	1,451		16
		10			11			11			11			11	
2,4	1,400		16	1,416		15	1,431		16	1,447		15	1,462		16
		10			10			11			11			11	
2,5	1,410		16	1,426		16	1,442		16	1,458		15	1,473		16
		9			10			10			10			11	
2,6	1,419		17	1,436		16	1,452		16	1,468		16	1,484		17
		10			10			10			11			11	
2,7	1,429		17	1,446		16	1,462		17	1,479		16	1,495		17
		9			9			10			10			11	
2,8	1,438		17	1,455		17	1,472		17	1,489		17	1,506		17
		10			10			10			11			11	
2,9	1,448		17	1,465		17	1,482		18	1,500		17	1,517		17
		9			10			10			10			10	
3,0	1,457		18	1,475		17	1,492		18	1,510		17	1,527		18
		10			10			10			10			11	
3,1	1,467		18	1,485		17	1,502		18	1,520		18	1,538		18
		9			9			10			10			10	
3,2	1,476		18	1,494		18	1,512		18	1,530		18	1,548		18
		9			10			10			10			11	
3,3	1,485		19	1,504		18	1,522		18	1,540		18	1,559		18
		9			9			10			10			10	
3,4	1,494		19	1,513		19	1,532		18	1,550		19	1,569		19
		9			9			9			10			10	
3,5	1,503		19	1,522		19	1,541		19	1,560		19	1,579		19
		9			10			10			10			11	
3,6	1,512		20	1,532		19	1,551		19	1,570		20	1,590		19
		9			9			9			10			10	
3,7	1,521		19	1,541		19	1,560		20	1,580		20	1,600		19
		9			9			10			10			10	
3,8	1,530		20	1,550		20	1,570		20	1,590		20	1,610		19
		9			9			10			10			10	
3,9	1,539		20	1,559		21	1,580		20	1,600		20	1,620		20
		9			9			9			9			9	
4,0	1,548		20	1,568		21	1,589		20	1,609		20	1,629		21
		9			9			9			10			10	
4,1	1,557		20	1,577		21	1,598		21	1,619		20	1,639		21
		8			9			9			9			10	
4,2	1,565		21	1,586		21	1,607		21	1,628		21	1,649		21

Digitized by Google

$$\mathfrak{C}(z, V_0^2);\ z = \frac{\alpha x}{c},\ V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 0{,}60$.			$z = 0{,}62$.			$z = 0{,}64$.			$z = 0{,}66$.			$z = 0{,}68$.		
V_0^2	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,166	15	6	1,172	16	6	1,178	16	7	1,185	16	6	1,191	17	6
0,1	1,181	15	7	1,188	15	6	1,194	16	7	1,201	16	7	1,208	17	7
0,2	1,196	14	7	1,203	15	7	1,210	16	7	1,217	16	8	1,225	17	7
0,3	1,210	15	8	1,218	15	8	1,226	15	7	1,233	16	8	1,241	16	8
0,4	1,225	14	8	1,233	14	8	1,241	15	8	1,249	16	8	1,257	16	9
0,5	1,239	14	9	1,247	15	9	1,256	15	9	1,265	15	9	1,273	16	9
0,6	1,253	14	9	1,262	14	9	1,271	15	9	1,280	15	9	1,289	16	9
0,7	1,267	13	9	1,276	14	10	1,286	14	9	1,295	15	10	1,305	15	9
0,8	1,280	14	10	1,290	14	10	1,300	14	10	1,310	15	10	1,320	15	10
0,9	1,294	13	10	1,304	13	10	1,314	14	11	1,325	14	10	1,335	15	10
1,0	1,307	13	10	1,317	14	11	1,328	14	11	1,339	14	11	1,350	14	10
1,1	1,320	13	11	1,331	13	11	1,342	14	11	1,353	14	11	1,364	15	11
1,2	1,333	13	11	1,344	13	12	1,356	13	11	1,367	14	12	1,379	14	11
1,3	1,346	12	11	1,357	13	12	1,369	14	12	1,381	14	12	1,393	14	12
1,4	1,358	13	12	1,370	13	13	1,383	13	12	1,395	14	12	1,407	14	13
1,5	1,371	12	12	1,383	13	13	1,396	13	13	1,409	14	12	1,421	14	13
1,6	1,383	12	13	1,396	13	13	1,409	13	14	1,423	13	12	1,435	14	13
1,7	1,395	12	14	1,409	12	13	1,422	13	14	1,436	13	13	1,449	13	13
1,8	1,407	12	14	1,421	12	14	1,435	13	14	1,449	13	13	1,462	14	14
1,9	1,419	12	14	1,433	13	15	1,448	12	14	1,462	13	14	1,476	13	14
2,0	1,431	12	15	1,446	12	14	1,460	13	15	1,475	13	14	1,489	13	15
2,1	1,443	12	15	1,458	12	15	1,473	12	15	1,488	12	14	1,502	13	15
2,2	1,455	12	15	1,470	12	15	1,485	12	15	1,500	13	15	1,515	13	15
2,3	1,467	11	15	1,482	12	15	1,497	12	16	1,513	12	15	1,528	13	16
2,4	1,478	11	16	1,494	11	15	1,509	12	16	1,525	13	16	1,541	13	16
2,5	1,489	12	16	1,505	12	16	1,521	12	17	1,538	12	16	1,554	12	16
2,6	1,501	11	16	1,517	12	16	1,533	12	17	1,550	12	16	1,566	12	16
2,7	1,512	11	17	1,529	11	16	1,545	12	17	1,562	12	16	1,578	13	17
2,8	1,523	11	17	1,540	11	17	1,557	12	17	1,574	12	17	1,591	12	17
2,9	1,534	11	17	1,551	12	18	1,569	11	18	1,586	12	17	1,603	12	17
3,0	1,545	11	18	1,563	11	17	1,580	12	18	1,598	12	17	1,615	12	18
3,1	1,556	10	18	1,574	11	18	1,592	11	18	1,610	11	17	1,627	12	18
3,2	1,566	11	19	1,585	11	18	1,603	11	18	1,621	12	18	1,639	12	18
3,3	1,577	11	19	1,596	11	18	1,614	11	19	1,633	11	18	1,651	12	18
3,4	1,588	10	19	1,607	10	18	1,625	11	19	1,644	11	19	1,663	11	18
3,5	1,598	11	19	1,617	11	19	1,636	11	19	1,655	12	19	1,674	12	19
3,6	1,609	10	19	1,628	11	19	1,647	11	20	1,667	11	19	1,686	11	19
3,7	1,619	10	20	1,639	10	19	1,658	11	20	1,678	11	19	1,697	12	20
3,8	1,629	11	20	1,649	11	20	1,669	11	20	1,689	11	20	1,709	11	20
3,9	1,640	10	20	1,660	10	20	1,680	11	20	1,700	11	20	1,720	11	20
4,0	1,650	10	20	1,670	11	21	1,691	10	20	1,711	11	20	1,731	11	20
4,1	1,660	10	21	1,681	11	20	1,701	11	21	1,722	11	20	1,742	11	21
4,2	1,670		21	1,691		21	1,712		21	1,733		20	1,753		21

Digitized by Google

	$z = 0{,}70$.			$z = 0{,}72$.			$z = 0{,}74$.			$z = 0{,}76$.			$z = 0{,}78$.		
V_0^2	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,197	18	7	1,204	18	6	1,210	19	6	1,216	19	7	1,223	19	6
0,1	1,215	17	7	1,222	17	7	1,229	18	6	1,235	19	7	1,242	20	7
0,2	1,232	17	7	1,239	18	8	1,247	18	7	1,254	19	8	1,262	19	7
0,3	1,249	17	8	1,257	17	8	1,265	17	8	1,273	18	8	1,281	18	8
0,4	1,266	16	8	1,274	17	8	1,282	18	9	1,291	18	8	1,299	18	9
0,5	1,282	16	9	1,291	16	9	1,300	17	9	1,309	17	9	1,317	18	9
0,6	1,298	16	9	1,307	16	10	1,317	16	10	1,326	17	9	1,335	18	9
0,7	1,314	16	9	1,323	17	10	1,333	17	10	1,343	17	10	1,353	17	9
0,8	1,330	15	10	1,340	16	10	1,350	16	10	1,360	17	10	1,370	17	10
0,9	1,345	15	11	1,356	15	10	1,366	16	11	1,377	16	10	1,387	17	11
1,0	1,360	15	11	1,371	16	11	1,382	16	11	1,393	16	11	1,404	17	11
1,1	1,375	15	12	1,387	15	11	1,398	16	11	1,409	16	12	1,421	16	11
1,2	1,390	15	12	1,402	15	12	1,414	15	11	1,425	16	12	1,437	16	12
1,3	1,405	15	12	1,417	15	12	1,429	15	12	1,441	16	12	1,453	16	13
1,4	1,420	14	12	1,432	15	12	1,444	15	13	1,457	16	12	1,469	16	13
1,5	1,434	14	13	1,447	15	12	1,459	15	14	1,473	15	12	1,485	16	13
1,6	1,448	14	14	1,462	14	12	1,474	15	14	1,488	15	13	1,501	15	13
1,7	1,462	14	14	1,476	14	13	1,489	15	14	1,503	15	13	1,516	16	14
1,8	1,476	14	14	1,490	14	14	1,504	14	14	1,518	15	14	1,532	15	14
1,9	1,490	14	14	1,504	14	14	1,518	14	15	1,533	14	14	1,547	15	14
2,0	1,504	13	14	1,518	14	14	1,532	14	15	1,547	15	15	1,562	15	14
2,1	1,517	13	15	1,532	13	14	1,546	14	16	1,562	14	15	1,577	14	14
2,2	1,530	14	15	1,545	14	15	1,560	14	16	1,576	14	15	1,591	15	15
2,3	1,544	13	15	1,559	13	15	1,574	14	16	1,590	14	16	1,606	14	15
2,4	1,557	13	15	1,572	14	16	1,588	14	16	1,604	14	16	1,620	14	16
2,5	1,570	12	16	1,586	13	16	1,602	13	16	1,618	14	16	1,634	14	17
2,6	1,582	13	17	1,599	13	16	1,615	13	17	1,632	13	16	1,648	14	17
2,7	1,595	13	17	1,612	13	16	1,628	14	17	1,645	14	17	1,662	14	17
2,8	1,608	12	17	1,625	12	17	1,642	13	17	1,659	13	17	1,676	14	17
2,9	1,620	13	17	1,637	13	18	1,655	13	17	1,672	13	18	1,690	13	17
3,0	1,633	12	17	1,650	13	18	1,668	13	17	1,685	14	18	1,703	14	18
3,1	1,645	12	18	1,663	12	18	1,681	12	18	1,699	13	18	1,717	13	18
3,2	1,657	12	18	1,675	13	18	1,693	13	19	1,712	13	18	1,730	13	18
3,3	1,669	12	19	1,688	12	18	1,706	13	19	1,725	13	18	1,743	13	19
3,4	1,681	12	19	1,700	12	19	1,719	12	19	1,738	12	18	1,756	13	19
3,5	1,693	12	19	1,712	12	20	1,731	13	19	1,750	13	19	1,769	13	20
3,6	1,705	12	19	1,724	12	20	1,744	12	19	1,763	12	20	1,782	13	20
3,7	1,717	12	19	1,736	12	20	1,756	12	20	1,775	13	20	1,795	13	20
3,8	1,729	11	20	1,748	12	20	1,768	12	20	1,788	12	21	1,808	13	20
3,9	1,740	11	20	1,760	12	20	1,780	12	20	1,800	13	20	1,821	12	20
4,0	1,751	12	21	1,772	12	20	1,792	12	21	1,813	12	21	1,833	13	20
4,1	1,763	11	21	1,784	11	20	1,804	12	21	1,825	12	21	1,846	12	20
4,2	1,774		21	1,795		21	1,816		21	1,837		21	1,858		21

Digitized by Google

$$\mathfrak{T}(z, V_0^2);\quad z = \frac{\alpha x}{c},\quad V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 0{,}80$.			$z = 0{,}82$.			$z = 0{,}84$.			$z = 0{,}86$.			$z = 0{,}88$.		
V_0^2	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,229	20	7	1,236	21	7	1,243	21	6	1,249	22	7	1,256	22	7
0,1	1,249	20	8	1,257	20	7	1,264	20	7	1,271	21	7	1,278	22	7
0,2	1,269	20	8	1,277	20	7	1,284	21	8	1,292	21	8	1,300	21	7
0,3	1,289	19	8	1,297	19	8	1,305	20	8	1,313	20	8	1,321	21	8
0,4	1,308	18	8	1,316	19	9	1,325	19	8	1,333	20	9	1,342	20	9
0,5	1,326	18	9	1,335	19	9	1,344	19	9	1,353	20	9	1,362	20	10
0,6	1,344	18	10	1,354	18	9	1,363	19	10	1,373	19	9	1,382	20	10
0,7	1,362	18	10	1,372	18	10	1,382	19	10	1,392	19	10	1,402	20	10
0,8	1,380	18	10	1,390	18	11	1,401	18	11	1,411	19	11	1,422	19	10
0,9	1,398	17	10	1,408	18	11	1,419	18	11	1,430	19	11	1,441	19	11
1,0	1,415	17	11	1,426	18	11	1,437	18	12	1,449	18	11	1,460	19	11
1,1	1,432	17	12	1,444	17	12	1,455	18	12	1,467	18	12	1,479	18	12
1,2	1,449	17	12	1,461	17	12	1,473	17	12	1,485	18	12	1,497	18	12
1,3	1,466	16	12	1,478	17	12	1,490	17	13	1,503	17	12	1,515	18	12
1,4	1,482	16	13	1,495	16	12	1,507	17	13	1,520	17	13	1,533	17	12
1,5	1,498	16	13	1,511	17	13	1,524	17	13	1,537	17	13	1,550	18	13
1,6	1,514	16	14	1,528	16	13	1,541	17	13	1,554	17	14	1,568	17	13
1,7	1,530	16	14	1,544	16	14	1,558	16	13	1,571	17	14	1,585	17	14
1,8	1,546	15	14	1,560	16	14	1,574	16	14	1,588	16	14	1,602	16	14
1,9	1,561	15	15	1,576	15	14	1,590	16	14	1,604	17	14	1,618	17	15
2,0	1,576	15	15	1,591	16	15	1,606	16	15	1,621	16	15	1,635	17	15
2,1	1,591	15	16	1,607	15	15	1,622	15	15	1,637	16	15	1,652	16	15
2,2	1,606	15	16	1,622	15	15	1,637	15	16	1,653	15	15	1,668	16	15
2,3	1,621	15	17	1,637	15	15	1,652	16	16	1,668	16	16	1,684	16	16
2,4	1,636	15	16	1,652	15	16	1,668	15	16	1,684	15	16	1,700	16	16
2,5	1,651	14	16	1,667	14	16	1,683	15	16	1,699	15	17	1,716	15	16
2,6	1,665	14	16	1,681	15	17	1,698	15	17	1,714	16	17	1,731	16	17
2,7	1,679	14	17	1,696	14	17	1,713	14	17	1,730	14	17	1,747	15	17
2,8	1,693	14	17	1,710	15	17	1,727	15	17	1,744	15	18	1,762	15	17
2,9	1,707	14	18	1,725	14	17	1,742	14	18	1,759	15	18	1,777	15	18
3,0	1,721	14	18	1,739	14	18	1,756	15	18	1,774	15	18	1,792	15	18
3,1	1,735	13	18	1,753	13	18	1,771	14	18	1,789	14	18	1,807	15	18
3,2	1,748	14	18	1,766	14	19	1,785	14	18	1,803	14	19	1,822	14	18
3,3	1,762	13	18	1,780	14	19	1,799	14	18	1,817	15	19	1,836	15	19
3,4	1,775	13	19	1,794	13	19	1,813	14	19	1,832	14	19	1,851	14	19
3,5	1,788	14	19	1,807	14	20	1,827	14	19	1,846	14	19	1,865	14	20
3,6	1,802	13	19	1,821	13	20	1,841	13	20	1,860	14	19	1,879	14	20
3,7	1,815	13	19	1,834	14	20	1,854	14	20	1,874	14	19	1,893	14	20
3,8	1,828	13	20	1,848	13	20	1,868	13	20	1,888	13	20	1,907	14	21
3,9	1,841	12	20	1,861	13	20	1,881	13	21	1,901	14	20	1,921	14	21
4,0	1,853	13	21	1,874	13	20	1,894	13	21	1,915	13	21	1,935	14	21
4,1	1,866	13	21	1,887	13	20	1,907	13	21	1,928	13	21	1,949	13	21
4,2	1,879			1,900			1,920			1,941			1,962		

Digitized by Google

	$z = 0{,}90$.			$z = 0{,}92$.			$z = 0{,}94$.			$z = 0{,}96$.			$z = 0{,}98$.		
V_0^2	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,263	22	7	1,270	23	7	1,277	23	6	1,283	24	7	1,290	25	7
0,1	1,285	22	8	1,293	22	7	1,300	23	7	1,307	24	8	1,315	24	7
0,2	1,307	22	8	1,315	22	8	1,323	23	8	1,331	23	8	1,339	24	8
0,3	1,329	22	8	1,337	22	9	1,346	22	8	1,354	23	9	1,363	23	8
0,4	1,351	21	8	1,359	22	9	1,368	22	9	1,377	22	9	1,386	23	9
0,5	1,372	20	9	1,381	21	9	1,390	22	9	1,399	22	10	1,409	22	9
0,6	1,392	20	10	1,402	21	10	1,412	21	9	1,421	22	10	1,431	22	10
0,7	1,412	20	11	1,423	20	10	1,433	20	10	1,443	21	10	1,453	22	10
0,8	1,432	20	11	1,443	20	11	1,453	21	11	1,464	21	11	1,475	21	10
0,9	1,452	19	11	1,463	19	11	1,474	20	11	1,485	20	11	1,496	21	11
1,0	1,471	19	11	1,482	20	12	1,494	20	11	1,505	20	12	1,517	20	11
1,1	1,490	19	12	1,502	19	12	1,514	19	12	1,525	20	12	1,537	20	12
1,2	1,509	18	12	1,521	19	12	1,533	19	12	1,545	20	12	1,557	20	13
1,3	1,527	18	13	1,540	18	12	1,552	19	13	1,565	19	12	1,577	20	13
1,4	1,545	18	13	1,558	19	13	1,571	19	13	1,584	19	13	1,597	20	13
1,5	1,563	18	14	1,577	18	13	1,590	18	13	1,603	19	14	1,617	19	13
1,6	1,581	18	14	1,595	18	13	1,608	18	14	1,622	19	14	1,636	19	14
1,7	1,599	17	14	1,613	17	14	1,626	18	15	1,641	18	14	1,655	18	14
1,8	1,616	17	14	1,630	18	14	1,644	18	15	1,659	18	14	1,673	19	15
1,9	1,633	17	15	1,648	17	14	1,662	18	15	1,677	18	15	1,692	18	15
2,0	1,650	17	15	1,665	17	15	1,680	17	16	1,695	18	15	1,710	18	15
2,1	1,667	16	15	1,682	17	15	1,697	17	16	1,713	17	16	1,728	18	15
2,2	1,683	17	16	1,699	17	15	1,714	17	16	1,730	17	16	1,746	17	15
2,3	1,700	16	16	1,716	16	15	1,731	17	16	1,747	17	16	1,763	18	16
2,4	1,716	16	16	1,732	17	15	1,748	17	16	1,764	17	17	1,781	17	16
2,5	1,732	16	17	1,749	16	16	1,765	17	16	1,781	17	17	1,798	17	17
2,6	1,748	16	17	1,765	16	17	1,782	16	17	1,798	17	17	1,815	17	17
2,7	1,764	15	17	1,781	15	17	1,798	16	18	1,815	17	17	1,832	17	17
2,8	1,779	16	17	1,796	16	18	1,814	16	18	1,832	16	17	1,849	17	17
2,9	1,795	15	18	1,812	16	18	1,830	16	18	1,848	16	18	1,866	16	18
3,0	1,810	15	18	1,828	15	18	1,846	15	19	1,864	16	18	1,882	16	19
3,1	1,825	15	18	1,843	15	18	1,861	16	19	1,880	16	18	1,898	16	19
3,2	1,840	15	19	1,858	15	18	1,877	15	19	1,896	15	19	1,914	16	19
3,3	1,855	15	19	1,874	15	19	1,892	16	19	1,911	16	19	1,930	16	19
3,4	1,870	14	19	1,889	14	19	1,908	15	19	1,927	15	19	1,946	16	19
3,5	1,884	15	19	1,903	15	20	1,923	15	19	1,942	15	20	1,962	15	20
3,6	1,899	14	19	1,918	15	20	1,938	15	20	1,957	16	20	1,977	16	20
3,7	1,913	14	20	1,933	14	20	1,953	14	20	1,973	15	20	1,993	15	20
3,8	1,927	15	20	1,947	15	20	1,967	15	21	1,988	15	20	2,008	15	21
3,9	1,942	14	20	1,962	14	20	1,982	15	21	2,003	15	20	2,023	15	21
4,0	1,956	14	20	1,976	14	21	1,997	14	21	2,018	14	20	2,038	15	21
4,1	1,970	13	20	1,990	14	21	2,011	15	21	2,032	15	21	2,053	15	21
4,2	1,983		21	2,004		22	2,026		21	2,047		21	2,068		21

Digitized by Google

	$z = 1{,}00$.			$z = 1{,}02$.			$z = 1{,}04$.			$z = 1{,}06$.			$z = 1{,}08$.		
V_0^2	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,297	25	7	1,304	26	8	1,312	26	7	1,319	26	7	1,326	27	7
0,1	1,322	25	8	1,330	25	8	1,338	25	7	1,345	26	8	1,353	27	8
0,2	1,347	24	8	1,355	25	8	1,363	25	8	1,371	26	9	1,380	26	8
0,3	1,371	24	9	1,380	24	8	1,388	25	9	1,397	25	9	1,406	25	9
0,4	1,395	23	9	1,404	24	9	1,413	24	9	1,422	25	9	1,431	25	10
0,5	1,418	23	10	1,428	23	9	1,437	24	10	1,447	24	9	1,456	25	10
0,6	1,441	22	10	1,451	23	10	1,461	23	10	1,471	24	10	1,481	24	10
0,7	1,463	22	11	1,474	22	10	1,484	23	11	1,495	23	10	1,505	24	11
0,8	1,485	22	11	1,496	22	11	1,507	22	11	1,518	23	11	1,529	23	11
0,9	1,507	21	11	1,518	22	11	1,529	22	12	1,541	22	11	1,552	23	12
1,0	1,528	21	12	1,540	21	11	1,551	22	12	1,563	22	12	1,575	23	12
1,1	1,549	21	12	1,561	21	12	1,573	22	12	1,585	22	13	1,598	22	12
1,2	1,570	20	12	1,582	21	13	1,595	21	12	1,607	22	13	1,620	22	12
1,3	1,590	20	13	1,603	20	13	1,616	20	13	1,629	21	13	1,642	21	12
1,4	1,610	20	13	1,623	20	13	1,636	21	14	1,650	21	13	1,663	21	13
1,5	1,630	20	13	1,643	20	14	1,657	20	14	1,671	20	13	1,684	21	14
1,6	1,650	19	13	1,663	20	14	1,677	20	14	1,691	20	14	1,705	21	14
1,7	1,669	19	14	1,683	19	14	1,697	20	14	1,711	20	15	1,726	20	14
1,8	1,688	19	14	1,702	19	15	1,717	19	14	1,731	20	15	1,746	20	15
1,9	1,707	18	14	1,721	19	15	1,736	19	15	1,751	20	15	1,766	20	15
2,0	1,725	18	15	1,740	19	15	1,755	19	16	1,771	19	16	1,786	20	15
2,1	1,743	18	16	1,759	18	15	1,774	19	16	1,790	19	16	1,806	19	15
2,2	1,761	18	16	1,777	18	16	1,793	19	16	1,809	19	16	1,825	19	16
2,3	1,779	18	16	1,795	18	17	1,812	18	16	1,828	18	16	1,844	19	17
2,4	1,797	18	16	1,813	18	17	1,830	18	16	1,846	19	17	1,863	19	17
2,5	1,815	17	16	1,831	18	17	1,848	18	17	1,865	18	17	1,882	19	17
2,6	1,832	17	17	1,849	18	17	1,866	18	17	1,883	18	18	1,901	18	17
2,7	1,849	17	18	1,867	17	17	1,884	18	17	1,901	18	18	1,919	18	17
2,8	1,866	17	18	1,884	17	18	1,902	17	18	1,919	18	18	1,937	18	18
2,9	1,883	17	18	1,891	17	18	1,919	17	19	1,937	18	18	1,955	18	18
3,0	1,900	17	18	1,918	17	18	1,936	17	19	1,955	17	18	1,973	18	18
3,1	1,917	16	18	1,935	17	18	1,953	17	19	1,972	17	19	1,991	17	18
3,2	1,933	16	19	1,952	16	18	1,970	17	19	1,989	17	19	2,008	17	19
3,3	1,949	16	19	1,968	17	19	1,987	17	19	2,006	17	19	2,025	17	20
3,4	1,965	16	20	1,985	16	19	2,004	16	19	2,023	17	19	2,042	17	20
3,5	1,981	16	20	2,001	16	19	2,020	16	20	2,040	16	20	2,059	17	20
3,6	1,997	16	20	2,017	16	20	2,036	17	20	2,056	17	20	2,076	17	20
3,7	2,013	15	20	2,033	15	20	2,053	16	20	2,073	16	20	2,093	17	20
3,8	2,028	16	20	2,048	16	21	2,069	16	20	2,089	16	21	2,110	16	21
3,9	2,044	15	21	2,064	16	21	2,085	16	21	2,105	16	21	2,126	16	21
4,0	2,059	15	21	2,080	15	21	2,101	15	20	2,121	16	21	2,142	16	21
4,1	2,074	15	23	2,095	16	21	2,116	16	21	2,137	16	21	2,158	16	22
4,2	2,089			2,111			2,132			2,153			2,174		

Digitized by Google

	$z = 1{,}10$.			$z = 1{,}12$.			$z = 1{,}14$.			$z = 1{,}16$.			$z = 1{,}18$.		
V_0^2	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,333		8	1,341		7	1,348		7	1,355		8	1,363		7
		28			28			28			29			29	
0,1	1,361		8	1,369		7	1,376		8	1,384		8	1,392		8
		27			27			29			29			29	
0,2	1,388		8	1,396		9	1,405		8	1,413		8	1,421		9
		27			27			27			28			29	
0,3	1,415		8	1,423		9	1,432		9	1,441		9	1,450		9
		26			27			27			28			28	
0,4	1,441		9	1,450		9	1,459		10	1,469		9	1,478		10
		25			26			27			27			28	
0,5	1,466		10	1,476		10	1,486		10	1,496		10	1,506		10
		25			25			26			26			27	
0,6	1,491		10	1,501		11	1,512		10	1,522		11	1,533		10
		25			25			25			26			26	
0,7	1,516		10	1,526		11	1,537		11	1,548		11	1,559		10
		24			25			25			25			25	
0,8	1,540		11	1,551		11	1,562		11	1,573		11	1,584		11
		24			24			24			25			26	
0,9	1,564		11	1,575		11	1,586		12	1,598		12	1,610		11
		23			24			24			24			25	
1,0	1,587		12	1,599		11	1,610		12	1,622		13	1,635		12
		23			23			24			24			24	
1,1	1,610		12	1,622		12	1,634		12	1,646		13	1,659		13
		22			23			23			24			24	
1,2	1,632		13	1,645		12	1,657		13	1,670		13	1,683		13
		22			22			23			23			24	
1,3	1,654		13	1,667		13	1,680		13	1,693		14	1,707		13
		22			22			23			23			23	
1,4	1,676		13	1,689		14	1,703		13	1,716		14	1,730		14
		22			22			22			23			23	
1,5	1,698		13	1,711		14	1,725		14	1,739		14	1,753		14
		21			22			22			22			23	
1,6	1,719		14	1,733		14	1,747		14	1,761		15	1,776		14
		21			21			22			22			22	
1,7	1,740		14	1,754		15	1,769		14	1,783		15	1,798		15
		21			21			21			22			22	
1,8	1,761		14	1,775		15	1,790		15	1,805		15	1,820		15
		20			21			21			22			22	
1,9	1,781		15	1,796		15	1,811		16	1,827		15	1,842		15
		20			21			21			21			21	
2,0	1,801		16	1,817		15	1,832		16	1,848		15	1,863		16
		20			20			21			21			22	
2,1	1,821		16	1,837		16	1,853		16	1,869		16	1,885		16
		20			20			20			20			20	
2,2	1,841		16	1,857		16	1,873		16	1,889		16	1,905		17
		20			20			20			21			21	
2,3	1,861		16	1,877		16	1,893		17	1,910		16	1,926		17
		19			20			20			20			21	
2,4	1,880		17	1,897		16	1,913		17	1,930		17	1,947		17
		19			19			20			20			20	
2,5	1,899		17	1,916		17	1,933		17	1,950		17	1,967		17
		19			19			19			20			20	
2,6	1,918		17	1,935		17	1,952		18	1,970		17	1,987		18
		18			19			19			19			20	
2,7	1,936		18	1,954		17	1,971		18	1,989		18	2,007		18
		19			19			19			19			20	
2,8	1,955		18	1,973		17	1,990		18	2,008		19	2,027		18
		18			18			19			19			19	
2,9	1,973		18	1,991		18	2,009		18	2,027		19	2,046		19
		18			19			19			19			19	
3,0	1,991		19	2,010		18	2,028		18	2,046		19	2,065		19
		18			18			19			19			19	
3,1	2,009		19	2,028		19	2,047		18	2,065		19	2,084		19
		18			18			18			19			19	
3,2	2,027		19	2,046		19	2,065		19	2,084		19	2,103		19
		18			18			18			18			19	
3,3	2,045		19	2,064		19	2,083		19	2,102		20	2,122		19
		17			18			18			18			18	
3,4	2,062		20	2,082		19	2,101		19	2,120		20	2,140		20
		17			17			18			19			19	
3,5	2,079		20	2,099		20	2,119		20	2,139		20	2,159		20
		17			17			18			18			18	
3,6	2,096		20	2,116		21	2,137		20	2,157		20	2,177		20
		17			17			17			17			18	
3,7	2,113		20	2,133		21	2,154		20	2,174		21	2,195		20
		17			17			17			18			18	
3,8	2,130		20	2,150		21	2,171		21	2,192		21	2,213		20
		17			17			17			17			17	
3,9	2,147		20	2,167		21	2,188		21	2,209		21	2,230		21
		16			17			17			18			18	
4,0	2,163		21	2,184		21	2,205		22	2,227		21	2,248		21
		17			17			17			17			17	
4,1	2,180		21	2,201		21	2,222		22	2,244		21	2,265		22
		16			17			17			17			17	
4,2	2,196		22	2,218		21	2,239		22	2,261		21	2,282		22

Digitized by Google

	$z = 1{,}20$.			$z = 1{,}22$.			$z = 1{,}24$.			$z = 1{,}26$.			$z = 1{,}28$.		
V_0^2	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,370	30	8	1,378	31	7	1,385	32	8	1,393	32	8	1,401	32	7
0,1	1,400	30	9	1,409	30	8	1,417	31	8	1,425	31	8	1,433	32	8
0,2	1,430	29	9	1,439	29	9	1,448	30	8	1,456	31	9	1,465	31	9
0,3	1,459	29	9	1,468	29	10	1,478	29	9	1,487	30	9	1,496	30	9
0,4	1,488	28	9	1,497	29	10	1,507	29	10	1,517	29	9	1,526	30	10
0,5	1,516	27	10	1,526	27	10	1,536	28	10	1,546	28	10	1,556	29	10
0,6	1,543	26	10	1,553	27	11	1,564	27	10	1,574	28	11	1,585	28	11
0,7	1,569	26	11	1,580	27	11	1,591	27	11	1,602	28	11	1,613	28	12
0,8	1,595	26	12	1,607	26	11	1,618	27	12	1,630	27	11	1,641	28	12
0,9	1,621	26	12	1,633	26	12	1,645	26	12	1,657	26	12	1,669	27	12
1,0	1,647	25	12	1,659	25	12	1,671	26	12	1,683	26	13	1,696	26	12
1,1	1,672	24	12	1,684	25	13	1,697	25	12	1,709	26	13	1,722	26	13
1,2	1,696	24	13	1,709	24	13	1,722	25	13	1,735	25	13	1,748	26	13
1,3	1,720	24	13	1,733	24	14	1,747	24	13	1,760	25	14	1,774	25	13
1,4	1,744	23	13	1,757	24	14	1,771	24	14	1,785	24	14	1,799	25	14
1,5	1,767	23	14	1,781	23	14	1,795	24	14	1,809	24	15	1,824	24	14
1,6	1,790	23	14	1,804	23	15	1,819	23	14	1,833	24	15	1,848	24	15
1,7	1,813	22	14	1,827	23	15	1,842	23	15	1,857	24	15	1,872	24	15
1,8	1,835	22	15	1,850	23	15	1,865	23	16	1,881	23	15	1,896	23	15
1,9	1,857	22	16	1,873	22	15	1,888	23	16	1,904	23	15	1,919	23	16
2,0	1,879	22	16	1,895	22	16	1,911	22	16	1,927	22	16	1,942	23	16
2,1	1,901	21	16	1,917	21	16	1,933	22	16	1,949	22	16	1,965	23	16
2,2	1,922	21	16	1,938	22	17	1,955	22	16	1,971	22	17	1,988	22	16
2,3	1,943	21	17	1,960	21	17	1,977	21	17	1,993	22	17	2,010	22	17
2,4	1,964	20	17	1,981	20	17	1,998	21	17	2,015	21	17	2,032	22	17
2,5	1,984	21	17	2,001	21	18	2,019	21	17	2,036	21	18	2,054	21	17
2,6	2,005	20	17	2,022	21	18	2,040	21	17	2,057	21	18	2,075	21	18
2,7	2,025	20	18	2,043	20	18	2,061	20	17	2,078	21	18	2,096	21	19
2,8	2,045	20	18	2,063	20	18	2,081	20	18	2,099	21	18	2,117	21	19
2,9	2,065	19	18	2,083	20	18	2,101	20	19	2,120	20	19	2,138	21	19
3,0	2,084	19	19	2,103	19	18	2,121	20	19	2,140	20	19	2,159	21	19
3,1	2,103	19	19	2,122	20	19	2,141	20	19	2,160	20	20	2,180	20	19
3,2	2,122	19	20	2,142	19	19	2,161	20	19	2,180	20	20	2,200	20	20
3,3	2,141	19	20	2,161	19	20	2,181	19	19	2,200	20	20	2,220	20	20
3,4	2,160	19	20	2,180	19	20	2,200	19	20	2,220	19	20	2,240	20	20
3,5	2,179	18	20	2,199	19	20	2,219	19	20	2,239	19	21	2,260	19	20
3,6	2,197	18	21	2,218	18	20	2,238	19	20	2,258	19	21	2,279	19	21
3,7	2,215	18	21	2,236	18	21	2,257	18	20	2,277	19	21	2,298	19	21
3,8	2,233	18	21	2,254	18	21	2,275	19	21	2,296	19	21	2,317	19	22
3,9	2,251	18	21	2,272	18	22	2,294	18	21	2,315	19	21	2,336	19	22
4,0	2,269	18	21	2,290	18	22	2,312	18	22	2,334	18	21	2,355	19	22
4,1	2,287	17	21	2,308	18	22	2,330	18	22	2,352	18	22	2,374	18	22
4,2	2,304		22	2,326		22	2,348		22	2,370		22	2,392		22

Digitized by Google

	$z = 1{,}30$.			$z = 1{,}32$.			$z = 1{,}34$.			$z = 1{,}36$.			$z = 1{,}38$.		
V_0^2	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,408	33	8	1,416	34	8	1,424	34	8	1,432	35	8	1,440	35	8
0,1	1,441	33	9	1,450	33	8	1,458	34	9	1,467	34	8	1,475	35	9
0,2	1,474	31	9	1,483	32	9	1,492	32	9	1,501	33	9	1,510	33	9
0,3	1,505	31	10	1,515	31	9	1,524	32	10	1,534	32	9	1,543	33	10
0,4	1,536	30	10	1,546	31	10	1,556	31	10	1,566	32	10	1,576	32	10
0,5	1,566	30	11	1,577	30	10	1,587	31	11	1,598	31	10	1,608	31	10
0,6	1,596	29	11	1,607	29	11	1,618	29	11	1,629	30	10	1,639	31	11
0,7	1,625	28	11	1,636	29	11	1,647	29	12	1,659	29	11	1,670	30	11
0,8	1,653	28	12	1,665	28	12	1,676	29	12	1,688	29	12	1,700	29	12
0,9	1,681	27	12	1,693	28	12	1,705	28	12	1,717	29	12	1,729	29	13
1,0	1,708	27	13	1,721	27	12	1,733	28	13	1,746	28	12	1,758	29	13
1,1	1,735	26	13	1,748	27	13	1,761	27	13	1,774	27	13	1,787	28	13
1,2	1,761	26	14	1,775	26	13	1,788	27	13	1,801	27	14	1,815	27	13
1,3	1,787	26	14	1,801	26	14	1,815	26	13	1,828	27	14	1,842	27	14
1,4	1,813	25	14	1,827	25	14	1,841	26	14	1,855	26	14	1,869	27	14
1,5	1,838	25	14	1,852	25	15	1,867	25	14	1,881	26	15	1,896	26	14
1,6	1,863	24	14	1,877	25	15	1,892	25	15	1,907	26	15	1,922	26	15
1,7	1,887	24	15	1,902	25	15	1,917	25	16	1,933	25	15	1,948	25	15
1,8	1,911	24	16	1,927	24	15	1,942	25	16	1,958	25	15	1,973	25	16
1,9	1,935	23	16	1,951	24	16	1,967	24	16	1,983	24	15	1,998	25	16
2,0	1,958	23	17	1,975	23	16	1,991	24	16	2,007	24	16	2,023	25	16
2,1	1,981	23	17	1,998	23	17	2,015	23	16	2,031	24	17	2,048	24	16
2,2	2,004	23	17	2,021	23	17	2,038	23	17	2,055	23	17	2,072	24	17
2,3	2,027	22	17	2,044	23	17	2,061	23	17	2,078	23	18	2,096	23	17
2,4	2,049	22	18	2,067	22	17	2,084	23	17	2,101	23	18	2,119	23	18
2,5	2,071	22	18	2,089	22	18	2,107	22	17	2,124	23	18	2,142	23	18
2,6	2,093	22	18	2,111	22	18	2,129	22	18	2,147	23	18	2,165	23	19
2,7	2,115	21	18	2,133	22	18	2,151	22	19	2,170	22	18	2,188	23	19
2,8	2,136	21	19	2,155	21	18	2,173	22	19	2,192	22	19	2,211	22	19
2,9	2,157	21	19	2,176	21	19	2,195	22	19	2,214	22	19	2,233	22	19
3,0	2,178	21	19	2,197	21	20	2,217	21	19	2,236	21	20	2,255	22	19
3,1	2,199	21	19	2,218	21	20	2,238	21	19	2,257	22	20	2,277	22	19
3,2	2,220	20	19	2,239	21	20	2,259	21	20	2,279	21	20	2,299	21	19
3,3	2,240	20	20	2,260	20	20	2,280	21	20	2,300	21	20	2,320	21	20
3,4	2,260	20	20	2,280	20	21	2,301	20	20	2,321	20	20	2,341	21	21
3,5	2,280	20	20	2,300	20	21	2,321	20	20	2,341	21	21	2,362	21	21
3,6	2,300	19	20	2,320	20	21	2,341	20	21	2,362	20	21	2,383	21	21
3,7	2,319	20	21	2,340	20	21	2,361	20	21	2,382	20	22	2,404	20	21
3,8	2,339	19	21	2,360	19	21	2,381	20	21	2,402	20	22	2,424	20	22
3,9	2,358	19	21	2,379	20	22	2,401	20	21	2,422	20	22	2,244	20	22
4,0	2,377	19	22	2,399	19	22	2,421	19	21	2,442	20	22	2,464	20	22
4,1	2,396	18	22	2,418	19	22	2,440	19	22	2,462	19	22	2,484	20	22
4,2	2,414		23	2,437		22	2,459		22	2,481		23	2,504		22

Digitized by Google

$$\mathfrak{T}(z, V_0^2);\ z = \frac{\alpha s}{c},\ V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 1{,}40$.			$z = 1{,}42$.			$z = 1{,}44$.			$z = 1{,}46$.			$z = 1{,}48$.		
V_0^2	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,448	36	8	1,456	36	8	1,464	37	9	1,473	37	8	1,481	38	8
0,1	1,484	35	8	1,492	36	9	1,501	36	9	1,510	37	9	1,519	37	9
0,2	1,519	34	9	1,528	34	9	1,537	35	9	1,546	36	10	1,556	36	9
0,3	1,553	33	9	1,562	34	10	1,572	34	10	1,582	36	10	1,592	35	10
0,4	1,586	32	10	1,596	33	10	1,606	34	11	1,617	34	10	1,627	34	11
0,5	1,618	32	11	1,629	32	11	1,640	33	11	1,651	33	11	1,661	34	12
0,6	1,650	31	11	1,661	32	12	1,673	32	11	1,684	32	12	1,695	33	12
0,7	1,681	31	12	1,693	31	12	1,705	31	12	1,716	32	12	1,728	32	13
0,8	1,712	30	12	1,724	30	13	1,736	31	12	1,748	31	13	1,760	32	13
0,9	1,742	29	12	1,754	30	13	1,767	30	13	1,779	31	13	1,792	31	13
1,0	1,771	29	13	1,784	29	14	1,797	30	13	1,810	30	13	1,823	30	14
1,1	1,800	28	13	1,813	29	14	1,827	29	13	1,840	29	14	1,853	30	14
1,2	1,828	28	14	1,842	28	14	1,856	28	14	1,869	29	14	1,883	29	15
1,3	1,856	27	14	1,870	28	14	1,884	28	14	1,898	29	14	1,912	29	15
1,4	1,883	27	15	1,898	27	15	1,912	28	15	1,927	28	15	1,941	29	15
1,5	1,910	27	15	1,925	27	15	1,940	27	15	1,955	28	15	1,970	28	15
1,6	1,937	26	15	1,952	27	15	1,967	27	16	1,983	27	15	1,998	27	16
1,7	1,963	26	16	1,979	26	16	1,994	27	16	2,010	27	15	2,025	27	17
1,8	1,989	25	16	2,005	26	16	2,021	26	16	2,037	26	16	2,052	27	17
1,9	2,014	25	17	2,031	25	16	2,047	26	16	2,063	26	16	2,079	27	17
2,0	2,039	25	17	2,056	25	17	2,073	25	17	2,089	26	17	2,106	26	17
2,1	2,064	25	17	2,081	25	17	2,098	25	17	2,115	25	17	2,132	26	17
2,2	2,089	24	17	2,106	24	17	2,128	25	17	2,140	25	18	2,158	25	17
2,3	2,113	24	17	2,130	24	18	2,148	24	18	2,165	25	18	2,183	25	18
2,4	2,137	23	17	2,154	24	18	2,172	24	18	2,190	25	18	2,208	25	18
2,5	2,160	24	18	2,178	24	18	2,196	24	19	2,215	24	18	2,233	25	18
2,6	2,184	23	18	2,202	23	19	2,220	24	19	2,239	24	19	2,258	24	19
2,7	2,207	23	18	2,225	23	19	2,244	23	20	2,263	24	19	2,282	24	19
2,8	2,230	22	18	2,248	23	19	2,267	23	20	2,287	23	19	2,306	24	19
2,9	2,252	22	19	2,271	23	19	2,290	23	20	2,310	23	20	2,330	23	20
3,0	2,274	22	20	2,294	22	19	2,313	23	20	2,333	23	20	2,353	23	20
3,1	2,296	22	20	2,316	22	20	2,336	23	20	2,356	23	20	2,376	23	20
3,2	2,318	22	20	2,338	22	21	2,359	22	20	2,379	23	20	2,399	23	20
3,3	2,340	22	20	2,360	22	21	2,381	22	21	2,402	23	20	2,422	23	20
3,4	2,362	21	20	2,382	22	21	2,403	22	21	2,424	22	21	2,445	22	20
3,5	2,383	21	21	2,404	22	21	2,425	21	21	2,446	21	22	2,467	22	21
3,6	2,404	21	21	2,425	21	21	2,446	22	21	2,467	22	22	2,489	22	21
3,7	2,425	21	21	2,446	21	22	2,468	21	21	2,489	22	22	2,511	22	22
3,8	2,446	21	21	2,467	21	22	2,489	21	22	2,511	21	22	2,533	21	22
3,9	2,466	20	22	2,488	21	22	2,510	21	22	2,532	21	22	2,554	22	22
4,0	2,486	20	23	2,509	20	23	2,531	21	22	2,553	21	23	2,576	21	22
4,1	2,506	20	23	2,529	20	23	2,552	20	23	2,574	21	23	2,597	21	23
4,2	2,526	20	23	2,549	20	23	2,572	20	23	2,595	21	23	2,618	21	23

Digitized by Google

	$z = 1{,}50$.			$z = 1{,}52$.			$z = 1{,}54$.			$z = 1{,}56$.			$z = 1{,}58$.		
V_0^2	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{C}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,489	39	9	1,498	39	8	1,506	40	9	1,515	40	8	1,523	41	9
0,1	1,528	37	9	1,537	38	9	1,546	38	9	1,555	39	9	1,564	40	9
0,2	1,565	37	10	1,575	37	9	1,584	38	10	1,594	38	10	1,604	38	9
0,3	1,602	36	10	1,612	36	10	1,622	36	10	1,632	37	10	1,642	38	10
0,4	1,638	35	10	1,648	35	10	1,658	36	11	1,669	37	11	1,680	37	11
0,5	1,673	34	10	1,683	35	11	1,694	36	12	1,706	35	11	1,717	36	11
0,6	1,707	33	11	1,718	34	12	1,730	34	11	1,741	35	12	1,753	35	12
0,7	1,740	33	12	1,752	33	12	1,764	33	12	1,776	34	12	1,788	34	12
0,8	1,773	32	12	1,785	32	12	1,797	33	13	1,810	33	13	1,822	34	13
0,9	1,805	31	12	1,817	32	13	1,830	32	13	1,843	33	13	1,856	33	13
1,0	1,836	31	13	1,849	31	13	1,862	32	14	1,876	32	13	1,889	33	14
1,1	1,867	30	13	1,880	31	14	1,894	31	14	1,908	31	15	1,922	32	14
1,2	1,897	30	14	1,911	30	14	1,925	30	14	1,939	31	15	1,954	31	14
1,3	1,927	29	14	1,941	29	14	1,955	30	15	1,970	30	15	1,985	30	14
1,4	1,956	29	14	1,970	30	15	1,985	30	15	2,000	30	16	2,015	31	15
1,5	1,985	28	15	2,000	29	15	2,015	29	15	2,030	30	16	2,046	30	15
1,6	2,013	28	16	2,029	28	15	2,044	29	16	2,060	29	16	2,076	29	16
1,7	2,041	28	16	2,057	28	16	2,073	28	16	2,089	28	17	2,105	29	16
1,8	2,069	27	16	2,085	27	17	2,101	28	16	2,117	28	17	2,134	28	17
1,9	2,096	27	16	2,112	27	17	2,129	27	16	2,145	28	17	2,162	28	17
2,0	2,123	26	17	2,139	27	17	2,156	27	17	2,173	27	18	2,190	28	17
2,1	2,149	26	18	2,166	27	17	2,183	27	17	2,200	28	18	2,218	28	17
2,2	2,175	26	18	2,193	26	17	2,210	26	18	2,228	27	18	2,246	27	17
2,3	2,201	25	18	2,219	25	18	2,236	26	19	2,255	26	18	2,273	26	18
2,4	2,226	25	19	2,244	26	18	2,262	26	19	2,281	26	19	2,299	27	19
2,5	2,251	25	19	2,270	25	18	2,288	26	19	2,307	26	19	2,326	26	19
2,6	2,276	25	19	2,295	25	19	2,314	25	19	2,333	25	19	2,352	25	20
2,7	2,301	24	19	2,320	24	20	2,339	25	19	2,358	25	20	2,377	26	20
2,8	2,325	24	20	2,344	25	19	2,364	24	20	2,383	25	20	2,403	25	20
2,9	2,349	24	20	2,369	24	20	2,388	25	20	2,408	25	20	2,428	25	20
3,0	2,373	23	21	2,393	24	20	2,413	24	20	2,433	24	21	2,453	25	20
3,1	2,396	23	21	2,417	23	20	2,437	24	20	2,457	24	21	2,478	24	21
3,2	2,419	23	21	2,440	23	21	2,461	23	21	2,481	24	21	2,502	24	21
3,3	2,442	23	22	2,463	24	21	2,484	24	21	2,505	24	21	2,526	24	21
3,4	2,465	23	22	2,487	23	21	2,508	23	21	2,529	23	22	2,550	24	21
3,5	2,488	22	22	2,510	22	21	2,531	22	21	2,552	23	22	2,574	23	22
3,6	2,510	23	22	2,532	23	21	2,553	23	22	2,575	23	22	2,597	23	23
3,7	2,533	22	22	2,555	22	22	2,576	23	22	2,598	23	22	2,620	23	23
3,8	2,555	22	22	2,577	22	22	2,599	22	22	2,621	23	22	2,643	23	23
3,9	2,576	21	23	2,599	22	22	2,621	22	23	2,644	22	23	2,666	23	23
4,0	2,598	22	23	2,621	21	22	2,643	22	23	2,666	22	23	2,689	23	23
4,1	2,619	21	23	2,642	22	23	2,665	22	23	2,688	22	24	2,712	22	23
4,2	2,641	22	23	2,664	22	23	2,687	23	23	2,710	22	24	2,734	22	23

Digitized by Google

$$\mathfrak{T}(z, V_0^2);\ \dot{z} = \frac{\alpha x}{c},\ V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 1{,}60$.			$z = 1{,}62$.			$z = 1{,}64$.			$z = 1{,}66$.			$z = 1{,}68$.		
V_0^2	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z	$\mathfrak{T}(z, V_0^2)$	Δ_v	Δ_z
0,0	1,532			1,540			1,549			1,558			1,567		
		41	8		42	9		43	9		43	9		44	9
0,1	1,573			1,582			1,592			1,601			1,611		
		40	9		41	10		41	10		42	10		42	10
0,2	1,613			1,623			1,633			1,643			1,653		
		39	10		40	10		40	10		41	10		41	10
0,3	1,652			1,663			1,673			1,684			1,694		
		39	11		39	11		40	11		40	11		41	11
0,4	1,691			1,702			1,713			1,724			1,735		
		37	11		37	11		38	11		39	11		39	11
0,5	1,728			1,739			1,751			1,763			1,774		
		37	11		37	12		37	12		37	11		38	12
0,6	1,765			1,776			1,788			1,800			1,812		
		35	11		36	12		37	12		37	12		38	12
0,7	1,800			1,812			1,825			1,837			1,850		
		35	12		36	13		36	12		36	13		36	13
0,8	1,835			1,848			1,861			1,873			1,886		
		34	13		34	13		35	13		36	13		36	13
0,9	1,869			1,882			1,896			1,909			1,922		
		34	13		34	14		34	14		35	13		35	14
1,0	1,903			1,916			1,930			1,944			1,957		
		33	14		34	14		34	14		34	14		35	14
1,1	1,936			1,950			1,964			1,978			1,992		
		32	14		32	15		33	14		33	15		34	15
1,2	1,968			1,982			1,997			2,011			2,026		
		31	15		32	15		32	15		33	15		33	15
1,3	1,999			2,014			2,029			2,044			2,059		
		31	15		31	16		32	15		32	16		33	16
1,4	2,030			2,045			2,061			2,076			2,092		
		31	15		31	16		31	16		32	16		32	16
1,5	2,061			2,076			2,092			2,108			2,124		
		30	16		31	16		31	16		31	16		31	17
1,6	2,091			2,107			2,123			2,139			2,155		
		30	16		30	16		30	16		31	16		31	17
1,7	2,121			2,137			2,153			2,170			2,186		
		29	17		30	16		30	17		30	17		31	17
1,8	2,150			2,167			2,183			2,200			2,217		
		29	17		29	17		30	17		30	17		30	18
1,9	2,179			2,196			2,213			2,230			2,247		
		28	18		29	17		29	18		30	17		30	18
2,0	2,207			2,225			2,242			2,260			2,277		
		28	18		28	18		29	18		29	18		30	18
2,1	2,235			2,253			2,271			2,289			2,307		
		28	18		28	18		28	19		29	18		29	19
2,2	2,263			2,281			2,299			2,318			2,336		
		28	18		28	18		28	19		28	18		28	19
2,3	2,291			2,309			2,327			2,346			2,364		
		27	18		27	19		28	19		28	19		29	19
2,4	2,318			2,336			2,355			2,374			2,393		
		27	19		27	19		27	19		27	20		28	20
2,5	2,345			2,363			2,382			2,401			2,421		
		26	19		27	19		27	19		27	20		27	20
2,6	2,371			2,390			2,409			2,428			2,448		
		26	19		26	20		27	19		27	20		27	20
2,7	2,397			2,416			2,436			2,455			2,475		
		26	19		26	20		26	20		27	20		27	20
2,8	2,423			2,442			2,462			2,482			2,502		
		25	20		26	20		26	21		27	20		27	21
2,9	2,448			2,468			2,488			2,509			2,529		
		25	21		26	20		26	21		26	21		27	21
3,0	2,473			2,494			2,514			2,535			2,556		
		25	21		25	21		26	21		26	21		26	21
3,1	2,498			2,519			2,540			2,561			2,582		
		25	21		25	21		25	21		25	21		25	21
3,2	2,523			2,544			2,565			2,586			2,607		
		24	22		25	21		25	21		25	22		26	22
3,3	2,547			2,569			2,590			2,611			2,633		
		24	22		24	22		25	21		25	22		25	22
3,4	2,571			2,593			2,615			2,636			2,658		
		24	22		24	22		24	22		25	22		25	22
3,5	2,595			2,617			2,639			2,661			2,683		
		24	22		24	22		24	23		25	22		25	23
3,6	2,619			2,641			2,663			2,686			2,708		
		24	22		24	22		24	23		24	23		25	23
3,7	2,643			2,665			2,687			2,710			2,733		
		23	23		24	22		24	23		24	23		24	24
3,8	2,666			2,689			2,711			2,734			2,757		
		23	23		23	23		24	23		24	23		24	24
3,9	2,689			2,712			2,735			2,758			2,781		
		23	23		23	23		23	24		24	23		24	24
4,0	2,712			2,735			2,758			2,782			2,805		
		23	23		23	23		23	24		23	24		24	25
4,1	2,735			2,758			2,781			2,805			2,829		
		22	24		23	23		23	24		23	25		24	25
4,2	2,757			2,781			2,804			2,828			2,853		

Digitized by Google

	$z = 0{,}00$.		$z = 0{,}02$.		$z = 0{,}04$.		$z = 0{,}06$.		$z = 0{,}08$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,0000	201	0,0201	204	0,0405	207	0,0612	210	0,0822	212
0,1	0,0000	201	0,0201	205	0,0406	207	0,0613	211	0,0824	214
0,2	0,0000	202	0,0202	205	0,0407	209	0,0615	211	0,0826	215
0,3	0,0000	202	0,0202	205	0,0407	209	0,0616	212	0,0828	216
0.4	0,0000	202	0,0202	206	0,0408	209	0,0617	213	0,0830	218
0,5	0,0000	202	0,0202	206	0,0408	210	0,0618	215	0,0833	218
0,6	0,0000	202	0,0202	207	0,0409	210	0,0619	216	0,0835	220
0,7	0,0000	202	0,0202	207	0,0409	212	0,0621	216	0,0837	221
0,8	0,0000	202	0,0202	208	0,0410	212	0,0622	217	0,0839	223
0,9	0,0000	202	0,0202	208	0,0410	213	0,0623	218	0,0841	224
1,0	0,0000	202	0,0202	209	0,0411	213	0,0624	220	0,0844	224
1,1	0,0000	203	0,0203	209	0,0412	215	0,0626	220	0,0846	226
1,2	0,0000	203	0,0203	209	0,0412	215	0,0627	221	0,0848	227
1,3	0,0000	203	0,0203	209	0,0412	216	0,0628	222	0,0850	229
1,4	0,0000	203	0,0203	210	0,0413	216	0,0629	223	0,0852	230
1,5	0,0000	203	0,0203	210	0,0413	217	0,0630	224	0,0854	231
1,6	0,0000	203	0,0203	211	0,0414	218	0,0632	225	0,0857	232
1,7	0,0000	203	0,0203	212	0,0415	218	0,0633	226	0,0859	233
1,8	0,0000	203	0,0203	212	0,0415	219	0,0634	227	0,0861	235
1,9	0,0000	204	0,0204	212	0,0416	219	0,0635	228	0,0863	236
2,0	0,0000	204	0,0204	212	0,0416	221	0,0637	228	0,0865	238
2,1	0,0000	204	0,0204	213	0,0417	221	0,0638	229	0,0867	239
2,2	0,0000	204	0,0204	213	0,0417	222	0,0639	231	0,0870	239
2,3	0,0000	204	0,0204	214	0,0418	222	0,0640	232	0,0872	241
2,4	0,0000	204	0,0204	214	0,0418	223	0,0641	233	0,0874	242
2,5	0,0000	204	0,0204	215	0,0419	224	0,0643	233	0,0876	244
2,6	0,0000	205	0,0205	215	0,0420	225	0,0644	234	0,0878	245
2,7	0,0000	205	0,0205	215	0,0420	225	0,0645	236	0,0881	245
2,8	0,0000	205	0,0205	215	0,0420	226	0,0646	237	0,0883	247
2,9	0,0000	205	0,0205	216	0,0421	227	0,0648	237	0,0885	248
3,0	0,0000	205	0,0205	217	0,0422	227	0,0649	238	0,0887	250
3,1	0,0000	205	0,0205	217	0,0422	228	0,0650	239	0,0889	251
3,2	0,0000	205	0,0205	218	0,0423	228	0,0651	240	0,0891	253
3,3	0,0000	205	0,0205	218	0,0423	229	0,0652	242	0,0894	253
3,4	0,0000	206	0,0206	218	0,0424	230	0,0654	242	0,0896	254
3,5	0,0000	206	0,0206	218	0,0424	231	0,0655	243	0,0898	256
3,6	0,0000	206	0,0206	219	0,0425	231	0,0656	244	0,0900	257
3,7	0,0000	206	0,0206	219	0,0425	232	0,0657	245	0,0902	259
3,8	0,0000	206	0,0206	220	0,0426	232	0,0658	246	0,0904	260
3,9	0,0000	206	0,0206	220	0,0426	234	0,0660	247	0,0907	260
4,0	0,0000	206	0,0206	221	0,0427	234	0,0661	248	0,0909	262
4,1	0,0000	207	0,0207	221	0,0428	235	0,0662	249	0,0911	263
4,2	0,0000	207	0,0207	221	0,0428	235	0,0663	250	0,0913	265
	$\Delta_v = 0$.		$\Delta_v = 0$.		$\Delta_v = 1$.		$\Delta_v = 1$.		$\Delta_v = 2$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}10$.		$z = 0{,}12$.		$z = 0{,}14$.		$z = 0{,}16$		$z = 0{,}18$.	
V_0^2	$z\Phi z, V_0^2$	Δ_z	$z\Phi z, V_0^2$	Δ_z	$z\Phi z, V_0^2$	Δ_z	$z\Phi z, V_0^2$	Δ_z	$z\Phi z, V_0^2$	Δ_z
0,0	0,1034	215	0,1249	219	0,1468	221	0,1689	224	0,1913	227
0,1	0,1038	216	0,1254	220	0,1474	224	0,1698	226	0,1924	230
0,2	0,1041	218	0,1259	222	0,1481	226	0,1707	229	0,1936	232
0,3	0,1044	220	0,1264	223	0,1487	229	0,1716	231	0,1947	235
0,4	0,1048	221	0,1269	225	0,1494	230	0,1724	234	0,1958	238
0,5	0,1051	223	0,1274	226	0,1500	233	0,1733	237	0,1970	240
0,6	0,1055	224	0,1279	228	0,1507	235	0,1742	239	0,1981	243
0,7	0,1058	226	0,1284	229	0,1513	238	0,1751	241	0,1992	246
0,8	0,1062	227	0,1289	231	0,1520	240	0,1760	243	0,2003	250
0,9	0,1065	229	0,1294	232	0,1526	243	0,1769	246	0,2015	252
1,0	0,1068	231	0,1299	234	0,1533	245	0,1778	248	0,2026	255
1,1	0,1072	232	0,1304	236	0,1540	247	0,1787	250	0,2037	258
1,2	0,1075	234	0,1309	237	0,1546	250	0,1796	253	0,2049	260
1,3	0,1079	235	0,1314	239	0,1553	251	0,1804	256	0,2060	263
1,4	0,1082	237	0,1319	240	0,1559	254	0,1813	258	0,2071	266
1,5	0,1085	239	0,1324	242	0,1566	256	0,1822	261	0,2083	268
1,6	0,1089	240	0,1329	243	0,1572	259	0,1831	263	0,2094	271
1,7	0,1092	242	0,1334	245	0,1579	261	0,1840	265	0,2105	274
1,8	0,1096	243	0,1339	246	0,1585	264	0,1849	268	0,2117	276
1,9	0,1099	244	0,1343	249	0,1592	266	0,1858	270	0,2128	279
2,0	0,1103	245	0,1348	250	0,1598	268	0,1867	272	0,2139	282
2,1	0,1106	247	0,1353	252	0,1605	271	0,1876	274	0,2150	285
2,2	0,1109	249	0,1358	253	0,1611	273	0,1884	278	0,2162	287
2,3	0,1113	250	0,1363	255	0,1618	275	0,1893	280	0,2178	290
2,4	0,1116	252	0,1368	256	0,1624	278	0,1902	282	0,2184	293
2,5	0,1120	253	0,1373	258	0,1631	280	0,1911	285	0,2196	295
2,6	0,1123	255	0,1378	259	0,1637	283	0,1920	287	0,2207	298
2,7	0,1126	257	0,1383	261	0,1644	285	0,1929	289	0,2218	301
2,8	0,1130	258	0,1388	263	0,1651	287	0,1938	292	0,2230	303
2,9	0,1133	260	0,1393	264	0,1657	290	0,1947	294	0,2241	306
3,0	0,1137	261	0,1398	266	0,1664	292	0,1956	296	0,2252	309
3,1	0,1140	263	0,1403	267	0,1670	294	0,1964	299	0,2263	312
3,2	0,1144	264	0,1408	269	0,1677	296	0,1973	302	0,2275	314
3,3	0,1147	266	0,1413	270	0,1683	299	0,1982	304	0,2286	317
3,4	0,1150	268	0,1418	272	0,1690	301	0,1991	306	0,2297	320
3,5	0,1154	269	0,1423	273	0,1696	304	0,2000	309	0,2309	322
3,6	0,1157	271	0,1428	275	0,1703	306	0,2009	311	0,2320	325
3,7	0,1161	272	0,1433	276	0,1709	309	0,2018	313	0,2331	328
3,8	0,1164	273	0,1437	279	0,1716	311	0,2027	316	0,2343	330
3,9	0,1167	275	0,1442	280	0,1722	313	0,2035	319	0,2354	333
4,0	0,1171	276	0,1447	282	0,1729	315	0,2044	321	0,2365	336
4,1	0,1174	278	0,1452	283	0,1735	318	0,2053	324	0,2377	338
4,2	0,1178	279	0,1457	285	0,1742	320	0,2062	326	0,2388	341
	$\Delta_v = 3$.		$\Delta_v = 5$.		$\Delta_v = 7$.		$\Delta_v = 9$.		$\Delta_v = 11$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}20$.		$z = 0{,}22$.		$z = 0{,}24$.		$z = 0{,}26$.		$z = 0{,}28$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	$_z\Delta$	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,2140	231	0,2371	233	0,2604	237	0,2841	240	0,3081	243
0,1	0,2154	234	0,2388	237	0,2625	240	0,2865	244	0,3109	247
0,2	0,2168	237	0,2405	240	0,2645	244	0,2889	248	0,3137	252
0,3	0,2182	240	0,2422	243	0,2665	248	0,2913	252	0,3165	256
0,4	0,2196	243	0,2439	247	0,2686	251	0,2937	256	0,3193	260
0,5	0,2210	246	0,2456	250	0,2706	255	0,2961	260	0,3221	265
0,6	0,2224	249	0,2473	254	0,2727	258	0,2985	264	0,3249	269
0,7	0,2238	252	0,2490	257	0,2747	262	0,3009	268	0,3277	274
0,8	0,2253	254	0,2507	260	0,2767	266	0,3033	272	0,3305	278
0,9	0,2267	257	0,2524	264	0,2788	269	0,3057	276	0,3333	282
1,0	0,2281	260	0,2541	267	0,2808	274	0,3082	279	0,3361	287
1,1	0,2295	263	0,2558	271	0,2829	277	0,3106	283	0,3389	291
1,2	0,2309	266	0,2575	274	0,2849	281	0,3130	288	0,3418	295
1,3	0,2323	269	0,2592	277	0,2869	285	0,3154	292	0,3446	299
1,4	0,2337	272	0,2609	281	0,2890	288	0,3187	296	0,3474	303
1,5	0,2351	276	0,2627	283	0,2910	292	0,3202	300	0,3502	308
1,6	0,2365	279	0,2644	287	0,2931	295	0,3226	304	0,3530	312
1,7	0,2379	282	0,2661	290	0,2951	299	0,3250	308	0,3558	316
1,8	0,2393	285	0,2678	293	0,2971	303	0,3274	312	0,3586	321
1,9	0,2407	288	0,2695	297	0,2992	306	0,3298	316	0,3614	325
2,0	0,2421	291	0,2712	300	0,3012	310	0,3322	320	0,3642	330
2,1	0,2435	294	0,2729	304	0,3033	313	0,3346	324	0,3670	334
2,2	0,2449	297	0,2746	307	0,3053	317	0,3370	328	0,3698	338
2,3	0,2463	300	0,2763	311	0,3074	321	0,3395	331	0,3726	343
2,4	0,2477	303	0,2780	314	0,3094	325	0,3419	335	0,3754	347
2,5	0,2491	306	0,2797	317	0,3114	329	0,3443	339	0,3782	351
2,6	0,2505	309	0,2814	321	0,3135	332	0,3467	344	0,3811	355
2,7	0,2519	312	0,2831	324	0,3151	336	0,3491	348	0,3839	359
2,8	0,2533	315	0,2848	328	0,3176	339	0,3515	352	0,3867	364
2,9	0,2547	318	0,2865	331	0,3196	343	0,3539	356	0,3895	368
3,0	0,2561	321	0,2882	334	0,3216	347	0,3563	360	0,3923	372
3,1	0,2575	325	0,2900	337	0,3237	350	0,3587	364	0,3951	377
3,2	0,2589	328	0,2917	340	0,3257	354	0,3611	368	0,3979	381
3,3	0,2603	331	0,2934	344	0,3278	357	0,3635	372	0,4007	386
3,4	0,2617	334	0,2951	347	0,3298	361	0,3659	376	0,4035	390
3,5	0,2631	337	0,2968	350	0,3318	365	0,3683	380	0,4063	394
3,6	0,2645	340	0,2985	354	0,3339	369	0,3708	383	0,4091	399
3,7	0,2659	343	0,3002	357	0,3359	375	0,3732	387	0,4119	403
3,8	0,2673	346	0,3019	361	0,3380	376	0,3756	391	0,4147	407
3,9	0,2687	349	0,3036	364	0,3400	380	0,3780	395	0,4175	412
4,0	0,2701	352	0,3053	367	0,3420	384	0,3804	400	0,4204	415
4,1	0,2715	355	0,3070	371	0,3441	387	0,3828	404	0,4232	420
4,2	0,2729	358	0,3087	374	0,3461	391	0,3852	408	0,4260	424
	$\Delta_v = 14$.		$\Delta_v = 17$.		$\Delta_v = 20$.		$\Delta_v = 23$.		$\Delta_v = 28$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}30$.		$z = 0{,}32$.		$z = 0{,}34$.		$z = 0{,}36$.		$z = 0{,}38$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,3324	246	0,3570	250	0,3820	254	0,4074	257	0,4331	260
0,1	0,3356	252	0,3608	255	0,3863	258	0,4121	263	0,4384	266
0,2	0,3389	256	0,3645	260	0,3905	263	0,4168	269	0,4437	272
0,3	0,3421	261	0,3682	265	0,3947	269	0,4216	274	0,4490	279
0,4	0,3453	266	0,3719	270	0,3989	274	0,4263	280	0,4543	285
0,5	0,3486	270	0,3756	275	0,4031	280	0,4311	285	0,4596	291
0,6	0,3518	275	0,3793	280	0,4073	285	0,4358	291	0,4649	297
0,7	0,3551	279	0,3830	285	0,4115	291	0,4406	296	0,4702	303
0,8	0,3583	284	0,3867	290	0,4157	296	0,4453	302	0,4755	309
0,9	0,3615	289	0,3904	295	0,4199	301	0,4500	308	0,4808	315
1,0	0,3648	293	0,3941	300	0,4241	307	0,4548	314	0,4862	320
1,1	0,3680	298	0,3978	305	0,4283	312	0,4595	320	0,4915	327
1,2	0,3713	302	0,4015	310	0,4325	317	0,4642	326	0,4968	333
1,3	0,3745	307	0,4052	315	0,4367	323	0,4690	331	0,5021	339
1,4	0,3777	312	0,4089	320	0,4409	328	0,4737	337	0,5074	345
1,5	0,3810	316	0,4126	325	0,4451	334	0,4785	342	0,5127	351
1,6	0,3842	321	0,4163	330	0,4493	339	0,4832	348	0,5180	357
1,7	0,3874	326	0,4200	336	0,4536	343	0,4879	354	0,5233	363
1,8	0,3907	330	0,4237	341	0,4578	349	0,4927	352	0,5286	369
1,9	0,3939	335	0,4274	346	0,4620	354	0,4974	365	0,5339	376
2,0	0,3972	339	0,4311	351	0,4662	360	0,5022	370	0,5392	382
2,1	0,4004	345	0,4349	355	0,4704	365	0,5069	377	0,5446	387
2,2	0,4036	350	0,4386	360	0,4746	370	0,5116	383	0,5499	393
2,3	0,4069	354	0,4423	365	0,4788	376	0,5164	388	0,5552	399
2,4	0,4101	359	0,4460	370	0,4830	381	0,5211	394	0,5605	405
2,5	0,4133	364	0,4497	375	0,4872	386	0,5258	400	0,5658	411
2,6	0,4166	368	0,4534	380	0,4914	392	0,5306	405	0,5711	417
2,7	0,4198	373	0,4571	385	0,4956	397	0,5353	411	0,5764	424
2,8	0,4231	377	0,4608	390	0,4998	403	0,5401	416	0,5817	430
2,9	0,4263	382	0,4645	395	0,5040	408	0,5448	422	0,5870	436
3,0	0,4295	387	0,4682	400	0,5082	413	0,5495	426	0,5923	442
3,1	0,4328	391	0,4719	406	0,5125	418	0,5543	433	0,5976	448
3,2	0,4360	396	0,4756	411	0,5167	423	0,5590	439	0,6029	454
3,3	0,4393	400	0,4793	415	0,5208	430	0,5638	445	0,6083	459
3,4	0,4425	405	0,4830	421	0,5251	434	0,5685	451	0,6136	465
3,5	0,4457	410	0,4867	426	0,5293	439	0,5732	457	0,6189	472
3,6	0,4490	414	0,4904	431	0,5335	445	0,5780	462	0,6242	478
3,7	0,4522	419	0,4941	436	0,5377	450	0,5827	468	0,6295	484
3,8	0,4554	424	0,4978	441	0,5419	456	0,5875	473	0,6348	490
3,9	0,4587	428	0,5015	446	0,5461	461	0,5922	479	0,6401	496
4,0	0,4619	433	0,5052	451	0,5503	467	0,5969	485	0,6454	502
4,1	0,4652	437	0,5089	556	0,5545	472	0,6017	490	0,6507	508
4,2	0,4684	443	0,5127	460	0,5587	477	0,6064	496	0,6560	514
	$\Delta_v = 32$.		$\Delta_v = 37$.		$\Delta_v = 42$.		$\Delta_v = 47$.		$\Delta_v = 53$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}40$.		$z = 0{,}42$.		$z = 0{,}44$.		$z = 0{,}46$.		$z = 0{,}48$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,4591	264	0,4855	268	0,5123	272	0,5395	275	0,5670	279
0,1	0,4650	271	0,4921	274	0,5195	279	0,5474	283	0,5757	287
0,2	0,4709	277	0,4986	282	0,5268	285	0,5553	291	0,5844	295
0,3	0,4769	283	0,5052	288	0,5340	293	0,5633	298	0,5931	303
0,4	0,4828	289	0,5117	295	0,5412	300	0,5712	306	0,6018	310
0,5	0,4887	296	0,5183	302	0,5485	307	0,5792	313	0,6105	318
0,6	0,4946	302	0,5248	309	0,5557	314	0,5871	321	0,6192	326
0,7	0,5005	309	0,5314	315	0,5629	322	0,5951	328	0,6279	334
0,8	0,5064	316	0,5380	321	0,5701	329	0,6030	336	0,6396	342
0,9	0,5123	322	0,5445	329	0,5774	336	0,6110	343	0,6453	350
1,0	0,5182	329	0,5511	335	0,5846	343	0,6189	351	0,6540	358
1,1	0,5242	334	0,5576	342	0,5918	350	0,6268	359	0,6627	366
1,2	0,5301	341	0,5642	349	0,5991	357	0,6348	365	0,6713	374
1,3	0,5360	347	0,5707	356	0,6063	364	0,6427	373	0,6800	382
1,4	0,5419	354	0,5773	362	0,6135	372	0,6507	380	0,6887	390
1,5	0,5478	360	0,5838	370	0,6208	378	0,6586	388	0,6974	398
1,6	0,5537	367	0,5904	376	0,6280	386	0,6666	395	0,7061	406
1,7	0,5596	373	0,5969	383	0,6352	393	0,6745	403	0,7148	414
1,8	0,5655	380	0,6035	390	0,6425	400	0,6825	410	0,7235	422
1,9	0,5715	385	0,6100	397	0,6497	407	0,6904	418	0,7322	430
2,0	0,5774	392	0,6166	403	0,6569	415	0,6984	425	0,7409	438
2,1	0,5833	398	0,6231	410	0,6641	422	0,7063	433	0,7496	445
2,2	0,5892	405	0,6297	417	0,6714	428	0,7142	441	0,7583	453
2,3	0,5951	412	0,6363	423	0,6786	436	0,7222	448	0,7670	461
2,4	0,6010	418	0,6428	430	0,6858	443	0,7301	456	0,7757	469
2,5	0,6069	425	0,6494	437	0,6931	450	0,7381	463	0,7844	477
2,6	0,6128	431	0,6559	444	0,7003	457	0,7460	471	0,7931	485
2,7	0,6188	437	0,6625	450	0,7075	465	0,7540	478	0,8018	493
2,8	0,6247	443	0,6690	458	0,7148	471	0,7619	486	0,8105	501
2,9	0,6306	450	0,6756	464	0,7220	479	0,7699	493	0,8192	509
3,0	0,6365	456	0,6821	471	0,7292	486	0,7778	501	0,8279	516
3,1	0,6424	463	0,6887	478	0,7365	493	0,7858	508	0,8366	524
3,2	0,6483	469	0,6952	485	0,7437	500	0,7937	516	0,8453	532
3,3	0,6542	476	0,7018	491	0,7509	507	0,8016	524	0,8540	540
3,4	0,6601	482	0,7083	498	0,7581	515	0,8096	531	0,8627	548
3,5	0,6661	488	0,7149	505	0,7654	521	0,8175	539	0,8714	556
3,6	0,6720	494	0,7214	512	0,7726	529	0,8255	546	0,8801	564
3,7	0,6779	501	0,7280	518	0,7798	536	0,8334	554	0,8888	572
3,8	0,6838	507	0,7345	526	0,7871	543	0,8414	561	0,8975	579
3,9	0,6897	514	0,7411	532	0,7943	550	0,8493	569	0,9062	587
4,0	0,6956	521	0,7477	538	0,8010	558	0,8573	576	0,9149	595
4,1	0,7015	527	0,7542	546	0,8088	564	0,8652	584	0,9236	603
4,2	0,7074	534	0,7608	552	0,8160	572	0,8732	591	0,9323	611
	$\Delta_v = 59$.		$\Delta_v = 65$.		$\Delta_v = 72$.		$\Delta_v = 79$.		$\Delta_v = 87$.	

Digitized by Google

$^2.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$; $z = \frac{a\,x}{c}$, $V_0^2 = \frac{a^2 V_1^2}{r^2}$.

	$z = 0{,}50$.		$z = 0{,}52$.		$z = 0{,}54$.		$z = 0{,}56$.		$z = 0{,}58$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,5949	281	0,6230	289	0,6519	291	0,6810	295	0,7105	299
0,1	0,6044	289	0,6333	298	0,6631	300	0,6931	304	0,7235	309
0,2	0,6139	297	0,6436	307	0,6743	309	0,7052	314	0,7366	319
0,3	0,6234	306	0,6540	314	0,6854	319	0,7173	323	0,7496	329
0,4	0,6328	315	0,6643	323	0,6966	328	0,7294	333	0,7627	339
0,5	0,6423	323	0,6746	332	0,7078	337	0,7415	342	0,7757	349
0,6	0,6518	331	0,6849	341	0,7190	346	0,7536	352	0,7888	358
0,7	0,6613	339	0,6952	350	0,7302	355	0,7657	361	0,8018	369
0,8	0,6708	348	0,7056	358	0,7414	364	0,7778	371	0,8149	378
0,9	0,6803	356	0,7159	367	0,7526	371	0,7897	382	0,8279	389
1,0	0,6898	364	0,7262	376	0,7638	381	0,8019	391	0,8410	398
1,1	0,6993	372	0,7365	384	0,7749	391	0,8140	400	0,8540	408
1,2	0,7087	382	0,7469	392	0,7861	400	0,8261	410	0,8671	418
1,3	0,7182	390	0,7572	401	0,7973	409	0,8382	419	0,8801	428
1,4	0,7277	398	0,7675	410	0,8085	418	0,8503	428	0,8931	439
1,5	0,7372	406	0,7778	419	0,8197	427	0,8624	437	0,9061	449
1,6	0,7467	415	0,7882	427	0,8309	436	0,8745	447	0,9192	458
1,7	0,7562	423	0,7985	436	0,8421	445	0,8866	457	0,9323	468
1,8	0,7657	431	0,8088	445	0,8533	454	0,8987	466	0,9453	478
1,9	0,7752	439	0,8191	453	0,8644	464	0,9108	476	0,9584	487
2,0	0,7847	447	0,8294	462	0,8756	473	0,9229	485	0,9714	498
2,1	0,7941	457	0,8398	470	0,8868	482	0,9350	495	0,9845	507
2,2	0,8036	465	0,8501	479	0,8980	491	0,9471	504	0,9976	518
2,3	0,8131	473	0,8604	488	0,9092	500	0,9592	514	1,0106	527
2,4	0,8226	481	0,8707	497	0,9204	509	0,9713	523	1,0236	537
2,5	0,8321	490	0,8811	505	0,9316	518	0,9834	533	1,0367	547
2,6	0,8416	498	0,8914	514	0,9428	527	0,9955	542	1,0497	557
2,7	0,8511	506	0,9017	522	0,9539	537	1,0076	552	1,0628	568
2,8	0,8606	514	0,9120	531	0,9601	546	1,0197	561	1,0758	578
2,9	0,8701	523	0,9224	539	0,9763	555	1,0318	571	1,0889	589
3,0	0,8795	532	0,9327	548	0,9875	564	1,0439	580	1,1019	600
3,1	0,8890	540	0,9430	557	0,9987	573	1,0560	590	1,1150	609
3,2	0,8985	548	0,9533	566	1,0099	582	1,0681	599	1,1280	620
3,3	0,9080	556	0,9636	575	1,0211	591	1,0802	609	1,1411	629
3,4	0,9175	565	0,9740	583	1,0323	600	1,0923	618	1,1541	640
3,5	0,9270	573	0,9843	591	1,0434	610	1,1044	627	1,1671	650
3,6	0,9365	581	0,9946	600	1,0546	619	1,1165	637	1,1802	659
3,7	0,9460	589	1,0049	609	1,0658	628	1,1286	646	1,1932	670
3,8	0,9554	599	1,0153	617	1,0770	637	1,1407	656	1,2063	679
3,9	0,9649	607	1,0256	626	1,0882	646	1,1528	665	1,2193	690
4,0	0,9744	615	1,0359	635	1,0994	655	1,1649	675	1,2324	699
4,1	0,9839	623	1,0462	644	1,1106	664	1,1770	684	1,2454	709
4,2	0,9934	632	1,0566	652	1,1218	673	1,1891	694	1,2585	719
	$\Delta_v = 95$.		$\Delta_v = 103$.		$\Delta_v = 112$.		$\Delta_v = 121$.		$\Delta_v = 133$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}60$.		$z = 0{,}62$.		$z = 0{,}64$.		$z = 0{,}66$.		$z = 0{,}68$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,7404	303	0,7707	308	0,8015	312	0,8327	316	0,8643	321
0,1	0,7544	314	0,7858	319	0,8177	323	0,8500	328	0,8828	333
0,2	0,7685	324	0,8009	329	0,8338	334	0,8672	340	0,9012	345
0,3	0,7825	335	0,8160	340	0,8500	345	0,8845	351	0,9196	358
0,4	0,7966	344	0,8310	351	0,8661	357	0,9018	363	0,9381	369
0,5	0,8106	355	0,8461	362	0,8823	368	0,9191	374	0,9565	382
0,6	0,8246	366	0,8612	372	0,8984	379	0,9363	387	0,9750	393
0,7	0,8387	376	0,8763	383	0,9146	390	0,9536	398	0,9934	406
0,8	0,8527	386	0,8913	394	0,9307	402	0,9709	409	1,0118	418
0,9	0,8668	396	0,9064	405	0,9469	412	0,9881	422	1,0303	430
1,0	0,8808	407	0,9215	415	0,9630	424	1,0054	433	1,0487	442
1,1	0,8948	417	0,9365	427	0,9792	435	1,0227	444	1,0671	455
1,2	0,9089	427	0,9516	437	0,9953	446	1,0399	457	1,0856	466
1,3	0,9229	439	0,9668	447	1,0115	457	1,0572	468	1,1040	479
1,4	0,9370	450	0,9820	456	1,0276	469	1,0745	479	1,1224	491
1,5	0,9510	460	0,9970	468	1,0438	480	1,0918	491	1,1409	503
1,6	0,9650	471	1,0121	478	1,0599	491	1,1090	503	1,1593	515
1,7	0,9791	481	1,0272	489	1,0761	502	1,1263	514	1,1777	528
1,8	0,9931	492	1,0423	499	1,0922	514	1,1436	526	1,1962	539
1,9	1,0071	502	1,0573	511	1,1084	524	1,1608	538	1,2146	552
2,0	1,0212	513	1,0725	520	1,1245	536	1,1781	549	1,2330	564
2,1	1,0352	523	1,0875	532	1,1407	547	1,1954	561	1,2515	576
2,2	1,0493	533	1,1026	542	1,1568	559	1,2127	572	1,2699	590
2,3	1,0633	543	1,1176	554	1,1730	569	1,2299	584	1,2883	601
2,4	1,0773	554	1,1327	564	1,1891	581	1,2472	596	1,3068	612
2,5	1,0914	564	1,1478	575	1,2053	592	1,2645	607	1,3252	625
2,6	1,1054	574	1,1628	586	1,2214	603	1,2817	619	1,3436	637
2,7	1,1196	583	1,1779	597	1,2376	614	1,2990	631	1,3621	649
2,8	1,1336	594	1,1930	607	1,2537	626	1,3163	642	1,3805	661
2,9	1,1478	603	1,2081	618	1,2699	636	1,3335	655	1,3990	673
3,0	1,1619	612	1,2231	629	1,2860	648	1,3508	666	1,4174	685
3,1	1,1759	623	1,2382	640	1,3022	659	1,3681	677	1,4358	698
3,2	1,1900	633	1,2533	650	1,3183	671	1,3854	689	1,4543	709
3,3	1,2040	644	1,2684	661	1,3345	681	1,4026	701	1,4727	722
3,4	1,2181	653	1,2834	672	1,3506	693	1,4199	712	1,4911	734
3,5	1,2321	664	1,2985	683	1,3668	704	1,4372	724	1,5096	746
3,6	1,2461	675	1,3136	693	1,3829	715	1,4544	736	1,5280	758
3,7	1,2602	685	1,3287	704	1,3991	726	1,4717	747	1,5464	779
3,8	1,2742	695	1,3437	715	1,4152	738	1,4890	759	1,5649	782
3,9	1,2883	705	1,3588	726	1,4314	748	1,5062	771	1,5833	795
4,0	1,3028	716	1,3739	736	1,4475	760	1,5235	782	1,6017	807
4,1	1,3163	727	1,3890	747	1,4637	771	1,5408	794	1,6202	819
4,2	1,3304	736	1,4040	758	1,4798	783	1,5581	805	1,6386	831
	$\Delta_v = 140$.		$\Delta_v = 151$.		$\Delta_v = 162$.		$\Delta_v = 173$.		$\Delta_v = 184$.	

Digitized by Google

$$z.\mathfrak{P}(z, V_0^2); \quad z = \frac{\alpha x}{c}, \quad V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 0{,}70$.		$z = 0{,}72$.		$z = 0{,}74$.		$z = 0{,}76$.		$z = 0{,}78$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,8964	326	0,9290	330	0,9620	335	0,9955	339	1,0294	345
0,1	0,9161	338	0,9499	343	0,9842	348	1,0190	354	1,0544	358
0,2	0,9357	351	0,9708	356	1,0064	362	1,0426	367	1,0793	378
0,3	0,9554	363	0,9917	369	1,0286	375	1,0661	381	1,1042	388
0,4	0,9750	376	1,0126	382	1,0508	388	1,0896	396	1,1292	402
0,5	0,9947	388	1,0335	395	1,0730	402	1,1132	409	1,1541	417
0,6	1,0143	401	1,0544	408	1,0952	415	1,1367	424	1,1791	431
0,7	1,0340	413	1,0753	421	1,1174	429	1,1603	437	1,2040	445
0,8	1,0536	426	1,0962	434	1,1396	442	1,1838	451	1,2289	460
0,9	1,0733	438	1,1171	447	1,1618	456	1,2074	465	1,2539	474
1,0	1,0929	451	1,1380	460	1,1840	469	1,2309	479	1,2788	489
1,1	1,1126	463	1,1589	473	1,2062	483	1,2545	493	1,3038	503
1,2	1,1322	476	1,1798	486	1,2284	496	1,2780	507	1,3287	518
1,3	1,1519	488	1,2007	499	1,2506	510	1,3016	521	1,3537	532
1,4	1,1715	501	1,2216	512	1,2728	523	1,3251	535	1,3786	546
1,5	1,1912	513	1,2425	525	1,2950	537	1,3487	548	1,4035	561
1,6	1,2108	525	1,2633	539	1,3172	550	1,3722	563	1,4285	575
1,7	1,2305	537	1,2842	552	1,3394	564	1,3958	576	1,4534	590
1,8	1,2501	550	1,3051	565	1,3616	577	1,4193	591	1,4784	604
1,9	1,2698	562	1,3260	578	1,3838	590	1,4428	605	1,5033	619
2,0	1,2894	575	1,3469	591	1,4060	604	1,4664	618	1,5282	634
2,1	1,3091	587	1,3678	604	1,4282	617	1,4899	633	1,5532	647
2,2	1,3289	598	1,3887	617	1,4504	631	1,5135	646	1,5781	662
2,3	1,3484	612	1,4096	630	1,4726	644	1,5370	661	1,6031	676
2,4	1,3680	625	1,4305	643	1,4948	658	1,5606	674	1,6280	691
2,5	1,3877	637	1,4514	656	1,5170	671	1,5841	689	1,6530	705
2,6	1,4073	650	1,4723	669	1,5392	685	1,6077	702	1,6779	720
2,7	1,4270	662	1,4932	682	1,5614	698	1,6312	716	1,7028	735
2,8	1,4466	676	1,5142	694	1,5836	712	1,6548	730	1,7278	748
2,9	1,4663	687	1,5350	708	1,6058	725	1,6783	744	1,7527	769
3,0	1,4859	700	1,5559	721	1,6280	739	1,7019	758	1,7777	777
3,1	1,5056	712	1,5768	734	1,6502	752	1,7254	772	1,8026	792
3,2	1,5252	725	1,5977	746	1,6723	766	1,7489	787	1,8276	806
3,3	1,5449	737	1,6186	759	1,6945	780	1,7725	800	1,8525	821
3,4	1,5645	750	1,6395	772	1,7167	793	1,7960	814	1,8774	835
3,5	1,5842	762	1,6604	785	1,7389	807	1,8196	828	1,9024	849
3,6	1,6038	775	1,6813	798	1,7611	820	1,8431	842	1,9273	864
3,7	1,6235	787	1,7022	811	1,7833	834	1,8667	856	1,9523	878
3,8	1,6431	800	1,7231	824	1,8055	847	1,8902	870	1,9772	893
3,9	1,6628	812	1,7440	837	1,8277	861	1,9138	884	2,0022	907
4,0	1,6824	825	1,7649	850	1,8499	874	1,9373	898	2,0271	922
4,1	1,7021	837	1,7858	863	1,8721	888	1,9609	911	2,0520	936
4,2	1,7217	850	1,8067	876	1,8943	901	1,9844	926	2,0770	950
	$\Delta_v = 197$.		$\Delta_v = 209$.		$\Delta_v = 222$.		$\Delta_v = 235$.		$\Delta_v = 249$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}80$.		$z = 0{,}82$.		$z = 0{,}84$.		$z = 0{,}86$.		$z = 0{,}88$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,0639	349	1,0988	354	1,1342	359	1,1701	365	1,2066	370
0,1	1,0902	365	1,1267	369	1,1636	376	1,2012	380	1,2392	387
0,2	1,1166	379	1,1545	385	1,1930	392	1,2322	397	1,2719	404
0,3	1,1430	394	1,1824	401	1,2225	407	1,2632	414	1,3046	420
0,4	1,1694	409	1,2103	416	1,2519	423	1,2942	430	1,3372	438
0,5	1,1958	424	1,2382	431	1,2813	439	1,3252	447	1,3699	454
0,6	1,2222	438	1,2660	447	1,3107	455	1,3562	463	1,4025	472
0,7	1,2485	454	1,2939	463	1,3402	470	1,3872	480	1,4352	489
0,8	1,2749	469	1,3218	478	1,3696	486	1,4182	497	1,4679	505
0,9	1,3013	484	1,3497	493	1,3990	503	1,4493	512	1,5005	523
1,0	1,3277	499	1,3776	508	1,4284	519	1,4803	529	1,5332	539
1,1	1,3541	513	1,4054	524	1,4578	535	1,5113	545	1,5658	557
1,2	1,3805	528	1,4338	540	1,4873	550	1,5428	562	1,5985	578
1,3	1,4069	543	1,4612	555	1,5167	566	1,5733	579	1,6312	590
1,4	1,4332	559	1,4891	570	1,5461	582	1,6043	595	1,6638	607
1,5	1,4596	573	1,5169	586	1,5755	599	1,6354	611	1,6965	624
1,6	1,4860	588	1,5448	601	1,6049	615	1,6664	637	1,7291	642
1,7	1,5124	603	1,5727	617	1,6344	630	1,6974	644	1,7618	658
1,8	1,5388	618	1,6006	632	1,6638	646	1,7284	661	1,7945	675
1,9	1,5652	638	1,6285	647	1,6932	662	1,7594	677	1,8271	692
2,0	1,5916	647	1,6563	663	1,7226	678	1,7904	694	1,8598	705
2,1	1,6179	663	1,6842	678	1,7520	694	1,8214	710	1,8924	726
2,2	1,6443	678	1,7121	694	1,7815	709	1,8524	727	1,9251	737
2,3	1,6707	693	1,7400	709	1,8109	726	1,8835	742	1,9577	761
2,4	1,6971	708	1,7679	724	1,8403	742	1,9145	759	1,9904	777
2,5	1,7235	722	1,7957	740	1,8697	758	1,9455	776	2,0231	794
2,6	1,7499	737	1,8236	755	1,8991	774	1,9765	792	2,0557	811
2,7	1,7763	752	1,8515	771	1,9286	789	2,0075	809	2,0884	828
2,8	1,8026	768	1,8794	786	1,9580	805	2,0385	825	2,1210	845
2,9	1,8290	782	1,9072	802	1,9874	821	2,0695	842	2,1537	862
3,0	1,8554	797	1,9351	817	2,0168	838	2,1006	858	2,1864	878
3,1	1,8818	812	1,9630	832	2,0462	854	2,1316	874	2,2190	896
3,2	1,9082	827	1,9909	848	2,0757	869	2,1626	890	2,2516	914
3,3	1,9346	842	2,0188	863	2,1051	885	2,1936	907	2,2843	930
3,4	1,9609	857	2,0466	879	2,1345	901	2,2246	924	2,3170	947
3,5	1,9873	872	2,0745	894	2,1639	917	2,2556	941	2,3497	963
3,6	2,0137	887	2,1024	909	2,1933	933	2,2866	957	2,3823	981
3,7	2,0401	902	2,1303	925	2,2228	949	2,3177	972	2,4149	998
3,8	2,0665	916	2,1581	941	2,2522	965	2,3487	989	2,4476	1015
3,9	2,0929	931	2,1860	956	2,2816	981	2,3797	1006	2,4803	1032
4,0	2,1193	946	2,2139	971	2,3110	997	2,4107	1023	2,5130	1048
4,1	2,1456	962	2,2418	987	2,3405	1012	2,4417	1039	2,5456	1066
4,2	2,1720	977	2,2697	1002	2,3699	1038	2,4727	1056	2,5783	1082
	$\Delta_v = 264$.		$\Delta_v = 279$.		$\Delta_v = 294$.		$\Delta_v = 310$.		$\Delta_v = 327$.	

Digitized by Google

$z\mathfrak{P}(z, V_0^2)$; $z = \frac{\alpha x}{c}$, $V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}$.

	$z = 0{,}90$.		$z = 0{,}92$.		$z = 0{,}94$.		$z = 0{,}96$.		$z = 0{,}98$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,2436	375	1,2811	380	1,3191	386	1,3577	391	1,3968	398
0,1	1,2779	393	1,3172	398	1,3570	405	1,3975	410	1,4385	417
0,2	1,3123	410	1,3533	416	1,3949	423	1,4372	430	1,4802	437
0,3	1,3466	428	1,3894	434	1,4328	442	1,4770	449	1,5219	456
0,4	1,3810	445	1,4255	453	1,4708	456	1,5164	472	1,5636	476
0,5	1,4153	463	1,4616	471	1,5067	479	1,5566	487	1,6053	495
0,6	1,4497	480	1,4977	489	1,5466	497	1,5963	507	1,6470	515
0,7	1,4841	497	1,5338	507	1,5845	516	1,6361	525	1,6886	536
0,8	1,5184	515	1,5699	525	1,6224	535	1,6759	544	1,7303	555
0,9	1,5528	542	1,6060	543	1,6603	554	1,7157	563	1,7720	575
1,0	1,5871	550	1,6421	561	1,6982	572	1,7554	583	1,8137	594
1,1	1,6215	567	1,6782	579	1,7361	591	1,7952	602	1,8554	614
1,2	1,6558	585	1,7143	597	1,7740	610	1,8350	621	1,8971	633
1,3	1,6902	603	1,7505	615	1,8120	628	1,8748	640	1,9388	653
1,4	1,7245	621	1,7866	633	1,8499	646	1,9145	659	1,9804	674
1,5	1,7589	638	1,8227	651	1,8878	665	1,9543	678	2,0221	693
1,6	1,7933	655	1,8588	669	1,9257	684	1,9941	697	2,0638	713
1,7	1,8276	673	1,8949	687	1,9636	703	2,0339	716	2,1055	732
1,8	1,8620	690	1,9310	705	2,0015	721	2,0736	736	2,1472	752
1,9	1,8963	708	1,9671	723	2,0394	740	2,1134	755	2,1889	771
2,0	1,9307	725	2,0032	741	2,0773	759	2,1532	773	2,2305	792
2,1	1,9650	743	2,0393	759	2,1152	778	2,1930	792	2,2722	811
2,2	1,9994	760	2,0754	777	2,1531	796	2,2327	812	2,3139	831
2,3	2,0338	777	2,1115	796	2,1911	814	2,2725	831	2,3556	851
2,4	2,0681	795	2,1476	814	2,2290	833	2,3123	850	2,3973	870
2,5	2,1025	812	2,1837	832	2,2669	852	2,3521	869	2,4390	890
2,6	2,1368	830	2,2198	850	2,3048	870	2,3918	889	2,4807	909
2,7	2,1712	847	2,2559	868	2,3427	889	2,4316	907	2,5223	930
2,8	2,2055	866	2,2921	885	2,3806	908	2,4714	926	2,5640	949
2,9	2,2399	883	2,3282	903	2,4185	927	2,5112	945	2,6057	969
3,0	2,2742	901	2,3643	921	2,4564	945	2,5509	965	2,6474	989
3,1	2,3086	918	2,4004	939	2,4943	964	2,5907	984	2,6891	1008
3,2	2,3430	935	2,4365	958	2,5323	982	2,6305	1003	2,7308	1028
3,3	2,3773	953	2,4726	976	2,5702	1001	2,6703	1021	2,7724	1048
3,4	2,4117	970	2,5087	994	2,6081	1019	2,7100	1041	2,8141	1068
3,5	2,4460	988	2,5448	1012	2,6460	1038	2,7498	1060	2,8558	1087
3,6	2,4804	1005	2,5809	1030	2,6839	1057	2,7896	1079	2,8975	1107
3,7	2,5147	1023	2,6170	1048	2,7218	1076	2,8294	1098	2,9392	1126
3,8	2,5491	1040	2,6531	1066	2,7597	1094	2,8691	1118	2,9809	1146
3,9	2,5835	1057	2,6892	1084	2,7976	1113	2,9089	1137	3,0226	1166
4,0	2,6178	1075	2,7253	1102	2,8355	1132	2,9487	1155	3,0642	1186
4,1	2,6522	1092	2,7614	1121	2,8735	1150	2,9885	1174	3,1059	1206
4,2	2,6865	1110	2,7975	1139	2,9114	1168	3,0282	1194	3,1476	1225
	$\Delta_v = 344$.		$\Delta_v = 361$.		$\Delta_v = 379$.		$\Delta_v = 398$.		$\Delta_v = 417$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}00$.		$z = 1{,}02$.		$z = 1{,}04$.		$z = 1{,}06$.		$z = 1{,}08$.	
V_0^2	$z.\Phi(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\Phi(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\Phi(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\Phi(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\Phi(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,4366	403	1,4769	408	1,5177	415	1,5592	421	1,6013	426
0,1	1,4802	423	1,5225	430	1,5655	436	1,6091	443	1,6534	449
0,2	1,5239	443	1,5682	451	1,6133	457	1,6590	465	1,7055	472
0,3	1,5675	464	1,6139	471	1,6610	479	1,7089	487	1,7576	495
0,4	1,6112	484	1,6596	492	1,7088	501	1,7589	509	1,8098	517
0,5	1,6548	505	1,7053	513	1,7566	522	1,8088	531	1,8619	540
0,6	1,6985	525	1,7510	534	1,8044	543	1,8587	553	1,9140	563
0,7	1,7422	544	1,7966	555	1,8521	565	1,9086	575	1,9661	586
0,8	1,7858	565	1,8423	576	1,8999	586	1,9585	598	2,0183	608
0,9	1,8295	585	1,8880	597	1,9477	608	2,0085	619	2,0704	631
1,0	1,8731	606	1,9337	617	1,9954	630	2,0584	641	2,1225	654
1,1	1,9168	626	1,9794	638	2,0432	651	2,1083	663	2,1746	677
1,2	1,9604	641	2,0251	659	2,0910	672	2,1582	686	2,2268	699
1,3	2,0041	667	2,0708	680	2,1388	693	2,2081	708	2,2789	722
1,4	2,0478	686	2,1164	701	2,1865	716	2,2581	729	2,3310	745
1,5	2,0914	707	2,1621	722	2,2343	737	2,3080	751	2,3831	767
1,6	2,1351	727	2,2078	743	2,2821	758	2,3579	774	2,4353	789
1,7	2,1787	748	2,2535	764	2,3299	719	2,4078	796	2,4874	812
1,8	2,2224	768	2,2992	784	2,3776	801	2,4577	818	2,5395	835
1,9	2,2660	789	2,3449	805	2,4254	823	2,5077	839	2,5916	858
2,0	2,3097	809	2,3906	826	2,4732	844	2,5576	862	2,6438	880
2,1	2,3533	829	2,4362	847	2,5209	866	2,6075	884	2,6959	903
2,2	2,3970	849	2,4819	868	2,5687	887	2,6574	906	2,7480	926
2,3	2,4407	869	2,5276	889	2,6165	908	2,7073	928	2,8001	949
2,4	2,4843	890	2,5733	910	2,6643	929	2,7572	951	2,8523	971
2,5	2,5280	910	2,6190	930	2,7120	952	2,8072	972	2,9044	994
2,6	2,5716	931	2,6647	951	2,7598	973	2,8571	994	2,9565	1017
2,7	2,6153	951	2,7104	972	2,8076	994	2,9070	1016	3,0086	1040
2,8	2,6589	971	2,7560	994	2,8554	1015	2,9569	1039	3,0608	1062
2,9	2,7026	991	2,8017	1014	2,9031	1037	3,0068	1061	3,1129	1085
3,0	2,7463	1011	2,8474	1035	2,9509	1059	3,0568	1082	3,1650	1108
3,1	2,7899	1032	2,8931	1056	2,9987	1080	3,1067	1104	3,2171	1130
3,2	2,8336	1052	2,9388	1076	3,0464	1102	3,1566	1127	3,2693	1152
3,3	2,8772	1073	2,9845	1097	3,0942	1123	3,2065	1149	3,3214	1175
3,4	2,9209	1092	3,0301	1119	3,1420	1144	3,2564	1171	3,3735	1198
3,5	2,9645	1113	3,0758	1140	3,1898	1166	3,3064	1193	3,4257	1220
3,6	3,0082	1133	3,1215	1160	3,2375	1187	3,3562	1216	3,4778	1243
3,7	3,0518	1154	3,1672	1181	3,2853	1209	3,4062	1237	3,5299	1266
3,8	3,0955	1174	3,2129	1202	3,3331	1230	3,4561	1259	3,5820	1289
3,9	3,1392	1194	3,2586	1222	3,3808	1252	3,5060	1282	3,6342	1311
4,0	3,1828	1215	3,3043	1243	3,4286	1274	3,5560	1303	3,6863	1334
4,1	3,2265	1234	3,3499	1265	3,4764	1295	3,6059	1325	3,7384	1357
4,2	3,2701	1255	3,3956	1286	3,5242	1316	3,6558	1347	3,7905	1380
	$\Delta_v = 437$.		$\Delta_v = 457$.		$\Delta_v = 478$.		$\Delta_v = 499$.		$\Delta_v = 521$.	

Digitized by Google

$$z\Phi(z, V_0^2): \quad z = \frac{\alpha x}{c}, \quad V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 1{,}10$.		$z = 1{,}12$.		$z = 1{,}14$.		$z = 1{,}16$.		$z = 1{,}18$.	
V_0	$z\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z	$z\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z	$z\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z	$z\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z	$z\Phi(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,6439	433	1,6872	440	1,7312	445	1,7757	453	1,8210	459
0,1	1,6983	457	1,7440	446	1,7903	470	1,8373	478	1,8851	484
0,2	1,7527	480	1,8007	487	1,8494	495	1,8989	503	1,9492	510
0,3	1,8071	503	1,8574	511	1,9085	520	1,9605	528	2,0133	536
0,4	1,8615	526	1,9141	535	1,9676	544	2,0220	553	2,0773	583
0,5	1,9159	550	1,9709	559	2,0268	568	2,0836	578	2,1414	599
0,6	1,9708	573	2,0276	583	2,0859	593	2,1452	603	2,2055	615
0,7	2,0247	596	2,0843	607	2,1450	617	2,2067	629	2,2696	641
0,8	2,0791	619	2,1410	631	2,2041	642	2,2683	654	2,3337	667
0,9	2,1335	643	2,1978	654	2,2632	667	2,3299	679	2,3978	692
1,0	2,1879	666	2,2545	678	2,3223	692	2,3915	704	2,4619	718
1,1	2,2423	689	2,3112	703	2,3815	715	2,4530	730	2,5260	744
1,2	2,2967	712	2,3679	727	2,4406	740	2,5146	755	2,5901	770
1,3	2,3511	735	2,4246	751	2,4997	765	2,5762	780	2,6542	796
1,4	2,4055	759	2,4814	774	2,5588	790	2,6378	805	2,7183	822
1,5	2,4598	785	2,5381	798	2,6179	814	2,6993	831	2,7824	848
1,6	2,5142	806	2,5948	822	2,6770	839	2,7609	856	2,8465	873
1,7	2,5686	829	2,6515	847	2,7362	863	2,8225	881	2,9106	899
1,8	2,6230	853	2,7083	870	2,7953	888	2,8841	906	2,9747	925
1,9	2,6774	876	2,7650	894	2,8544	912	2,9456	932	3,0388	951
2,0	2,7318	899	2,8217	918	2,9135	937	3,0072	957	3,1029	977
2,1	2,7862	922	2,8784	942	2,9726	962	3,0688	982	3,1670	1003
2,2	2,8406	946	2,9352	966	3,0318	986	3,1304	1007	3,2311	1029
2,3	2,8950	969	2,9919	990	3,0909	1010	3,1919	1033	3,2952	1054
2,4	2,9494	992	3,0486	1014	3,1500	1035	3,2535	1058	3,3593	1080
2,5	3,0038	1015	3,1053	1038	3,2091	1060	3,3151	1083	3,4234	1106
2,6	3,0582	1039	3,1621	1061	3,2682	1085	3,3767	1108	3,4875	1132
2,7	3,1126	1062	3,2188	1085	3,3273	1109	3,4382	1135	3,5517	1157
2,8	3,1670	1085	3,2755	1110	3,3865	1133	3,4998	1160	3,6158	1183
2,9	3,2214	1108	3,3322	1134	3,4456	1158	3,5614	1185	3,6799	1209
3,0	3,2758	1132	3,3890	1157	3,5047	1183	3,6230	1209	3,7439	1235
3,1	3,3301	1156	3,4457	1181	3,5638	1207	3,6845	1235	3,8080	1261
3,2	3,3845	1179	3,5024	1205	3,6229	1232	3,7461	1260	3,8721	1287
3,3	3,4389	1202	3,5591	1229	3,6820	1257	3,8077	1285	3,9362	1313
3,4	3,4933	1225	3,6158	1254	3,7412	1281	3,8693	1310	4,0003	1339
3,5	3,5477	1249	3,6726	1277	3,8003	1305	3,9308	1336	4,0644	1365
3,6	3,6021	1272	3,7293	1301	3,8594	1330	3,9924	1362	4,1286	1390
3,7	3,6565	1295	3,7860	1325	3,9185	1355	4,0540	1388	4,1928	1415
3,8	3,7109	1318	3,8427	1349	3,9776	1380	4,1156	1413	4,2569	1440
3,9	3,7653	1342	3,8995	1372	4,0367	1404	4,1771	1439	4,3210	1466
4,0	3,8197	1365	3,9562	1397	4,0959	1428	4,2387	1464	4,3851	1492
4,1	3,8741	1388	4,0129	1421	4,1550	1453	4,3003	1489	4,4492	1518
4,2	3,9285	1411	4,0696	1445	4,2141	1478	4,3619	1514	4,5133	1544
	$\Delta_v = 544$.		$\Delta_v = 567$.		$\Delta_v = 591$.		$\Delta_v = 616$.		$\Delta_v = 641$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}20$.		$z = 1{,}22$.		$z = 1{,}24$.		$z = 1{,}26$.		$z = 1{,}28$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,8669	465	1,9134	473	1,9607	479	2,0086	486	2,0572	494
0,1	1,9335	493	1,9828	499	2,0327	508	2,0835	515	2,1350	523
0,2	2,0002	519	2,0521	527	2,1048	535	2,1583	544	2,2127	552
0,3	2,0669	545	2,1214	555	2,1769	563	2,2332	572	2,2904	582
0,4	2,1356	552	2,1908	581	2,2489	591	2,3080	601	2,3681	612
0,5	2,2003	598	2,2601	609	2,3210	619	2,3829	630	2,4459	640
0,6	2,2670	625	2,3295	636	2,3931	647	2,4578	658	2,5236	670
0,7	2,3337	651	2,3988	663	2,4651	675	2,5326	687	2,6013	699
0,8	2,4004	678	2,4682	690	2,5372	703	2,6075	715	2,6790	729
0,9	2,4670	705	2,5375	718	2,6093	730	2,6823	745	2,7568	758
1,0	2,5337	731	2,6068	745	2,6813	759	2,7572	773	2,8345	787
1,1	2,6004	758	2,6762	772	2,7534	787	2,8321	801	2,9122	817
1,2	2,6671	784	2,7455	800	2,8255	814	2,9069	830	2,9899	846
1,3	2,7338	811	2,8149	826	2,8975	843	2,9818	859	3,0677	875
1,4	2,8005	837	2,8842	854	2,9696	861	3,0567	887	3,1454	905
1,5	2,8672	864	2,9536	881	3,0417	898	3,1315	916	3,2231	934
1,6	2,9338	891	3,0229	908	3,1137	927	3,2064	944	3,3008	964
1,7	3,0005	917	3,0922	936	3,1858	954	3,2812	974	3,3786	992
1,8	3,0672	944	3,1616	963	3,2579	982	3,3561	1002	3,4563	1022
1,9	3,1339	970	3,2309	990	3,3299	1011	3,4310	1030	3,5340	1052
2,0	3,2006	997	3,3003	1017	3,4020	1038	3,5058	1059	3,6117	1081
2,1	3,2673	1023	3,3696	1045	3,4741	1066	3,5807	1088	3,6895	1110
2,2	3,3340	1050	3,4390	1071	3,5461	1094	3,6555	1117	3,7672	1140
2,3	3,4006	1077	3,5083	1099	3,6182	1122	3,7304	1145	3,8449	1169
2,4	3,4673	1103	3,5776	1127	3,6903	1150	3,8053	1173	3,9226	1199
2,5	3,5340	1130	3,6470	1155	3,7623	1178	3,8801	1203	4,0004	1227
2,6	3,6007	1156	3,7163	1181	3,8344	1206	3,9550	1231	4,0781	1257
2,7	3,6674	1183	3,7857	1208	3,9065	1233	4,0298	1260	4,1558	1287
2,8	3,7341	1209	3,8550	1235	3,9785	1262	4,1047	1288	4,2335	1316
2,9	3,8008	1235	3,9243	1263	4,0506	1290	4,1796	1317	4,3113	1345
3,0	3,8674	1263	3,9937	1290	4,1227	1317	4,2544	1346	4,3890	1374
3,1	3,9341	1289	4,0630	1317	4,1947	1346	4,3293	1374	4,4667	1404
3,2	4,0008	1316	4,1324	1344	4,2668	1373	4,4041	1403	4,5444	1434
3,3	4,0675	1342	4,2017	1372	4,3389	1401	4,4790	1432	4,6222	1462
3,4	4,1342	1369	4,2711	1398	4,4109	1430	4,5539	1460	4,6999	1492
3,5	4,2009	1395	4,3404	1426	4,4830	1457	4,6287	1489	4,7776	1521
3,6	4,2676	1421	4,4097	1454	4,5551	1485	4,7036	1517	4,8553	1551
3,7	4,3343	1448	4,4791	1480	4,6271	1513	4,7784	1547	4,9331	1580
3,8	4,4009	1475	4,5484	1508	4,6992	1541	4,8533	1575	5,0108	1609
3,9	4,4676	1502	4,6178	1535	4,7713	1569	4,9282	1603	5,0885	1639
4,0	4,5343	1528	4,6871	1562	4,8433	1597	5,0030	1632	5,1662	1668
4,1	4,6010	1555	4,7565	1589	4,9154	1625	5,0779	1661	5,2440	1697
4,2	4,6677	1581	4,8258	1617	4,9875	1652	5,1527	1691	5,3218	1726
	$\Delta_v = 667$.		$\Delta_v = 693$.		$\Delta_v = 721$.		$\Delta_v = 749$.		$\Delta_v = 777$.	

Digitized by Google

$$z\Phi(z,\Gamma_0^2) : z = \frac{zz}{c} \cdot \Gamma_0^3 = \frac{z^2\Gamma_0^2}{r^2}.$$

	$z=1{,}30$		$z=1{,}32$		$z=1{,}34$		$z=1{,}36$		$z=1{,}38$	
Γ_0^2	$z\Phi(z,\Gamma_0^2)$	Δ_z	$z\Phi(z,\Gamma_0^2)$	Δ_z	$z\Phi(z,\Gamma_0^2)$	Δ_z	$z\Phi(z,\Gamma_0^2)$	Δ_z	$z\Phi(z,\Gamma_0^2)$	Δ_z
0,0	2,1066	501	2,1567	505	2,2073	516	2,2591	534	2,3115	531
0,1	2,1573	531	2,2404	539	2,2943	547	2,3490	556	2,4046	564
0,2	2,2679	561	2,3240	570	2,3810	579	2,4389	588	2,4977	596
0,3	2,3456	591	2,4077	601	2,4678	610	2,5288	621	2,5909	630
0,4	2,4298	621	2,4914	631	2,5545	643	2,6187	656	2,6846	668
0,5	2,5099	651	2,5750	663	2,6413	674	2,7087	685	2,7772	697
0,6	2,5906	681	2,6587	693	2,7260	706	2,7966	717	2,8703	730
0,7	2,6712	712	2,7424	724	2,8148	737	2,8865	750	2,9635	765
0,8	2,7519	742	2,8261	754	2,9015	769	2,9764	782	3,0566	796
0,9	2,8326	771	2,9097	786	2,9963	800	3,0663	815	3,1498	829
1,0	2,9132	802	2,9934	817	3,0751	831	3,1562	847	3,2429	862
1,1	2,9989	832	3,0771	847	3,1615	863	3,2481	865	3,3386	890
1,2	3,0745	862	3,1607	879	3,2486	894	3,3380	912	3,4292	929
1,3	3,1552	892	3,2444	909	3,3353	926	3,4279	944	3,5223	963
1,4	3,2359	922	3,3281	940	3,4221	956	3,5179	976	3,6155	996
1,5	3,3165	952	3,4117	971	3,5068	990	3,6073	1008	3,7086	1026
1,6	3,3972	982	3,4964	1002	3,5956	1021	3,6977	1041	3,8018	1061
1,7	3,4778	1013	3,5791	1032	3,6823	1053	3,7876	1073	3,8949	1094
1,8	3,5585	1043	3,6623	1063	3,7691	1084	3,8775	1106	3,9861	1127
1,9	3,6392	1072	3,7464	1094	3,8558	1116	3,9674	1138	4,0812	1161
2,0	3,7198	1103	3,8301	1125	3,9426	1147	4,0573	1171	4,1744	1193
2,1	3,8005	1133	3,9138	1165	4,0293	1179	4,1472	1203	4,2675	1227
2,2	3,8812	1162	3,9974	1157	4,1161	1210	4,2371	1235	4,3606	1260
2,3	3,9618	1193	4,0811	1217	4,2028	1243	4,3271	1267	4,4538	1293
2,4	4,0425	1223	4,1648	1248	4,2896	1274	4,4170	1299	4,5469	1326
2,5	4,1231	1253	4,2484	1279	4,3763	1306	4,5069	1332	4,6401	1359
2,6	4,2038	1293	4,3321	1310	4,4631	1337	4,5968	1364	4,7332	1393
2,7	4,2845	1313	4,4158	1340	4,5498	1369	4,6867	1397	4,8264	1425
2,8	4,3651	1344	4,4995	1371	4,6366	1400	4,7766	1429	4,9195	1469
2,9	4,4458	1373	4,5831	1403	4,7234	1431	4,8665	1462	5,0127	1491
3,0	4,5264	1404	4,6668	1433	4,8101	1463	4,9564	1494	5,1058	1525
3,1	4,6071	1434	4,7505	1464	4,8969	1494	5,0463	1526	5,1989	1558
3,2	4,6878	1463	4,8341	1495	4,9836	1526	5,1362	1559	5,2921	1591
3,3	4,7684	1494	4,9178	1526	5,0704	1558	5,2262	1590	5,3852	1625
3,4	4,8491	1524	5,0015	1556	5,1571	1590	5,3161	1623	5,4784	1657
3,5	4,9297	1554	5,0851	1588	5,2439	1621	5,4060	1655	5,5715	1691
3,6	5,0104	1584	5,1688	1618	5,3306	1653	5,4959	1688	5,6647	1723
3,7	5,0911	1614	5,2525	1649	5,4174	1684	5,5858	1720	5,7578	1757
3,8	5,1717	1645	5,3362	1679	5,5041	1716	5,6757	1753	5,8510	1789
3,9	5,2524	1674	5,4198	1711	5,5909	1747	5,7656	1785	5,9441	1823
4,0	5,3330	1705	5,5035	1741	5,6776	1779	5,8555	1818	6,0373	1856
4,1	5,4137	1735	5,5872	1772	5,7644	1810	5,9454	1850	6,1304	1889
4,2	5,4944	1764	5,6708	1803	5,8511	1843	6,0354	1881	6,2235	1923
	$\Delta_v = 807.$		$\Delta_v = 837.$		$\Delta_v = 868.$		$\Delta_v = 899.$		$\Delta_v = 931.$	

Digitized by Google

	$z = 1{,}40$.		$z = 1{,}42$.		$z = 1{,}44$.		$z = 1{,}46$.		$z = 1{,}48$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	2,3646	539	2,4185	547	2,4732	555	2,5287	564	2,5851	572
0,1	2,4610	573	2,5183	582	2,5765	591	2,6356	600	2,6956	609
0,2	2,5575	607	2,6182	616	2,6798	627	2,7425	636	2,8061	646
0,3	2,6539	641	2,7180	651	2,7831	662	2,8493	673	2,9166	683
0,4	2,7504	675	2,8179	686	2,8865	697	2,9562	709	3,0271	721
0,5	2,8469	708	2,9177	721	2,9898	733	3,0631	745	3,1376	758
0,6	2,9433	743	3,0176	755	3,0931	768	3,1699	782	3,2481	795
0,7	3,0398	776	3,1174	790	3,1964	804	3,2768	818	3,3586	832
0,8	3,1362	811	3,2173	824	3,2997	840	3,3837	854	3,4691	870
0,9	3,2327	844	3,3171	860	3,4031	875	3,4906	890	3,5796	907
1,0	3,3291	879	3,4170	894	3,5064	910	3,5974	927	3,6901	944
1,1	3,4256	912	3,5168	929	3,6097	946	3,7043	963	3,8006	981
1,2	3,5221	946	3,6167	963	3,7130	982	3,8112	999	3,9111	1019
1,3	3,6185	980	3,7165	998	3,8163	1017	3,9180	1036	4,0216	1056
1,4	3,7150	1013	3,8163	1034	3,9197	1052	4,0249	1072	4,1321	1093
1,5	3,8114	1048	3,9162	1068	4,0230	1088	4,1318	1109	4,2427	1129
1,6	3,9079	1081	4,0160	1103	4,1263	1123	4,2386	1146	4,3532	1167
1,7	4,0043	1116	4,1159	1137	4,2296	1159	4,3455	1182	4,4637	1204
1,8	4,1008	1149	4,2157	1172	4,3329	1195	4,4524	1218	4,5742	1241
1,9	4,1973	1183	4,3156	1206	4,4362	1231	4,5593	1254	4,6847	1278
2,0	4,2937	1217	4,4154	1242	4,5396	1265	4,6661	1291	4,7952	1316
2,1	4,3902	1251	4,5153	1276	4,6429	1301	4,7730	1327	4,9057	1353
2,2	4,4866	1285	4,6151	1311	4,7462	1337	4,8799	1363	5,0162	1390
2,3	4,5831	1319	4,7150	1345	4,8495	1372	4,9867	1400	5,1267	1427
2,4	4,6795	1353	4,8148	1380	4,9528	1408	5,0936	1436	5,2372	1465
2,5	4,7760	1387	4,9147	1415	5,0562	1443	5,2005	1472	5,3477	1502
2,6	4,8725	1420	5,0145	1450	5,1595	1479	5,3074	1508	5,4582	1539
2,7	4,9689	1455	5,1144	1484	5,2628	1514	5,4142	1545	5,5687	1576
2,8	5,0654	1488	5,2142	1519	5,3661	1550	5,5211	1581	5,6792	1614
2,9	5,1618	1523	5,3141	1553	5,4694	1586	5,6280	1617	5,7897	1651
3,0	5,2583	1556	5,4139	1589	5,5728	1620	5,7348	1654	5,9002	1688
3,1	5,3547	1591	5,5138	1623	5,6761	1656	5,8417	1691	6,0108	1724
3,2	5,4512	1624	5,6136	1658	5,7794	1692	5,9486	1727	6,1213	1762
3,3	5,5477	1658	5,7135	1692	5,8827	1728	6,0555	1763	6,2318	1799
3,4	5,6441	1692	5,8133	1727	5,9860	1763	6,1623	1800	6,3423	1836
3,5	5,7406	1726	5,9132	1761	6,0893	1799	6,2692	1836	6,4528	1873
3,6	5,8370	1760	6,0130	1797	6,1927	1834	6,3761	1872	6,5633	1911
3,7	5,9335	1793	6,1128	1832	6,2960	1869	6,4829	1909	6,6738	1948
3,8	6,0299	1828	6,2127	1866	6,3993	1905	6,5898	1945	6,7843	1985
3,9	6,1264	1861	6,3125	1901	6,5026	1941	6,6967	1981	6,8948	2022
4,0	6,2229	1895	6,4124	1935	6,6059	1977	6,8036	2017	7,0053	2060
4,1	6,3193	1929	6,5122	1971	6,7093	2011	6,9104	2054	7,1158	2097
4,2	6,4158	1963	6,6121	2005	6,8126	2047	7,0173	2090	7,2263	2134
	$\Delta_v = 965$.		$\Delta_v = 998$.		$\Delta_v = 1033$.		$\Delta_v = 1069$.		$\Delta_v = 1105$.	

Digitized by Google

$$z.\mathfrak{P}(z, V_0^2); \quad z = \frac{ax}{c}, \quad V_0^2 = \frac{a^2 V_1^2}{r^2}.$$

	$z = 1{,}50$.		$z = 1{,}52$.		$z = 1{,}54$.		$z = 1{,}56$.		$z = 1{,}58$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	2,6423	580	2,7003	589	2,7592	598	2,8190	607	2,8797	616
0,1	2,7565	618	2,8183	628	2,8811	638	2,9449	648	3,0097	654
0,2	2,8707	657	2,9364	667	3,0031	677	3,0708	689	3,1397	698
0,3	2,9849	695	3,0544	706	3,1250	717	3,1967	729	3,2696	741
0,4	3,0992	732	3,1724	745	3,2469	757	3,3226	770	3,3996	782
0,5	3,2134	770	3,2904	784	3,3688	797	3,4485	810	3,5295	824
0,6	3,3276	809	3,4085	822	3,4907	837	3,5744	851	3,6595	866
0,7	3,4418	847	3,5265	862	3,6127	876	3,7003	892	3,7895	907
0,8	3,5561	884	3,6445	901	3,7346	916	3,8262	932	3,9194	949
0,9	3,6703	923	3,7626	939	3,8565	956	3,9521	973	4,0494	991
1,0	3,7845	961	3,8806	978	3,9784	996	4,0780	1014	4,1794	1032
1,1	3,8987	999	3,9986	1017	4,1003	1036	4,2039	1055	4,3094	1073
1,2	4,0130	1036	4,1166	1057	4,2223	1075	4,3298	1095	4,4393	1115
1,3	4,1272	1075	4,2347	1095	4,3442	1115	4,4557	1136	4,5693	1157
1,4	4,2414	1113	4,3527	1134	4,4661	1155	4,5816	1177	4,6993	1198
1,5	4,3556	1151	4,4707	1173	4,5880	1195	4,7075	1217	4,8292	1240
1,6	4,4699	1189	4,5888	1211	4,7099	1235	4,8334	1258	4,9592	1282
1,7	4,5841	1227	4,7068	1251	4,8319	1275	4,9593	1299	5,0892	1323
1,8	4,6983	1265	4,8248	1290	4,9538	1314	5,0852	1339	5,2191	1365
1,9	4,8125	1304	4,9429	1328	5,0757	1354	5,2111	1380	5,3491	1406
2,0	4,9268	1341	5,0609	1367	5,1976	1394	5,3370	1421	5,4791	1448
2,1	5,0410	1379	5,1789	1406	5,3195	1434	5,4629	1461	5,6090	1490
2,2	5,1552	1417	5,2969	1446	5,4415	1473	5,5888	1502	5,7390	1531
2,3	5,2694	1456	5,4150	1484	5,5634	1513	5,7147	1543	5,8690	1573
2,4	5,3837	1493	5,5330	1523	5,6853	1553	5,8406	1583	5,9989	1615
2,5	5,4979	1531	5,6510	1562	5,8072	1593	5,9665	1624	6,1289	1656
2,6	5,6121	1570	5,7691	1601	5,9292	1632	6,0924	1665	6,2589	1697
2,7	5,7263	1608	5,8871	1640	6,0511	1672	6,2183	1706	6,3889	1739
2,8	5,8406	1645	6,0051	1679	6,1730	1712	6,3442	1746	6,5188	1781
2,9	5,9548	1684	6,1232	1717	6,2949	1752	6,4701	1787	6,6488	1822
3,0	6,0690	1722	6,2412	1756	6,4168	1792	6,5960	1828	6,7788	1864
3,1	6,1832	1760	6,3592	1796	6,5388	1831	6,7219	1868	6,9087	1906
3,2	6,2975	1797	6,4772	1835	6,6607	1871	6,8478	1909	7,0387	1947
3,3	6,4117	1836	6,5953	1873	6,7826	1911	6,9737	1950	7,1687	1988
3,4	6,5259	1874	6,7133	1912	6,9045	1951	7,0996	1990	7,2986	2031
3,5	6,6401	1912	6,8313	1951	7,0264	1991	7,2255	2031	7,4286	2072
3,6	6,7544	1950	6,9494	1990	7,1484	2030	7,3514	2072	7,5586	2113
3,7	6,8686	1988	7,0674	2029	7,2703	2070	7,4773	2112	7,6885	2156
3,8	6,9828	2026	7,1854	2068	7,3922	2110	7,6032	2153	7,8185	2197
3,9	7,0970	2064	7,3034	2107	7,5141	2150	7,7291	2197	7,9485	2238
4,0	7,2113	2102	7,4215	2145	7,6360	2190	7,8550	2235	8,0785	2279
4,1	7,3255	2140	7,5395	2185	7,7580	2229	7,9809	2275	8,2084	2322
4,2	7,4397	2178	7,6575	2224	7,8799	2269	8,1068	2316	8,3384	2363
	$\Delta_v = 1142$.		$\Delta_v = 1180$.		$\Delta_v = 1219$.		$\Delta_v = 1259$.		$\Delta_v = 1300$.	

Digitized by Google

V_0^2	$z = 1{,}60$.		$z = 1{,}62$.		$z = 1{,}64$.		$z = 1{,}66$.		$z = 1{,}68$.	
	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{P}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	2,9413	625	3,0038	635	3,0673	644	3,1317	654	3,1971	664
0,1	3,0754	668	3,1422	678	3,2100	689	3,2789	699	3,3488	710
0,2	3,2095	711	3,2806	721	3,3527	733	3,4260	745	3,5005	757
0,3	3,3437	753	3,4190	765	3,4955	777	3,5732	790	3,6522	803
0,4	3,4778	795	3,5573	809	3,6382	822	3,3204	885	3,8039	850
0,5	3,6119	838	3,6957	852	3,7809	866	3,8675	881	3,9556	896
0,6	3,7461	880	3,8341	895	3,9236	911	4,0147	926	4,1073	942
0,7	3,8802	923	3,9725	939	4,0664	955	4,1619	972	4,2591	988
0,8	4,0143	966	4,1109	982	4,2091	1000	4,3091	1017	4,4108	1034
0,9	4,1485	1007	4,2492	1026	4,3518	1044	4,4562	1063	4,5625	1081
1,0	4,2826	1050	4,3876	1070	4,4946	1088	4,6034	1108	4,7142	1127
1,1	4,4167	1093	4,5260	1113	4,6373	1133	4,7506	1153	4,8659	1184
1,2	4,5508	1136	4,6644	1156	4,7800	1177	4,8977	1199	5,0176	1220
1,3	4,6850	1178	4,8028	1199	4,9227	1222	5,0449	1244	5,1693	1267
1,4	4,8191	1221	4,9412	1243	5,0655	1266	5,1921	1289	5,3210	1313
1,5	4,9532	1263	5,0795	1287	5,2082	1310	5,3392	1335	5,4727	1360
1,6	5,0874	1305	5,2179	1330	5,3509	1355	5,4864	1380	5,6244	1406
1,7	5,2215	1348	5,3563	1374	5,4937	1399	5,6336	1425	5,7761	1453
1,8	5,3556	1391	5,4947	1417	5,6364	1444	5,7808	1471	5,9279	1498
1,9	5,4897	1434	5,6331	1460	5,7791	1488	5,9279	1517	6,0796	1545
2,0	5,6239	1475	5,7714	1504	5,9218	1533	6,0751	1562	6,2313	1591
2,1	5,7580	1518	5,9098	1548	6,0646	1577	6,2223	1607	6,3880	1637
2,2	5,8921	1561	6,0482	1591	6,2073	1621	6,3694	1653	6,5347	1684
2,3	6,0263	1603	6,1866	1634	6,3500	1661	6,5161	1703	6,6864	1730
2,4	6,1604	1646	6,3250	1677	6,4927	1711	6,6638	1743	6,8381	1777
2,5	6,2945	1688	6,4633	1722	6,6355	1754	6,8109	1789	6,9898	1823
2,6	6,4286	1731	6,6017	1765	6,7782	1799	6,9581	1834	7,1415	1870
2,7	6,5628	1776	6,7404	1805	6,9209	1844	7,1053	1879	7,2932	1916
2,8	6,6969	1816	6,8785	1852	7,0637	1888	7,2525	1924	7,4449	1963
2,9	6,8310	1859	7,0169	1895	7,2064	1932	7,3996	1971	7,5967	2008
3,0	6,9652	1901	7,1553	1938	7,3491	1977	7,5468	2016	7,7484	2055
3,1	7,0993	1943	7,2936	1982	7,4918	2022	7,6940	2061	7,9001	2101
3,2	7,2334	1986	7,4320	2026	7,6346	2065	7,8411	2107	8,0518	2148
3,3	7,3675	2029	7,5704	2069	7,7773	2110	7,9883	2152	8,2035	2194
3,4	7,5017	2071	7,7088	2112	7,9200	2155	8,1355	2197	8,3552	2241
3,5	7,6358	2114	7,8472	2156	8,0628	2198	8,2826	2243	8,5069	2287
3,6	7,7699	2156	7,9855	2200	8,2055	2243	8,4298	2288	8,6586	2333
3,7	7,9041	2198	8,1239	2243	8,3482	2288	8,5770	2333	8,8103	2380
3,8	8,0382	2241	8,2623	2286	8,4909	2333	8,7242	2378	8,9620	2426
3,9	8,1723	2284	8,4007	2330	8,6337	2376	8,8713	2424	9,1137	2473
4,0	8,3064	2327	8,5391	2373	8,7764	2421	9,0185	2470	9,2655	2518
4,1	8,4406	2369	8,6775	2416	8,9191	2466	9,1657	2515	9,4172	2565
4,2	8,5747	2411	8,8158	2461	9,0619	2509	9,3128	2561	9,5689	2611
	$\Delta_v = 1341$.		$\Delta_v = 1384$.		$\Delta_v = 1427$.		$\Delta_v = 1472$.		$\Delta_v = 1517$.	

Digitized by Google

	$z=0{,}00$		$z=0{,}02$		$z=0{,}04$		$z=0{,}06$		$z=0{,}08$	
V_0^2	$z\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,0000	202	0,0202	206	0,0408	210	0,0618	215	0,0833	219
0,1	0,0000	202	0,0202	207	0,0409	211	0,0620	216	0,0836	221
0,2	0,0000	202	0,0202	208	0,0410	212	0,0622	217	0,0839	223
0,3	0,0000	203	0,0203	208	0,0411	213	0,0624	219	0,0843	224
0,4	0,0000	203	0,0203	208	0,0411	215	0,0626	220	0,0846	226
0,5	0,0000	203	0,0203	209	0,0412	216	0,0628	221	0,0849	229
0,6	0,0000	203	0,0203	210	0,0413	216	0,0629	224	0,0853	230
0,7	0,0000	203	0,0203	211	0,0414	217	0,0631	225	0,0856	232
0,8	0,0000	204	0,0204	211	0,0415	218	0,0633	226	0,0859	234
0,9	0,0000	204	0,0204	211	0,0415	220	0,0635	227	0,0862	236
1,0	0,0000	204	0,0204	212	0,0416	221	0,0637	229	0,0866	237
1,1	0,0000	204	0,0204	213	0,0417	222	0,0639	230	0,0869	240
1,2	0,0000	204	0,0204	214	0,0418	222	0,0640	232	0,0872	242
1,3	0,0000	205	0,0205	214	0,0119	223	0,0642	234	0,0876	243
1,4	0,0000	205	0,0205	214	0,0419	225	0,0644	235	0,0879	245
1,5	0,0000	205	0,0205	215	0,0420	226	0,0646	236	0,0882	247
1,6	0,0000	205	0,0205	216	0,0421	227	0,0648	237	0,0885	249
1,7	0,0000	205	0,0205	217	0,0422	228	0,0650	239	0,0889	251
1,8	0,0000	206	0,0206	217	0,0423	228	0,0651	241	0,0892	253
1,9	0,0000	206	0,0206	218	0,0424	229	0,0653	243	0,0895	255
2,0	0,0000	206	0,0206	218	0,0424	231	0,0655	244	0,0899	256
2,1	0,0000	206	0,0206	219	0,0425	232	0,0657	245	0,0902	258
2,2	0,0000	206	0,0206	220	0,0426	233	0,0659	246	0,0905	260
2,3	0,0000	207	0,0207	220	0,0427	234	0,0661	247	0,0908	263
2,4	0,0000	207	0,0207	221	0,0428	234	0,0662	250	0,0912	264
2,5	0,0000	207	0,0207	221	0,0428	236	0,0664	251	0,0915	266
2,6	0,0000	207	0,0207	222	0,0429	237	0,0666	252	0,0918	268
2,7	0,0000	207	0,0207	223	0,0430	238	0,0668	254	0,0922	269
2,8	0,0000	208	0,0208	223	0,0431	239	0,0670	255	0,0925	271
2,9	0,0000	208	0,0208	224	0,0432	240	0,0672	256	0,0928	274
3,0	0,0000	208	0,0208	224	0,0432	241	0,0673	258	0,0931	276
3,1	0,0000	208	0,0208	225	0,0433	242	0,0675	260	0,0935	277
3,2	0,0000	208	0,0208	226	0,0434	243	0,0677	261	0,0938	279
3,3	0,0000	209	0,0209	226	0,0435	244	0,0679	262	0,0941	281
3,4	0,0000	209	0,0209	227	0,0436	245	0,0681	264	0,0945	283
3,5	0,0000	209	0,0209	227	0,0436	247	0,0683	265	0,0948	285
3,6	0,0000	209	0,0209	228	0,0437	247	0,0684	267	0,0951	287
3,7	0,0000	209	0,0209	229	0,0438	248	0,0686	268	0,0954	289
3,8	0,0000	210	0,0210	229	0,0439	249	0,0688	270	0,0958	290
3,9	0,0000	210	0,0210	230	0,0440	250	0,0690	271	0,0961	292
4,0	0,0000	210	0,0210	231	0,0441	251	0,0692	272	0,0964	295
4,1	0,0000	210	0,0210	231	0,0441	253	0,0694	274	0,0968	296
4,2	0,0000	210	0,0210	232	0,0442	254	0,0696	275	0,0971	298
	$\Delta_v = 0.$		$\Delta_v = 1.$		$\Delta_v = 1.$		$\Delta_v = 2.$		$\Delta_v = 3.$	

Digitized by Google

	$z = 0{,}10$.		$z = 0{,}12$.		$z = 0{,}14$.		$z = 0{,}16$.		$z = 0{,}18$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{Z}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{Z}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{Z}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{Z}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{Z}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,1052	223	0,1275	228	0,1503	232	0,1735	237	0,1972	242
0,1	0,1057	225	0,1282	231	0,1513	236	0,1749	240	0,1989	246
0,2	0,1062	228	0,1290	233	0,1523	239	0,1762	245	0,2007	250
0,3	0,1067	230	0,1297	237	0,1534	242	0,1776	248	0,2024	254
0,4	0,1072	233	0,1305	239	0,1544	245	0,1789	252	0,2041	259
0,5	0,1078	234	0,1312	242	0,1554	249	0,1803	255	0,2058	263
0,6	0,1083	237	0,1320	244	0,1564	252	0,1816	259	0,2075	267
0,7	0,1088	239	0,1327	248	0,1575	255	0,1830	263	0,2093	271
0,8	0,1093	242	0,1335	250	0,1585	258	0,1843	267	0,2110	275
0,9	0,1098	244	0,1342	253	0,1595	262	0,1857	270	0,2127	280
1,0	0,1103	247	0,1350	255	0,1605	265	0,1870	274	0,2144	284
1,1	0,1109	248	0,1357	259	0,1616	268	0,1884	278	0,2162	287
1,2	0,1114	251	0,1365	261	0,1626	271	0,1897	282	0,2179	292
1,3	0,1119	253	0,1372	264	0,1636	275	0,1911	285	0,2196	296
1,4	0,1124	256	0,1380	267	0,1647	277	0,1924	289	0,2213	301
1,5	0,1129	258	0,1387	270	0,1657	281	0,1938	292	0,2230	305
1,6	0,1134	261	0,1395	272	0,1667	284	0,1951	297	0,2248	308
1,7	0,1140	262	0,1402	275	0,1677	288	0,1965	300	0,2265	313
1,8	0,1145	265	0,1410	278	0,1688	290	0,1978	304	0,2282	317
1,9	0,1150	267	0,1417	281	0,1698	294	0,1992	307	0,2299	322
2,0	0,1155	270	0,1425	283	0,1708	297	0,2005	312	0,2317	325
2,1	0,1160	272	0,1432	286	0,1718	301	0,2019	315	0,2334	329
2,2	0,1165	275	0,1440	289	0,1729	303	0,2032	319	0,2351	334
2,3	0,1171	276	0,1447	292	0,1739	307	0,2046	322	0,2368	338
2,4	0,1176	279	0,1455	294	0,1749	310	0,2059	326	0,2385	343
2,5	0,1181	281	0,1462	298	0,1760	313	0,2073	330	0,2403	346
2,6	0,1186	284	0,1470	300	0,1770	316	0,2086	334	0,2420	350
2,7	0,1191	286	0,1477	303	0,1780	320	0,2100	337	0,2437	355
2,8	0,1196	289	0,1485	305	0,1790	323	0,2113	341	0,2454	359
2,9	0,1202	290	0,1492	309	0,1801	326	0,2127	344	0,2471	364
3,0	0,1207	293	0,1500	311	0,1811	329	0,2140	349	0,2489	367
3,1	0,1212	295	0,1507	314	0,1821	333	0,2154	352	0,2506	372
3,2	0,1217	298	0,1515	316	0,1831	336	0,2167	356	0,2523	376
3,3	0,1222	300	0,1522	320	0,1842	339	0,2181	359	0,2540	380
3,4	0,1228	302	0,1530	322	0,1852	342	0,2194	364	0,2558	384
3,5	0,1233	304	0,1537	325	0,1862	346	0,2208	367	0,2575	388
3,6	0,1238	307	0,1545	328	0,1873	348	0,2221	371	0,2592	393
3,7	0,1243	309	0,1552	331	0,1883	352	0,2235	374	0,2609	397
3,8	0,1248	312	0,1560	333	0,1893	356	0,2249	377	0,2626	401
3,9	0,1253	314	0,1567	336	0,1903	359	0,2262	382	0,2644	405
4,0	0,1259	316	0,1575	339	0,1914	362	0,2276	385	0,2661	409
4,1	0,1264	318	0,1582	342	0,1924	365	0,2289	389	0,2678	414
4,2	0,1269	321	0,1590	344	0,1934	369	0,2303	392	0,2695	418
	$\Delta_v = 5$.		$\Delta_v = 7$.		$\Delta_v = 10$.		$\Delta_v = 14$.		$\Delta_v = 17$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}20$.		$z = 0{,}22$.		$z = 0{,}24$.		$z = 0{,}26$.		$z = 0{,}28$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,2214	247	0,2461	251	0,2712	257	0,2969	262	0,3231	268
0,1	0,2235	252	0,2487	257	0,2744	262	0,3006	268	0,3274	274
0,2	0,2257	256	0,2513	262	0,2775	268	0,3043	275	0,3318	280
0,3	0,2278	261	0,2539	267	0,2806	274	0,3080	281	0,3361	287
0,4	0,2300	265	0,2565	272	0,2837	280	0,3117	287	0,3404	294
0,5	0,2321	270	0,2591	278	0,2869	285	0,3154	293	0,3447	301
0,6	0,2342	275	0,2617	283	0,2900	291	0,3191	299	0,3490	308
0,7	0,2364	279	0,2643	288	0,2931	297	0,3228	305	0,3533	315
0,8	0,2385	284	0,2669	293	0,2962	303	0,3265	311	0,3576	321
0,9	0,2407	288	0,2695	299	0,2994	308	0,3302	317	0,3619	328
1,0	0,2428	294	0,2722	303	0,3025	314	0,3339	324	0,3663	334
1,1	0,2449	299	0,2748	308	0,3056	320	0,3376	330	0,3706	341
1,2	0,2471	303	0,2774	313	0,3087	325	0,3412	337	0,3749	348
1,3	0,2492	308	0,2800	319	0,3119	330	0,3449	343	0,3792	355
1,4	0,2514	312	0,2826	324	0,3150	336	0,3486	349	0,3835	362
1,5	0,2535	317	0,2852	329	0,3181	342	0,3523	355	0,3878	368
1,6	0,2556	322	0,2878	334	0,3212	348	0,3560	361	0,3921	375
1,7	0,2578	326	0,2904	340	0,3244	353	0,3597	368	0,3965	381
1,8	0,2599	331	0,2930	345	0,3275	359	0,3634	374	0,4008	388
1,9	0,2621	335	0,2956	350	0,3306	365	0,3671	380	0,4051	395
2,0	0,2642	340	0,2982	355	0,3337	371	0,3708	386	0,4094	402
2,1	0,2663	345	0,3008	361	0,3369	376	0,3745	392	0,4137	409
2,2	0,2685	349	0,3034	366	0,3400	382	0,3782	398	0,4180	415
2,3	0,2706	355	0,3061	370	0,3431	388	0,3819	404	0,4223	422
2,4	0,2728	359	0,3087	375	0,3462	394	0,3856	410	0,4266	429
2,5	0,2749	364	0,3113	381	0,3494	399	0,3893	417	0,4310	435
2,6	0,2770	369	0,3139	386	0,3525	404	0,3929	424	0,4353	442
2,7	0,2792	373	0,3165	391	0,3556	410	0,3966	430	0,4396	449
2,8	0,2813	378	0,3191	396	0,3587	416	0,4003	436	0,4439	456
2,9	0,2835	382	0,3217	402	0,3619	421	0,4040	442	0,4482	462
3,0	0,2856	387	0,3243	407	0,3650	427	0,4077	448	0,4525	469
3,1	0,2878	391	0,3269	412	0,3681	433	0,4114	454	0,4568	476
3,2	0,2899	396	0,3295	418	0,3712	439	0,4151	460	0,4611	483
3,3	0,2920	401	0,3321	423	0,3744	444	0,4188	467	0,4655	489
3,4	0,2942	405	0,3347	428	0,3775	450	0,4225	473	0,4698	496
3,5	0,2963	410	0,3373	433	0,3806	456	0,4262	479	0,4741	503
3,6	0,2985	415	0,3400	437	0,3837	462	0,4299	485	0,4784	510
3,7	0,3006	420	0,3426	443	0,3869	467	0,4336	491	0,4827	516
3,8	0,3027	425	0,3452	448	0,3900	473	0,4373	497	0,4870	523
3,9	0,3049	429	0,3478	453	0,3931	479	0,4410	503	0,4913	530
4,0	0,3070	434	0,3504	458	0,3962	485	0,4447	509	0,4956	537
4,1	0,3092	438	0,3530	464	0,3994	489	0,4483	517	0,5000	543
4,2	0,3113	443	0,3556	469	0,4025	495	0,4520	523	0,5043	550
	$\Delta_v = 21$.		$\Delta_v = 26$.		$\Delta_v = 31$.		$\Delta_v = 37$.		$\Delta_v = 43$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}30$.		$z = 0{,}32$.		$z = 0{,}34$.		$z = 0{,}36$.		$z = 0{,}38$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,3499	272	0,3771	278	0,4049	284	0,4333	290	0,4623	295
0,1	0,3548	280	0,3828	286	0,4114	293	0,4407	298	0,4705	305
0,2	0,3598	288	0,3886	293	0,4179	301	0,4480	307	0,4787	315
0,3	0,3648	295	0,3948	301	0,4244	309	0,4553	317	0,4870	324
0,4	0,3698	302	0,4000	309	0,4309	318	0,4627	325	0,4952	334
0,5	0,3748	309	0,4057	317	0,4374	326	0,4700	334	0,5034	343
0,6	0,3798	316	0,4114	325	0,4439	334	0,4773	344	0,5117	352
0,7	0,3848	323	0,4171	333	0,4504	343	0,4847	352	0,5199	362
0,8	0,3897	331	0,4228	341	0,4569	351	0,4920	361	0,5281	372
0,9	0,3947	338	0,4285	349	0,4634	359	0,4993	370	0,5363	382
1,0	0,3997	346	0,4343	356	0,4699	368	0,5067	379	0,5446	390
1,1	0,4047	353	0,4400	364	0,4764	376	0,5140	388	0,5528	400
1,2	0,4097	360	0,4457	372	0,4829	384	0,5213	397	0,5610	410
1,3	0,4147	367	0,4514	380	0,4894	393	0,5287	406	0,5693	419
1,4	0,4197	374	0,4571	388	0,4959	401	0,5360	415	0,5775	429
1,5	0,4246	382	0,4628	396	0,5024	409	0,5433	424	0,5857	439
1,6	0,4296	389	0,4685	404	0,5089	418	0,5507	432	0,5939	448
1,7	0,4346	396	0,4742	412	0,5154	426	0,5580	442	0,6022	457
1,8	0,4396	404	0,4800	419	0,5219	434	0,5653	451	0,6104	467
1,9	0,4446	411	0,4857	426	0,5283	444	0,5727	459	0,6186	477
2,0	0,4496	418	0,4914	434	0,5348	452	0,5800	469	0,6269	486
2,1	0,4546	425	0,4971	442	0,5413	460	0,5873	478	0,6351	496
2,2	0,4595	433	0,5028	450	0,5478	469	0,5947	486	0,6433	505
2,3	0,4645	440	0,5085	458	0,5543	477	0,6020	495	0,6515	515
2,4	0,4695	447	0,5142	466	0,5608	485	0,6093	505	0,6598	524
2,5	0,4745	454	0,5199	474	0,5673	494	0,6167	513	0,6680	534
2,6	0,4795	462	0,5257	481	0,5738	502	0,6240	522	0,6762	544
2,7	0,4845	469	0,5314	489	0,5803	510	0,6313	532	0,6845	553
2,8	0,4895	476	0,5371	497	0,5868	519	0,6387	540	0,6927	562
2,9	0,4944	484	0,5428	505	0,5933	527	0,6460	549	0,7009	572
3,0	0,4994	491	0,5485	513	0,5998	535	0,6533	558	0,7091	582
3,1	0,5044	498	0,5542	521	0,6063	544	0,6607	567	0,7174	591
3,2	0,5094	505	0,5599	529	0,6128	552	0,6680	576	0,7256	601
3,3	0,5144	512	0,5656	537	0,6193	560	0,6753	585	0,7338	610
3,4	0,5194	520	0,5714	544	0,6258	568	0,6826	595	0,7421	619
3,5	0,5244	527	0,5771	552	0,6323	577	0,6900	603	0,7503	629
3,6	0,5294	534	0,5828	560	0,6388	585	0,6973	612	0,7585	639
3,7	0,5343	542	0,5885	568	0,6453	593	0,7046	621	0,7667	649
3,8	0,5393	549	0,5942	575	0,6517	603	0,7120	630	0,7750	658
3,9	0,5443	556	0,5999	583	0,6582	611	0,7193	639	0,7832	667
4,0	0,5493	563	0,6056	591	0,6647	619	0,7266	648	0,7914	677
4,1	0,5543	571	0,6114	598	0,6712	628	0,7340	657	0,7997	686
4,2	0,5593	578	0,6171	606	0,6777	636	0,7413	666	0,8079	696
	$\Delta_v = 50$.		$\Delta_v = 57$.		$\Delta_v = 65$.		$\Delta_v = 73$.		$\Delta_v = 82$.	

Digitized by Google

V_0^2	$z = 0{,}40$.		$z = 0{,}42$.		$z = 0{,}44$.		$z = 0{,}46$.		$z = 0{,}48$.	
	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,4918	302	0,5220	307	0,5527	314	0,5841	320	0,6161	326
0,1	0,5010	312	0,5322	318	0,5640	325	0,5965	332	0,6297	339
0,2	0,5102	322	0,5424	328	0,5752	336	0,6089	344	0,6433	352
0,3	0,5194	332	0,5526	339	0,5865	348	0,6213	356	0,6569	364
0,4	0,5286	341	0,5627	351	0,5978	359	0,6337	368	0,6705	377
0,5	0,5377	352	0,5729	362	0,6091	370	0,6461	380	0,6841	390
0,6	0,5469	362	0,5831	372	0,6203	382	0,6585	392	0,6977	403
0,7	0,5561	372	0,5933	383	0,6316	393	0,6709	404	0,7113	415
0,8	0,5653	382	0,6035	394	0,6429	404	0,6833	416	0,7249	428
0,9	0,5745	392	0,6137	404	0,6541	416	0,6957	428	0,7385	441
1,0	0,5836	403	0,6239	415	0,6654	427	0,7081	440	0,7521	453
1,1	0,5928	413	0,6341	426	0,6767	439	0,7206	452	0,7658	465
1,2	0,6020	423	0,6443	437	0,6880	450	0,7330	464	0,7794	478
1,3	0,6112	433	0,6545	447	0,6992	462	0,7454	476	0,7930	491
1,4	0,6204	443	0,6647	458	0,7105	473	0,7578	488	0,8066	503
1,5	0,6296	453	0,6749	469	0,7218	484	0,7702	500	0,8202	516
1,6	0,6387	464	0,6851	479	0,7330	496	0,7826	512	0,8338	529
1,7	0,6479	474	0,6953	490	0,7443	507	0,7950	524	0,8474	541
1,8	0,6571	484	0,7055	501	0,7556	518	0,8074	536	0,8610	554
1,9	0,6663	494	0,7157	512	0,7669	529	0,8198	548	0,8746	567
2,0	0,6755	504	0,7259	522	0,7781	541	0,8322	560	0,8882	580
2,1	0,6847	514	0,7361	533	0,7894	552	0,8446	572	0,9018	592
2,2	0,6938	525	0,7463	544	0,8007	563	0,8570	584	0,9154	605
2,3	0,7030	535	0,7565	554	0,8119	575	0,8694	596	0,9290	618
2,4	0,7122	545	0,7667	565	0,8232	587	0,8819	608	0,9427	630
2,5	0,7214	555	0,7769	576	0,8345	598	0,8943	620	0,9563	642
2,6	0,7306	565	0,7871	586	0,8457	610	0,9067	632	0,9699	655
2,7	0,7398	575	0,7973	597	0,8570	621	0,9191	644	0,9835	668
2,8	0,7489	586	0,8075	608	0,8683	632	0,9315	656	0,9971	680
2,9	0,7581	595	0,8176	620	0,8796	643	0,9439	668	1,0107	693
3,0	0,7673	605	0,8278	630	0,8908	655	0,9563	680	1,0243	706
3,1	0,7765	615	0,8380	641	0,9021	666	0,9687	692	1,0379	719
3,2	0,7857	625	0,8482	652	0,9134	677	0,9811	704	1,0515	731
3,3	0,7948	636	0,8584	662	0,9246	689	0,9935	716	1,0651	744
3,4	0,8040	646	0,8686	673	0,9359	700	1,0059	728	1,0787	757
3,5	0,8132	656	0,8788	684	0,9472	711	1,0188	740	1,0923	769
3,6	0,8224	666	0,8890	695	0,9585	722	1,0307	752	1,1059	782
3,7	0,8316	676	0,8992	705	0,9697	734	1,0431	764	1,1195	795
3,8	0,8408	686	0,9094	716	0,9810	746	1,0556	776	1,1332	807
3,9	0,8499	697	0,9196	727	0,9923	757	1,0680	788	1,1468	819
4,0	0,8591	707	0,9298	737	1,0035	769	1,0804	800	1,1604	832
4,1	0,8683	717	0,9400	748	1,0148	780	1,0928	812	1,1740	845
4,2	0,8775	727	0,9502	759	1,0261	791	1,1052	824	1,1876	858
	$\Delta_v = 92$.		$\Delta_v = 102$.		$\Delta_v = 113$.		$\Delta_v = 124$.		$\Delta_v = 136$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}50$.		$z = 0{,}52$.		$z = 0{,}54$.		$z = 0{,}56$.		$z = 0{,}58$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{Z}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{Z}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{Z}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{Z}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{Z}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,6487	333	0,6820	340	0,7160	347	0,7507	353	0,7860	361
0,1	0,6636	346	0,6982	354	0,7336	361	0,7697	369	0,8066	377
0,2	0,6785	359	0,7144	368	0,7512	376	0,7888	384	0,8272	393
0,3	0,6933	373	0,7306	382	0,7688	391	0,8079	399	0,8478	410
0,4	0,7082	386	0,7468	396	0,7864	405	0,8269	416	0,8685	425
0,5	0,7231	399	0,7630	410	0,8040	420	0,8460	431	0,8891	441
0,6	0,7380	412	0,7792	424	0,8216	435	0,8651	446	0,9097	457
0,7	0,7528	426	0,7954	438	0,8392	449	0,8841	462	0,9303	473
0,8	0,7677	439	0,8116	452	0,8568	464	0,9032	477	0,9509	489
0,9	0,7826	453	0,8279	465	0,8744	479	0,9223	492	0,9715	505
1,0	0,7974	467	0,8441	479	0,8920	493	0,9413	508	0,9921	521
1,1	0,8123	480	0,8603	493	0,9096	508	0,9604	523	1,0127	537
1,2	0,8272	493	0,8765	507	0,9272	523	0,9795	538	1,0333	554
1,3	0,8421	506	0,8927	521	0,9448	537	0,9985	554	1,0539	570
1,4	0,8569	520	0,9089	535	0,9624	552	1,0176	569	1,0745	596
1,5	0,8718	533	0,9251	549	0,9800	567	1,0367	584	1,0951	602
1,6	0,8867	546	0,9413	563	0,9976	581	1,0557	600	1,1157	618
1,7	0,9015	560	0,9575	577	1,0152	596	1,0748	615	1,1363	634
1,8	0,9164	573	0,9737	591	1,0328	611	1,0939	630	1,1569	650
1,9	0,9313	586	0,9899	605	1,0504	626	1,1130	645	1,1775	666
2,0	0,9462	599	1,0061	619	1,0680	640	1,1320	661	1,1981	683
2,1	0,9610	613	1,0223	633	1,0856	655	1,1511	676	1,2187	699
2,2	0,9759	626	1,0385	647	1,1032	670	1,1702	691	1,2393	715
2,3	0,9908	639	1,0547	661	1,1208	684	1,1892	707	1,2599	731
2,4	1,0057	652	1,0709	675	1,1384	699	1,2083	722	1,2805	747
2,5	1,0205	666	1,0871	689	1,1560	714	1,2274	737	1,3011	763
2,6	1,0354	679	1,1033	703	1,1736	728	1,2464	753	1,3217	779
2,7	1,0503	692	1,1195	717	1,1912	743	1,2655	768	1,3423	795
2,8	1,0651	706	1,1357	731	1,2088	758	1,2846	783	1,3629	812
2,9	1,0800	719	1,1519	745	1,2264	772	1,3036	799	1,3835	828
3,0	1,0949	732	1,1681	759	1,2440	787	1,3227	815	1,4042	843
3,1	1,1098	745	1,1843	773	1,2616	802	1,3418	830	1,4248	859
3,2	1,1246	759	1,2005	787	1,2792	816	1,3608	846	1,4454	875
3,3	1,1395	772	1,2167	801	1,2968	831	1,3799	861	1,4660	891
3,4	1,1544	785	1,2329	815	1,3144	846	1,3990	876	1,4866	907
3,5	1,1692	799	1,2491	829	1,3320	860	1,4180	892	1,5072	923
3,6	1,1841	812	1,2653	843	1,3496	875	1,4371	907	1,5278	939
3,7	1,1990	825	1,2815	857	1,3672	890	1,4562	922	1,5484	956
3,8	1,2139	838	1,2977	871	1,3848	904	1,4752	938	1,5690	972
3,9	1,2287	852	1,3139	885	1,4024	919	1,4943	953	1,5896	988
4,0	1,2436	865	1,3301	899	1,4200	934	1,5134	968	1,6102	1004
4,1	1,2585	878	1,3463	913	1,4376	948	1,5324	984	1,6308	1020
4,2	1,2734	891	1,3625	927	1,4552	963	1,5515	999	1,6514	1036
	$\Delta_v = 149$.		$\Delta_v = 162$.		$\Delta_v = 176$.		$\Delta_v = 191$.		$\Delta_v = 206$.	

Digitized by Google

$$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2); \quad z = \frac{\alpha x}{c}, \quad V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{\tau^2}.$$

	$z = 0{,}60$.		$z = 0{,}62$.		$z = 0{,}64$.		$z = 0{,}66$.		$z = 0{,}68$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	0,8221	368	0,8589	376	0,8965	383	0,9348	391	0,9739	399
0,1	0,8443	385	0,8828	393	0,9221	402	0,9623	410	1,0033	418
0,2	0,8665	402	0,9067	411	0,9478	420	0,9898	429	1,0327	438
0,3	0,8888	418	0,9306	428	0,9734	438	1,0172	448	1,0620	459
0,4	0,9110	435	0,9545	446	0,9991	456	1,0447	467	1,0914	479
0,5	0,9332	452	0,9784	463	1,0247	475	1,0722	486	1,1208	498
0,6	0,9554	469	1,0023	481	1,0504	493	1,0997	505	1,1502	518
0,7	0,9776	486	1,0262	498	1,0760	511	1,1271	525	1,1796	538
0,8	0,9998	503	1,0501	516	1,1017	529	1,1546	544	1,2090	558
0,9	1,0220	520	1,0740	533	1,1273	548	1,1821	563	1,2384	577
1,0	1,0442	537	1,0979	551	1,1530	566	1,2096	582	1,2678	597
1,1	1,0664	553	1,1217	569	1,1786	585	1,2371	600	1,2971	618
1,2	1,0887	569	1,1456	587	1,2043	602	1,2645	620	1,3265	638
1,3	1,1109	586	1,1695	604	1,2299	621	1,2920	639	1,3559	657
1,4	1,1331	603	1,1934	622	1,2556	639	1,3195	658	1,3853	677
1,5	1,1553	620	1,2173	639	1,2812	658	1,3470	677	1,4147	697
1,6	1,1775	637	1,2412	657	1,3069	676	1,3745	696	1,4441	717
1,7	1,1997	654	1,2651	674	1,3325	694	1,4019	716	1,4735	736
1,8	1,2219	671	1,2890	691	1,3581	713	1,4294	735	1,5029	756
1,9	1,2441	688	1,3129	709	1,3838	731	1,4569	753	1,5322	777
2,0	1,2664	704	1,3368	726	1,4094	750	1,4844	772	1,5616	797
2,1	1,2886	721	1,3607	744	1,4351	768	1,5119	791	1,5910	816
2,2	1,3108	738	1,3846	761	1,4607	786	1,5393	811	1,6204	836
2,3	1,3330	755	1,4085	779	1,4864	804	1,5668	830	1,6498	856
2,4	1,3552	772	1,4324	796	1,5120	823	1,5943	849	1,6792	876
2,5	1,3774	788	1,4562	815	1,5377	841	1,6218	868	1,7086	895
2,6	1,3996	805	1,4801	832	1,5633	860	1,6493	887	1,7380	915
2,7	1,4218	822	1,5040	850	1,5890	877	1,6767	906	1,7673	936
2,8	1,4441	838	1,5279	867	1,6146	896	1,7042	925	1,7967	956
2,9	1,4663	855	1,5518	885	1,6403	914	1,7317	944	1,8261	975
3,0	1,4885	872	1,5757	902	1,6659	933	1,7592	963	1,8555	995
3,1	1,5107	889	1,5996	920	1,6916	950	1,7866	983	1,8849	1015
3,2	1,5329	906	1,6235	937	1,7172	969	1,8141	1002	1,9143	1035
3,3	1,5551	923	1,6474	955	1,7429	987	1,8416	1021	1,9437	1054
3,4	1,5773	940	1,6713	972	1,7685	1006	1,8691	1040	1,9731	1074
3,5	1,5995	957	1,6952	990	1,7942	1024	1,8966	1058	2,0024	1095
3,6	1,6217	974	1,7191	1007	1,8198	1042	1,9240	1078	2,0318	1115
3,7	1,6440	990	1,7430	1025	1,8455	1060	1,9515	1097	2,0612	1134
3,8	1,6662	1007	1,7669	1042	1,8711	1079	1,9790	1116	2,0906	1154
3,9	1,6884	1023	1,7907	1061	1,8968	1097	2,0065	1135	2,1200	1174
4,0	1,7106	1040	1,8146	1078	1,9224	1116	2,0340	1154	2,1494	1194
4,1	1,7328	1057	1,8385	1096	1,9481	1133	2,0614	1174	2,1788	1213
4,2	1,7550	1074	1,8624	1113	1,9737	1152	2,0889	1193	2,2082	1233
	$\Delta_v = 222$.		$\Delta_v = 239$.		$\Delta_v = 256$.		$\Delta_v = 275$.		$\Delta_v = 294$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}70$.		$z = 0{,}72$.		$z = 0{,}74$.		$z = 0{,}76$.		$z = 0{,}78$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,0138	406	1,0544	415	1,0959	424	1,1383	432	1,1815	440
0,1	1,0451	428	1,0879	436	1,1315	446	1,1761	455	1,2216	465
0,2	1,0765	448	1,1213	458	1,1671	468	1,2139	479	1,2618	488
0,3	1,1079	469	1,1548	479	1,2027	491	1,2518	501	1,3019	513
0,4	1,1393	489	1,1882	501	1,2383	513	1,2896	525	1,3421	537
0,5	1,1706	510	1,2216	523	1,2739	535	1,3274	548	1,3822	561
0,6	1,2020	531	1,2551	544	1,3095	557	1,3652	572	1,4224	585
0,7	1,2334	551	1,2885	566	1,3451	580	1,4031	594	1,4625	609
0,8	1,2648	572	1,3220	587	1,3807	602	1,4409	688	1,5027	633
0,9	1,2961	593	1,3554	609	1,4163	624	1,4787	641	1,5428	657
1,0	1,3275	614	1,3889	630	1,4519	647	1,5166	663	1,5829	682
1,1	1,3589	634	1,4223	652	1,4875	669	1,5544	687	1,6231	705
1,2	1,3903	655	1,4558	673	1,5231	691	1,5922	710	1,6632	730
1,3	1,4216	676	1,4892	695	1,5587	713	1,6300	734	1,7034	753
1,4	1,4530	696	1,5226	716	1,5942	737	1,6679	756	1,7435	778
1,5	1,4844	717	1,5561	737	1,6298	759	1,7057	780	1,7837	802
1,6	1,5158	737	1,5895	759	1,6654	781	1,7435	803	1,8238	826
1,7	1,5471	759	1,6230	780	1,7010	803	1,7813	827	1,8640	850
1,8	1,5785	779	1,6564	802	1,7366	826	1,8192	849	1,9041	874
1,9	1,6099	800	1,6899	823	1,7722	848	1,8570	873	1,9443	898
2,0	1,6413	820	1,7233	845	1,8078	870	1,8948	896	1,9844	922
2,1	1,6726	841	1,7567	867	1,8434	893	1,9327	919	2,0246	946
2,2	1,7040	862	1,7902	888	1,8790	915	1,9705	942	2,0647	970
2,3	1,7354	882	1,8236	910	1,9146	937	2,0083	966	2,1049	994
2,4	1,7668	903	1,8571	931	1,9502	959	2,0461	989	2,1450	1018
2,5	1,7981	924	1,8905	953	1,9858	982	2,0840	1012	2,1852	1042
2,6	1,8295	945	1,9240	974	2,0214	1004	2,1218	1035	2,2253	1066
2,7	1,8609	965	1,9574	996	2,0570	1026	2,1596	1058	2,2654	1091
2,8	1,8923	985	1,9908	1018	2,0926	1048	2,1974	1082	2,3056	1115
2,9	1,9236	1007	2,0243	1038	2,1281	1072	2,2353	1104	2,3457	1139
3,0	1,9550	1027	2,0577	1060	2,1637	1094	2,2731	1128	2,3859	1163
3,1	1,9864	1048	2,0912	1081	2,1993	1116	2,3109	1151	2,4260	1187
3,2	2,0178	1068	2,1246	1103	2,2349	1139	2,3488	1174	2,4662	1211
3,3	2,0491	1090	2,1581	1124	2,2705	1161	2,3866	1197	2,5063	1235
3,4	2,0805	1110	2,1915	1146	2,3061	1183	2,4244	1221	2,5465	1259
3,5	2,1119	1130	2,2249	1168	2,3417	1205	2,4622	1244	2,5866	1283
3,6	2,1433	1151	2,2584	1189	2,3773	1228	2,5001	1267	2,6268	1307
3,7	2,1746	1172	2,2918	1211	2,4129	1250	2,5379	1290	2,6669	1331
3,8	2,2060	1193	2,3253	1232	2,4485	1272	2,5757	1314	2,7071	1355
3,9	2,2374	1213	2,3587	1254	2,4841	1295	2,6136	1336	2,7472	1380
4,0	2,2688	1234	2,3922	1275	2,5197	1317	2,6514	1360	2,7874	1403
4,1	2,3001	1255	2,4256	1297	2,5553	1339	2,6892	1383	2,8275	1428
4,2	2,3315	1276	2,4591	1318	2,5909	1361	2,7270	1407	2,8677	1451
	$\Delta_v = 314$.		$\Delta_v = 334$.		$\Delta_v = 356$.		$\Delta_v = 378$.		$\Delta_v = 401$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}80$.		$z = 0{,}82$.		$z = 0{,}84$.		$z = 0{,}86$.		$z = 0{,}88$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,2255	450	1,2705	459	1,3164	468	1,3632	477	1,4109	487
0,1	1,2681	474	1,3155	485	1,3640	495	1,4135	505	1,4640	516
0,2	1,3106	500	1,3606	510	1,4116	522	1,4638	533	1,5171	544
0,3	1,3532	524	1,4056	537	1,4593	548	1,5141	561	1,5702	573
0,4	1,3958	549	1,4507	562	1,5069	575	1,5644	589	1,6233	601
0,5	1,4383	574	1,4957	589	1,5546	601	1,6147	616	1,6763	631
0,6	1,4809	599	1,5408	614	1,6022	629	1,6651	643	1,7294	660
0,7	1,5234	624	1,5858	640	1,6498	656	1,7154	671	1,7825	688
0,8	1,5660	649	1,6309	666	1,6975	682	1,7657	699	1,8356	717
0,9	1,6085	674	1,6759	692	1,7451	709	1,8160	727	1,8887	745
1,0	1,6511	699	1,7210	717	1,7927	736	1,8663	755	1,9418	774
1,1	1,6936	724	1,7660	744	1,8404	762	1,9166	783	1,9949	803
1,2	1,7362	749	1,8111	769	1,8880	790	1,9670	810	2,0480	831
1,3	1,7787	774	1,8561	795	1,9356	817	2,0173	838	2,1011	860
1,4	1,8213	799	1,9012	821	1,9833	843	2,0676	866	2,1542	888
1,5	1,8639	823	1,9462	847	2,0309	870	2,1179	893	2,2072	918
1,6	1,9064	849	1,9913	873	2,0786	896	2,1682	921	2,2603	947
1,7	1,9490	873	2,0363	899	2,1262	923	2,2185	949	2,3134	975
1,8	1,9915	899	2,0814	924	2,1738	951	2,2689	976	2,3665	1004
1,9	2,0341	923	2,1264	951	2,2215	977	2,3192	1004	2,4196	1032
2,0	2,0766	949	2,1715	976	2,2691	1004	2,3695	1032	2,4727	1061
2,1	2,1192	973	2,2165	1002	2,3167	1031	2,4198	1060	2,5258	1090
2,2	2,1617	999	2,2616	1028	2,3644	1057	2,4701	1088	2,5789	1118
2,3	2,2043	1023	2,3066	1054	2,4120	1084	2,5204	1116	2,6320	1147
2,4	2,2468	1049	2,3517	1079	2,4596	1111	2,5707	1144	2,6851	1176
2,5	2,2894	1073	2,3967	1106	2,5073	1138	2,6211	1170	2,7381	1205
2,6	2,3319	1099	2,4418	1131	2,5549	1165	2,6714	1198	2,7912	1234
2,7	2,3745	1123	2,4868	1158	2,6026	1191	2,7217	1226	2,8443	1262
2,8	2,4171	1148	2,5319	1183	2,6502	1218	2,7720	1254	2,8974	1291
2,9	2,4596	1173	2,5769	1209	2,6978	1245	2,8223	1282	2,9505	1320
3,0	2,5022	1198	2,6220	1235	2,7455	1271	2,8726	1310	3,0036	1348
3,1	2,5447	1223	2,6670	1261	2,7931	1299	2,9230	1337	3,0567	1377
3,2	2,5873	1248	2,7121	1286	2,8407	1326	2,9783	1365	3,1098	1405
3,3	2,6298	1273	2,7571	1313	2,8884	1352	3,0236	1393	3,1629	1434
3,4	2,6724	1298	2,8022	1338	2,9360	1379	3,0379	1421	3,2160	1463
3,5	2,7149	1323	2,8472	1365	2,9837	1405	3,1242	1448	3,2690	1492
3,6	2,7575	1348	2,8923	1390	3,0313	1432	3,1745	1476	3,3221	1521
3,7	2,8000	1373	2,9373	1416	3,0789	1460	3,2249	1503	3,3752	1549
3,8	2,8426	1398	2,9824	1442	3,1266	1486	3,2752	1531	3,4283	1578
3,9	2,8852	1422	3,0274	1468	3,1742	1513	3,3255	1559	3,4814	1607
4,0	2,9277	1448	3,0725	1493	3,2218	1540	3,3758	1587	3,5345	1635
4,1	2,9703	1472	3,1175	1520	3,2695	1566	3,4261	1615	3,5876	1664
4,2	3,0128	1498	3,1626	1545	3,3171	1593	3,4764	1643	3,6407	1692
	$\Delta_v = 426$.		$\Delta_v = 450$.		$\Delta_v = 476$.		$\Delta_v = 503$.		$\Delta_v = 531$.	

Digitized by Google

	$z = 0{,}90$.		$z = 0{,}92$.		$z = 0{,}94$.		$z = 0{,}96$.		$z = 0{,}98$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,4596	497	1,5093	507	1,5600	517	1,6117	528	1,6645	538
0,1	1,5156	526	1,5682	538	1,6220	549	1,6769	560	1,7329	572
0,2	1,5715	556	1,6271	569	1,6840	580	1,7420	593	1,8013	606
0,3	1,6275	586	1,6861	599	1,7460	612	1,8072	626	1,8698	640
0,4	1,6834	616	1,7450	630	1,8080	644	1,8724	658	1,9382	674
0,5	1,7394	645	1,8039	661	1,8700	675	1,9375	692	2,0067	707
0,6	1,7954	675	1,8629	691	1,9320	707	2,0027	724	2,0751	742
0,7	1,8513	705	1,9218	722	1,9940	739	2,0679	757	2,1436	775
0,8	1,9073	734	1,9807	753	2,0560	771	2,1331	789	2,2120	809
0,9	1,9632	765	2,0397	783	2,1180	802	2,1982	823	2,2805	842
1,0	2,0192	794	2,0986	814	2,1800	834	2,2634	855	2,3489	877
1,1	2,0752	823	2,1575	845	2,2420	866	2,3286	888	2,4174	910
1,2	2,1311	853	2,2164	876	2,3040	897	2,3937	921	2,4858	944
1,3	2,1871	883	2,2754	906	2,3660	929	2,4589	953	2,5542	978
1,4	2,2430	913	2,3343	937	2,4280	961	2,5241	986	2,6227	1012
1,5	2,2990	942	2,3932	968	2,4900	992	2,5892	1019	2,6911	1046
1,6	2,3550	972	2,4522	998	2,5520	1024	2,6544	1052	2,7596	1079
1,7	2,4109	1002	2,5111	1028	2,6139	1057	2,7196	1084	2,8280	1114
1,8	2,4669	1031	2,5700	1059	2,6759	1089	2,7848	1117	2,8965	1147
1,9	2,5228	1061	2,6289	1090	2,7379	1120	2,8499	1150	2,9649	1181
2,0	2,5788	1091	2,6879	1120	2,7999	1152	2,9151	1183	3,0334	1214
2,1	2,6348	1120	2,7468	1151	2,8619	1184	2,9803	1215	3,1018	1249
2,2	2,6907	1150	2,8057	1182	2,9239	1215	3,0454	1249	3,1703	1282
2,3	2,7467	1180	2,8647	1212	2,9859	1247	3,1106	1281	3,2387	1316
2,4	2,8027	1209	2,9236	1243	3,0479	1279	3,1758	1314	3,3072	1350
2,5	2,8586	1239	2,9825	1274	3,1099	1310	3,2409	1347	3,3756	1384
2,6	2,9146	1268	3,0414	1305	3,1719	1342	3,3061	1379	3,4440	1418
2,7	2,9705	1299	3,1004	1335	3,2339	1374	3,3713	1412	3,5125	1451
2,8	3,0265	1328	3,1593	1366	3,2959	1405	3,4364	1445	3,5809	1486
2,9	3,0825	1357	3,2182	1397	3,3579	1437	3,5016	1478	3,6494	1519
3,0	3,1384	1388	3,2772	1427	3,4199	1469	3,5668	1510	3,7178	1553
3,1	3,1944	1417	3,3361	1458	3,4819	1501	3,6320	1543	3,7863	1587
3,2	3,2503	1447	3,3950	1489	3,5439	1532	3,6971	1576	3,8547	1621
3,3	3,3063	1476	3,4539	1520	3,6059	1564	3,7623	1609	3,9232	1654
3,4	3,3623	1506	3,5129	1550	3,6679	1596	3,8275	1641	3,9916	1688
3,5	3,4182	1536	3,5718	1581	3,7299	1627	3,8926	1675	4,0601	1722
3,6	3,4742	1565	3,6307	1612	3,7919	1659	3,9578	1707	4,1285	1756
3,7	3,5301	1596	3,6897	1642	3,8539	1691	4,0230	1739	4,1969	1790
3,8	3,5861	1625	3,7486	1673	3,9159	1722	4,0881	1773	4,2654	1824
3,9	3,6421	1654	3,8075	1704	3,9779	1754	4,1533	1805	4,3338	1858
4,0	3,6980	1685	3,8665	1734	4,0399	1786	4,2185	1838	4,4023	1891
4,1	3,7540	1714	3,9254	1765	4,1019	1818	4,2837	1870	4,4707	1925
4,2	3,8099	1744	3,9843	1796	4,1639	1849	4,3488	1904	4,5392	1959
	$\Delta_v = 560$.		$\Delta_v = 589$.		$\Delta_v = 620$.		$\Delta_v = 652$.		$\Delta_v = 684$.	

Digitized by Google

$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$; $z = \frac{\alpha x}{c}$, $V_0^2 = \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}$.

	$z = 1{,}00$.		$z = 1{,}02$.		$z = 1{,}04$.		$z = 1{,}06$.		$z = 1{,}08$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	1,7183	549	1,7732	560	1,8292	572	1,8864	583	1,9447	595
0,1	1,7901	584	1,8485	596	1,9081	609	1,9690	621	2,0311	635
0,2	1,8619	619	1,9238	633	1,9871	645	2,0516	660	2,1176	674
0,3	1,9338	654	1,9992	668	2,0660	683	2,1343	698	2,2041	713
0,4	2,0056	689	2,0745	704	2,1449	720	2,2169	737	2,2906	752
0,5	2,0774	724	2,1498	740	2,2238	758	2,2996	774	2,3770	792
0,6	2,1493	758	2,2251	776	2,3027	795	2,3822	813	2,4635	832
0,7	2,2211	793	2,3004	813	2,3817	831	2,4648	852	2,5500	871
0,8	2,2929	829	2,3758	848	2,4606	869	2,5475	889	2,6364	911
0,9	2,3647	864	2,4511	884	2,5395	906	2,6301	928	2,7229	950
1,0	2,4366	898	2,5264	920	2,6184	943	2,7127	967	2,8094	989
1,1	2,5084	933	2,6017	957	2,6974	980	2,7954	1004	2,8958	1029
1,2	2,5802	968	2,6770	993	2,7763	1017	2,8780	1043	2,9823	1069
1,3	2,6520	1003	2,7523	1029	2,8552	1055	2,9607	1081	3,0688	1108
1,4	2,7239	1038	2,8277	1064	2,9341	1092	3,0433	1119	3,1552	1148
1,5	2,7957	1073	2,9030	1100	3,0130	1129	3,1259	1158	3,2417	1187
1,6	2,8675	1108	2,9783	1137	3,0920	1166	3,2086	1196	3,3282	1226
1,7	2,9394	1142	3,0536	1173	3,1709	1203	3,2912	1234	3,4146	1266
1,8	3,0112	1177	3,1289	1209	3,2498	1240	3,3738	1273	3,5011	1306
1,9	3,0830	1213	3,2043	1244	3,3287	1278	3,4565	1311	3,5876	1345
2,0	3,1548	1248	3,2796	1281	3,4077	1314	3,5391	1349	3,6740	1385
2,1	3,2267	1282	3,3549	1317	3,4866	1352	3,6218	1387	3,7605	1424
2,2	3,2985	1317	3,4302	1353	3,5655	1389	3,7044	1426	3,8470	1463
2,3	3,3703	1352	3,5055	1389	3,6444	1426	3,7870	1464	3,9334	1503
2,4	3,4422	1387	3,5809	1424	3,7233	1464	3,8697	1502	4,0199	1543
2,5	3,5140	1422	3,6562	1461	3,8023	1500	3,9523	1541	4,1064	1582
2,6	3,5858	1457	3,7315	1497	3,8812	1537	4,0349	1579	4,1928	1622
2,7	3,6576	1492	3,8068	1533	3,9601	1575	4,1176	1617	4,2793	1661
2,8	3,7295	1526	3,8821	1569	4,0390	1612	4,2002	1656	4,3658	1700
2,9	3,8013	1562	3,9575	1604	4,1179	1649	4,2828	1695	4,4523	1739
3,0	3,8731	1597	4,0328	1641	4,1969	1686	4,3655	1732	4,5387	1780
3,1	3,9450	1631	4,1081	1677	4,2758	1723	4,4481	1771	4,6252	1819
3,2	4,0168	1666	4,1834	1713	4,3547	1761	4,5308	1809	4,7117	1858
3,3	4,0886	1701	4,2587	1749	4,4336	1798	4,6134	1847	4,7981	1898
3,4	4,1604	1737	4,3341	1785	4,5126	1834	4,6960	1886	4,8846	1937
3,5	4,2323	1771	4,4094	1821	4,5915	1872	4,7787	1924	4,9711	1976
3,6	4,3041	1806	4,4847	1857	4,6704	1909	4,8613	1962	5,0575	2017
3,7	4,3759	1841	4,5600	1893	4,7493	1946	4,9439	2001	5,1440	2056
3,8	4,4478	1875	4,6353	1929	4,8282	1984	5,0266	2039	5,2305	2095
3,9	4,5196	1911	4,7107	1965	4,9072	2020	5,1092	2077	5,3169	2135
4,0	4,5914	1946	4,7860	2001	4,9861	2058	5,1919	2115	5,4034	2174
4,1	4,6632	1981	4,8613	2037	5,0650	2095	5,2745	2154	5,4899	2213
4,2	4,7351	2015	4,9366	2073	5,1439	2132	5,3571	2192	5,5763	2254
	$\Delta_v = 718$.		$\Delta_v = 753$.		$\Delta_v = 789$.		$\Delta_v = 826$.		$\Delta_v = 865$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}10$.		$z = 1{,}12$.		$z = 1{,}14$.		$z = 1{,}16$.		$z = 1{,}18$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	2,0042	607	2,0649	619	2,1268	631	2,1899	645	2,2544	657
0,1	2,0946	647	2,1593	661	2,2254	675	2,2929	689	2,3618	703
0,2	2,1850	688	2,2538	703	2,3241	718	2,3959	733	2,4692	749
0,3	2,2754	729	2,3483	745	2,4228	761	2,4989	778	2,5767	795
0,4	2,3658	770	2,4428	787	2,5215	804	2,6019	822	2,6841	841
0,5	2,4562	811	2,5373	829	2,6202	847	2,7049	867	2,7916	886
0,6	2,5467	851	2,6318	870	2,7188	891	2,8079	911	2,8990	939
0,7	2,6371	892	2,7263	912	2,8175	934	2,9109	955	3,0064	978
0,8	2,7275	932	2,8207	955	2,9162	977	3,0139	1000	3,1189	1023
0,9	2,8179	973	2,9152	997	3,0149	1020	3,1169	1044	3,2213	1069
1,0	2,9083	1014	3,0097	1038	3,1135	1064	3,2199	1088	3,3287	1115
1,1	2,9987	1055	3,1042	1080	3,2122	1107	3,3229	1133	3,4362	1160
1,2	3,0892	1095	3,1987	1122	3,3109	1150	3,4259	1177	3,5486	1207
1,3	3,1796	1136	3,2932	1164	3,4096	1192	3,5288	1223	3,6511	1252
1,4	3,2700	1177	3,3877	1205	3,5082	1236	3,6318	1267	3,7585	1298
1,5	3,3604	1217	3,4821	1248	3,6069	1279	3,7348	1311	3,8659	1344
1,6	3,4508	1258	3,5766	1290	3,7056	1322	3,8378	1356	3,9734	1389
1,7	3,5412	1299	3,6711	1332	3,8043	1365	3,9408	1400	4,0808	1435
1,8	3,6317	1339	3,7656	1374	3,9030	1408	4,0438	1444	4,1882	1481
1,9	3,7221	1380	3,8601	1415	4,0016	1452	4,1468	1489	4,2957	1526
2,0	3,8125	1421	3,9546	1457	4,1003	1495	4,2498	1533	4,4031	1573
2,1	3,9029	1461	4,0490	1500	4,1990	1538	4,3528	1578	4,5106	1618
2,2	3,9933	1502	4,1435	1542	4,2977	1581	4,4558	1622	4,6180	1664
2,3	4,0837	1543	4,2380	1583	4,3963	1625	4,5588	1666	4,7254	1710
2,4	4,1742	1583	4,3325	1625	4,4950	1668	4,6618	1711	4,8329	1755
2,5	4,2646	1624	4,4270	1667	4,5937	1711	4,7648	1755	4,9403	1801
2,6	4,3550	1665	4,5215	1709	4,6924	1754	4,8678	1799	5,0477	1847
2,7	4,4454	1706	4,6160	1750	4,7910	1798	4,9708	1844	5,1552	1892
2,8	4,5358	1746	4,7104	1793	4,8897	1840	5,0737	1889	5,2626	1938
2,9	4,6262	1787	4,8049	1835	4,9884	1883	5,1767	1934	5,3701	1984
3,0	4,7167	1827	4,8994	1877	5,0871	1926	5,2797	1978	5,4775	2030
3,1	4,8071	1868	4,9939	1919	5,1858	1969	5,3827	2022	5,5849	2076
3,2	4,8975	1909	5,0884	1960	5,2844	2013	5,4857	2067	5,6924	2121
3,3	4,9879	1950	5,1829	2002	5,3831	2056	5,5887	2111	5,7998	2167
3,4	5,0783	1991	2,2774	2044	5,4818	2099	5,6917	2155	5,9072	2213
3,5	5,1687	2031	5,3718	2087	5,5805	2142	5,7947	2200	6,0147	2258
3,6	5,2592	2071	5,4663	2128	5,6791	2186	5,8977	2244	6,1221	2304
3,7	5,3496	2112	5,5608	2170	5,7778	2229	6,0007	2289	6,2296	2349
3,8	5,4400	2153	5,6553	2212	5,8765	2272	6,1037	2333	6,3370	2396
3,9	5,5804	2194	5,7498	2254	5,9752	2315	6,2067	2377	6,4444	2442
4,0	5,6208	2235	5,8443	2295	6,0738	2359	6,3097	2422	6,5519	2487
4,1	5,7112	2276	5,9388	2337	6,1725	2402	6,4127	2466	6,6593	2533
4,2	5,8017	2315	6,0332	2380	6,2712	2445	6,5157	2510	6,7667	2579
	$\Delta_v = 904$.		$\Delta_v = 945$.		$\Delta_v = 987$.		$\Delta_v = 1030$.		$\Delta_v = 1074$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}20$.		$z = 1{,}22$.		$z = 1{,}24$.		$z = 1{,}26$.		$z = 1{,}28$.	
V_0^2	$z\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	2,3201	671	2,3872	684	2,4556	698	2,5254	712	2,5966	727
0,1	2,4321	718	2,5039	733	2,5772	748	2,6520	763	2,7283	779
0,2	2,5441	765	2,6206	781	2,6987	798	2,7785	815	2,8600	832
0,3	2,6562	811	2,7373	830	2,8203	847	2,9050	866	2,9916	885
0,4	2,7682	859	2,8541	878	2,9419	897	3,0316	917	3,1233	937
0,5	2,8802	906	2,9708	926	3,0634	947	3,1581	969	3,2550	989
0,6	2,9922	953	3,0675	975	3,1850	997	3,2847	1019	3,3866	1043
0,7	3,1042	1000	3,2042	1023	3,3065	1047	3,4112	1071	3,5183	1095
0,8	3,2162	1047	3,3209	1072	3,4281	1097	3,5378	1122	3,6500	1147
0,9	3,3282	1095	3,4377	1120	3,5497	1146	3,6643	1173	3,7816	1201
1,0	3,4402	1142	3,5544	1168	3,6712	1196	3,7908	1225	3,9133	1253
1,1	3,5522	1189	3,6711	1217	3,7928	1246	3,9174	1275	4,0449	1306
1,2	3,6643	1235	3,7878	1265	3,9143	1296	4,0439	1327	4,1766	1359
1,3	3,7763	1282	3,9045	1314	4,0359	1346	4,1705	1378	4,3083	1411
1,4	3,8883	1330	4,0213	1362	4,1575	1395	4,2970	1429	4,4399	1464
1,5	4,0003	1377	4,1380	1410	4,2790	1446	4,4236	1480	4,5716	1516
1,6	4,1123	1424	4,2547	1459	4,4006	1495	4,5501	1532	4,7033	1569
1,7	4,2243	1471	4,3714	1508	4,5222	1544	4,6766	1583	4,8349	1622
1,8	4,3363	1518	4,4881	1556	4,6437	1595	4,8032	1634	4,9666	1674
1,9	4,4483	1565	4,6048	1605	4,7653	1644	4,9297	1686	5,0983	1727
2,0	4,5604	1612	4,7216	1652	4,8865	1695	5,0563	1736	5,2299	1780
2,1	4,6724	1659	4,8383	1701	5,0084	1744	5,1828	1785	5,3616	1832
2,2	4,7844	1706	4,9550	1750	5,1300	1793	5,3093	1839	5,4932	1885
2,3	4,8964	1753	5,0717	1798	5,2515	1844	5,4359	1890	5,6249	1938
2,4	5,0084	1800	5,1884	1847	5,3731	1893	5,5624	1942	5,7566	1990
2,5	5,1204	1848	5,3052	1894	5,4946	1944	5,6890	1992	5,8882	2043
2,6	5,2324	1895	5,4219	1943	5,6162	1993	5,8155	2044	6,0199	2096
2,7	5,3444	1942	5,5386	1992	5,7378	2043	5,9421	2095	6,1516	2148
2,8	5,4564	1989	5,6553	2040	5,8593	2093	6,0686	2146	6,2832	2201
2,9	5,5685	2035	5,7720	2089	5,9809	2142	6,1951	2198	6,4149	2254
3,0	5,6805	2083	5,8888	2137	6,1025	2192	6,3217	2249	6,5466	2306
3,1	5,7925	2130	6,0055	2185	6,2240	2242	6,4482	2300	6,6782	2359
3,2	5,9045	2177	6,1222	2234	6,3456	2292	6,5748	2351	6,8099	2411
3,3	6,0165	2224	6,2389	2282	6,4671	2342	6,7013	2403	6,9416	2464
3,4	6,1285	2271	6,3556	2331	6,5887	2392	6,8279	2453	7,0732	2517
3,5	6,2405	2318	6,4723	2380	6,7103	2441	6,9544	2505	7,2049	2569
3,6	6,3525	2366	6,5891	2427	6,8318	2491	7,0809	2556	7,3365	2623
3,7	6,4645	2413	6,7058	2476	6,9534	2541	7,2075	2607	7,4682	2675
3,8	6,5766	2459	6,8225	2524	7,0749	2591	7,3340	2659	7,5999	2727
3,9	6,6886	2506	6,9392	2573	7,1965	2641	7,4606	2709	7,7315	2781
4,0	6,8006	2553	7,0559	2622	7,3181	2690	7,5871	2761	7,8632	2833
4,1	6,9126	2601	7,1727	2669	7,4396	2740	7,7136	2813	7,9949	2885
4,2	7,0246	2648	7,2894	2718	7,5612	2790	7,8402	2863	8,1265	2938
	$\Delta_v = 1120$.		$\Delta_v = 1167$.		$\Delta_v = 1216$.		$\Delta_v = 1265$.		$\Delta_v = 1317$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}30$.		$z = 1{,}32$.		$z = 1{,}34$.		$z = 1{,}36$.		$z = 1{,}38$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	2,6693	741	2,7434	756	2,8190	772	2,8962	787	2,9749	803
0,1	2,8062	796	2,8858	811	2,9669	829	3,0498	846	3,1344	863
0,2	2,9432	849	3,0281	868	3,1149	885	3,2034	905	3,2939	923
0,3	3,0801	903	3,1704	924	3,2628	943	3,3571	963	3,4534	984
0,4	3,2170	958	3,3128	979	3,4107	1000	3,5107	1022	3,6129	1044
0,5	3,3539	1012	3,4551	1035	3,5586	1057	3,6643	1081	3,7724	1104
0,6	3,4909	1066	3,5975	1090	3,7065	1114	3,8179	1139	3,9318	1165
0,7	3,6278	1120	3,7398	1146	3,8544	1171	3,9715	1198	4,0913	1225
0,8	3,7647	1175	3,8822	1201	4,0023	1228	4,1251	1257	4,2508	1286
0,9	3,9017	1228	4,0245	1257	4,1502	1286	4,2788	1315	4,4103	1346
1,0	4,0386	1282	4,1668	1313	4,2981	1343	4,4324	1374	4,5698	1406
1,1	4,1755	1337	4,3092	1368	4,4460	1400	4,5860	1433	4,7293	1466
1,2	4,3125	1390	4,4515	1424	4,5939	1457	4,7396	1492	4,8888	1526
1,3	4,4494	1445	4,5939	1479	4,7418	1514	4,8932	1551	5,0483	1587
1,4	4,5863	1499	4,7362	1535	4,8897	1572	5,0469	1609	5,2078	1647
1,5	4,7232	1554	4,8786	1590	5,0376	1629	5,2005	1668	5,3673	1707
1,6	4,8602	1607	5,0209	1646	5,1855	1686	5,3541	1726	5,5267	1768
1,7	4,9971	1661	5,1632	1702	5,3334	1743	5,5077	1785	5,6862	1828
1,8	5,1340	1716	5,3056	1757	5,4813	1800	5,6613	1844	5,8457	1889
1,9	5,2710	1769	5,4479	1813	5,6292	1858	5,8150	1902	6,0052	1949
2,0	5,4079	1824	5,5903	1868	5,7771	1915	5,9686	1961	6,1647	2009
2,1	5,5448	1878	5,7326	1924	5,9250	1972	6,1222	2020	6,3242	2069
2,2	5,6817	1932	5,8749	1980	6,0729	2029	6,2758	2079	6,4837	2129
2,3	5,8187	1986	6,0173	2035	6,2208	2086	6,4294	2138	6,6432	2190
2,4	5,9556	2040	6,1596	2091	6,3687	2144	6,5831	2196	6,8027	2250
2,5	6,0925	2095	6,3020	2147	6,5167	2200	6,7367	2255	6,9622	2310
2,6	6,2295	2148	6,4443	2203	6,6646	2257	6,8903	2313	7,1216	2371
2,7	6,3664	2203	6,5867	2258	6,8125	2314	7,0439	2372	7,2811	2431
2,8	6,5033	2257	6,7290	2314	6,9604	2371	7,1975	2431	7,4406	2492
2,9	6,6403	2310	6,8713	2370	7,1083	2429	7,3512	2489	7,6001	2552
3,0	6,7772	2365	7,0137	2425	7,2562	2486	7,5048	2548	7,7596	2612
3,1	6,9141	2419	7,1560	2481	7,4041	2543	7,6584	2607	7,9191	2672
3,2	7,0510	2474	7,2984	2536	7,5520	2600	7,8120	2666	8,0786	2732
3,3	7,1880	2527	7,4407	2592	7,6999	2657	7,9656	2725	8,2381	2793
3,4	7,3249	2582	7,5831	2647	7,8478	2715	8,1193	2783	8,3976	2853
3,5	7,4618	2636	7,7254	2703	7,9957	2772	8,2729	2842	8,5571	2913
3,6	7,5988	2689	7,8677	2759	8,1436	2829	8,4265	2900	8,7165	2974
3,7	7,7357	2744	8,0101	2814	8,2915	2886	8,5801	2959	8,8760	3034
3,8	7,8726	2798	8,1524	2870	8,4394	2943	8,7337	3018	9,0355	3095
3,9	8,0096	2852	8,2948	2925	8,5873	3000	8,8873	3077	9,1950	3155
4,0	8,1465	2906	8,4371	2981	8,7352	3058	9,0410	3135	9,3545	3215
4,1	8,2834	2960	8,5794	3037	8,8831	3115	9,1946	3194	9,5140	3275
4,2	8,4203	3015	8,7218	3092	9,0310	3172	9,3482	3253	9,6735	3335
	$\Delta_v = 1369$.		$\Delta_v = 1423$.		$\Delta_v = 1479$.		$\Delta_v = 1536$.		$\Delta_v = 1595$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}40$.		$z = 1{,}42$.		$z = 1{,}44$.		$z = 1{,}46$.		$z = 1{,}48$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z, V_0^2)$	Δ_z
0,0	3,0552	819	3,1371	836	3,2207	853	3,3060	869	3,3929	888
0,1	3,2207	881	3,3088	900	3,3988	918	3,4906	936	3,5842	957
0,2	3,3862	943	3,4805	963	3,5768	984	3,6752	1003	3,7755	1025
0,3	3,5518	1005	3,6523	1026	3,7549	1048	3,8597	1071	3,9668	1094
0,4	3,7173	1067	3,8240	1090	3,9330	1113	4,0443	1138	4,1581	1163
0,5	3,8828	1129	3,9957	1153	4,1110	1179	4,2289	1205	4,3494	1231
0,6	4,0483	1191	4,1674	1217	4,2891	1244	4,4135	1272	4,5407	1300
0,7	4,2138	1253	4,3391	1281	4,4672	1309	4,5981	1339	4,7320	1369
0,8	4,3794	1314	4,5108	1345	4,6453	1374	4,7827	1406	4,9933	1437
0,9	4,5449	1376	4,6825	1408	4,8233	1440	4,9673	1473	5,1146	1506
1,0	4,7104	1438	4,8542	1472	5,0014	1505	5,1519	1540	5,3059	1575
1,1	4,8759	1501	5,0260	1535	5,1795	1570	5,3365	1607	5,4972	1643
1,2	5,0414	1563	5,1977	1598	5,3575	1636	5,5211	1674	5,6885	1712
1,3	5,2070	1624	5,3694	1662	5,5356	1701	5,7057	1741	5,8798	1781
1,4	5,3725	1686	5,5411	1726	5,7137	1776	5,8903	1809	6,0711	1850
1,5	5,5380	1748	5,7128	1789	5,8917	1832	6,0749	1875	6,2624	1918
1,6	5,7035	1810	5,8845	1853	6,0698	1897	6,2595	1942	6,4537	1987
1,7	5,8690	1872	6,0562	1917	6,2479	1962	6,4441	2008	6,6450	2056
1,8	6,0346	1933	6,2279	1980	6,4259	2028	6,6287	2075	6,8362	2125
1,9	6,2001	1995	6,3996	2044	6,6040	2093	6,8133	2142	7,0275	2194
2,0	6,3656	2058	6,5714	2107	6,7821	2158	6,9979	2209	7,2188	2263
2,1	6,5311	2120	6,7431	2171	6,9602	2223	7,1825	2276	7,4101	2331
2,2	6,6966	2182	6,9148	2234	7,1382	2289	7,3671	2343	7,6014	2400
2,3	6,8622	2243	7,0865	2298	7,3163	2354	7,5517	2410	7,7927	2469
2,4	7,0277	2305	7,2582	2362	7,4944	2419	7,7363	2477	7,9840	2537
2,5	7,1932	2367	7,4299	2425	7,6724	2485	7,9209	2544	8,1753	2606
2,6	7,3587	2429	7,6016	2489	7,8505	2550	8,1055	2611	8,3666	2675
2,7	7,5242	2491	7,7733	2553	8,0286	2615	8,2901	2678	8,5579	2743
2,8	7,6898	2553	7,9451	2615	8,2066	2680	8,4746	2746	8,7492	2812
2,9	7,8553	2615	8,1168	2679	8,3847	2745	8,6592	2813	8,9405	2881
3,0	8,0208	2677	8,2885	2743	8,5628	2810	8,8438	2880	9,1318	2950
3,1	8,1863	2739	8,4602	2807	8,7409	2875	9,0284	2947	9,3231	3018
3,2	8,3518	2801	8,6319	2870	8,9189	2941	9,2130	3014	9,5144	3087
3,3	8,5174	2862	8,8036	2934	9,0970	3006	9,3976	3081	9,7057	3156
3,4	8,6829	2924	8,9753	2998	9,2751	3071	9,5822	3148	9,8970	3224
3,5	8,8484	2986	9,1470	3061	9,4531	3137	9,7668	3215	10,0883	3293
3,6	9,0139	3049	9,3188	3124	9,6312	3202	9,9514	3282	10,2796	3362
3,7	9,1794	3111	9,4905	3188	9,8093	3267	10,1360	3348	10,4708	3431
3,8	9,3450	3172	9,6622	3251	9,9873	3333	10,3206	3415	10,6621	3500
3,9	9,5105	3234	9,8339	3315	10,1654	3398	10,5052	3482	10,8534	3569
4,0	9,6760	3296	10,0056	3379	10,3435	3463	10,6898	3549	11,0447	3637
4,1	9,8415	3358	10,1773	3442	10,5215	3529	10,8744	3616	11,2360	3706
4,2	10,0070	3420	10,3490	3506	10,6996	3594	11,0590	3683	11,4273	3775
	$\Delta_v = 1655$.		$\Delta_v = 1717$.		$\Delta_v = 1781$.		$\Delta_v = 1846$.		$\Delta_v = 1913$.	

Digitized by Google

	$z = 1{,}50$.		$z = 1{,}52$.		$z = 1{,}54$.		$z = 1{,}56$.		$z = 1{,}58$.	
V_0^2	$z.\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z\,\mathfrak{J}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	3,4817	905	3,5722	924	3,6646	942	3,7588	962	3,8550	980
0,1	3,6799	975	3,7774	996	3,8770	1017	3,9787	1038	4,0825	1058
0,2	3,8780	1047	3,9827	1068	4,1986	1091	4,1986	1113	4,3099	1137
0,3	4,0762	1117	4,1879	1141	4,3020	1165	4,4185	1189	4,5774	1215
0,4	4,2744	1187	4,3931	1213	4,5144	1239	4,6383	1266	4,7649	1293
0,5	4,4725	1258	4,5983	1286	4,7269	1313	4,8582	1342	4,9924	1371
0,6	4,6707	1329	4,8036	1357	4,9393	1388	5,0781	1418	5,2199	1450
0,7	4,8689	1399	5,0088	1430	5,1518	1462	5,2980	1494	5,4474	1528
0,8	5,0670	1470	5,2140	1503	5,3643	1536	5,5179	1570	5,6749	1606
0,9	5,2652	1540	5,4192	1575	5,5767	1611	5,7378	1646	5,9024	1684
1,0	5,4634	1611	5,6245	1647	5,7892	1684	5,9576	1723	6,1299	1762
1,1	5,6615	1682	5,8297	1719	6,0016	1759	6,1775	1799	6,3574	1840
1,2	5,8597	1752	6,0349	1792	6,2141	1833	6,3974	1875	6,5849	1918
1,3	6,0579	1822	6,2401	1865	6,4266	1907	6,6173	1951	6,8124	1996
1,4	6,2561	1892	6,4453	1937	6,6390	1982	6,8372	2027	7,0399	2074
1,5	6,4542	1964	6,6506	2009	6,8515	2056	7,0571	2103	7,2674	2152
1,6	6,6524	2034	6,8558	2081	7,0639	2130	7,2769	2180	7,4949	2230
1,7	6,8506	2104	7,0610	2154	7,2764	2204	7,4968	2256	7,7224	2308
1,8	7,0487	2175	7,2662	2227	7,4889	2278	7,7167	2332	7,9499	2386
1,9	7,2469	2246	7,4715	2298	7,7013	2353	7,9366	2408	8,1774	2464
2,0	7,4451	2316	7,6767	2371	7,9138	2427	8,1565	2484	8,4049	2542
2,1	7,6432	2387	7,8819	2443	8,1262	2501	8,3763	2561	8,6324	2620
2,2	7,8414	2457	8,0871	2516	8,3387	2575	8,5962	2637	8,8599	2698
2,3	8,0396	2527	8,2923	2588	8,5511	2650	8,8161	2713	9,0874	2776
2,4	8,2377	2599	8,4976	2660	8,7636	2724	9,0360	2789	9,3149	2854
2,5	8,4359	2669	8,7028	2733	8,9761	2798	9,2559	2864	9,5423	2933
2,6	8,6341	2739	8,9080	2805	9,1885	2873	9,4758	2940	9,7698	3011
2,7	8,8322	2810	9,1132	2878	9,4010	2946	9,6956	3017	9,9973	3089
2,8	9,0304	2881	9,3185	2949	9,6134	3021	9,9155	3093	10,2248	3167
2,9	9,2286	2951	9,5237	3022	9,8259	3095	10,1354	3169	10,4523	3245
3,0	9,4268	3021	9,7289	3095	10,0384	3169	10,3553	3245	10,6798	3323
3,1	9,6249	3092	9,9341	3167	10,2508	3244	10,5752	3321	10,9073	3401
3,2	9,8231	3162	10,1393	3245	10,4633	3317	10,7950	3398	11,1348	3479
3,3	10,0213	3233	10,3446	3311	10,6757	3392	11,0149	3474	11,3623	3557
3,4	10,2194	3304	10,5498	3384	10,8882	3466	11,2348	3550	11,5898	3635
3,5	10,4176	3374	10,7550	3457	11,1007	3540	11,4547	3626	11,8173	3713
3,6	10,6158	3444	10,9602	3529	11,3131	3615	11,6746	3702	12,0448	3791
3,7	10,8139	3516	11,1655	3601	11,5256	3689	11,8945	3778	12,2723	3870
3,8	11,0121	3586	11,3707	3673	11,7380	3763	12,1143	3855	12,4998	3948
3,9	11,2103	3656	11,5759	3746	11,9505	3837	12,3342	3931	12,7273	4026
4,0	11,4084	3727	11,7811	3819	12,1630	3911	12,5541	4007	12,9548	4104
4,1	11,6066	3797	11,9863	3891	12,3754	3986	12,7740	4083	13,1823	4182
4,2	11,8048	3868	12,1916	3963	12,5879	4060	12,9939	4159	13,4098	4260
	$\Delta_v = 1982$.		$\Delta_v = 2052$.		$\Delta_v = 2125$.		$\Delta_v = 2199$.		$\Delta_v = 2275$.	

Digitized by Google

V_0^2	$z = 1{,}60$.		$z = 1{,}62$.		$z = 1{,}64$.		$z = 1{,}66$.		$z = 1.68$.	
	$z.\mathfrak{Z}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{Z}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{Z}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{Z}(z,V_0^2)$	Δ_z	$z.\mathfrak{Z}(z,V_0^2)$	Δ_z
0,0	3,9530	1001	4,0531	1021	4,1552	1041	4,2593	1063	4,3656	1083
0,1	4,1883	1081	4,2964	1103	4,4067	1125	4,5192	1149	4,6341	1172
0,2	4,4236	1161	4,5397	1185	4,6582	1210	4,7792	1235	4,9027	1260
0,3	4,6589	1241	4,7830	1267	4,9097	1294	5,0391	1321	5,1712	1349
0,4	4,8942	1321	5,0263	1349	5,1612	1378	5,2990	1408	5,4396	1437
0,5	5,1295	1401	5,2696	1432	5,4128	1462	5,5590	1493	5,7083	1526
0,6	5,3649	1480	5,5129	1514	5,6643	1546	5,8189	1580	5,9769	1614
0,7	5,6002	1561	5,7563	1595	5,9158	1630	6,0788	1666	6,2454	1703
0,8	5,8355	1641	5,9996	1677	6,1673	1715	6,3388	1752	6,5140	1791
0,9	6,0708	1721	6,2429	1759	6,4188	1799	6,5987	1839	6,7826	1879
1,0	6,3061	1801	6,4862	1841	6,6703	1883	6,8586	1925	7,0511	1968
1,1	6,5414	1881	6,7295	1924	6,9219	1967	7,1186	2011	7,3197	2056
1,2	6,7767	1961	6,9728	2006	7,1734	2051	7,3785	2097	7,5882	2145
1,3	7,0120	2041	7,2161	2088	7,4249	2135	7,6384	2184	7,8568	2233
1,4	7,2473	2121	7,4594	2170	7,6764	2219	7,8983	2270	8,1253	2322
1,5	7,4826	2201	7,7027	2252	7,9279	2304	8,1583	2356	8,3939	2410
1,6	7,7179	2281	7,9460	2334	8,1794	2388	8,4182	2442	8,6624	2499
1,7	7,9532	2361	8,1893	2417	8,4310	2471	8,6781	2529	8,9310	2587
1,8	8,1885	2442	8,4327	2498	8,6825	2556	8,9381	2615	9,1996	2675
1,9	8,4238	2522	8,6760	2580	8,9340	2640	9,1980	2701	9,4681	2763
2,0	8,6591	2602	8,9193	2662	9,1855	2724	9,4579	2788	9,7367	2851
2,1	8,8944	2682	9,1626	2744	9,4370	2809	9,7179	2873	10,0052	2940
2,2	9,1297	2762	9,4059	2826	9,6885	2893	9,9772	2960	10,2738	3028
2,3	9,3650	2842	9,6492	2909	9,9401	2976	10,2377	3046	10,5423	3117
2,4	9,6003	2922	9,8925	2991	10,1916	3061	10,4977	3132	10,8109	3205
2,5	9,8356	3002	10,1358	3073	10,4431	3145	10,7576	3218	11,0794	3294
2,6	10,0709	3082	10,3791	3155	10,6946	3229	11,0175	3305	11,3480	3382
2,7	10,3062	3162	10,6224	3237	10,9461	3314	11,2775	3391	11,6166	3470
2,8	10,5415	3242	10,8657	3319	11,1976	3398	11,5374	3477	11,8851	3559
2,9	10,7768	3323	11,1091	3401	11,4492	3481	11,7973	3564	12,1537	3647
3,0	11,0121	3403	11,3524	3483	11,7007	3565	12,0572	3650	12,4222	3736
3,1	11,2474	3483	11,5957	3565	11,9522	3650	12,3172	3736	12,6908	3824
3,2	11,4827	3563	11,8390	3647	12,2037	3734	12,5771	3822	12,9593	3913
3,3	11,7180	3643	12,0823	3729	12,4552	3818	12,8370	3909	13,2279	4001
3,4	11,9533	3723	12,3256	3811	12,7067	3903	13,0970	3994	13,4964	4090
3,5	12,1886	3803	12,5689	3894	12,9583	3986	13,3569	4081	13,7650	4178
3,6	12,4239	3883	12,8122	3976	13,2098	4070	13,6168	4168	14,0336	4266
3,7	12,6593	3962	13,0555	4058	13,4613	4155	13,8768	4253	14,3021	4355
3,8	12,8946	4042	13,2988	4140	13,7128	4239	14,1367	4340	14,5707	4442
3,9	13,1299	4122	13,5421	4222	13,9643	4323	14,3966	4426	14,8392	4531
4,0	13,3652	4203	13,7855	4303	14,2158	4408	14,6566	4512	15,1078	4619
4,1	13,6005	4283	14,0288	4386	14,4674	4491	14,9165	4598	15,3763	4708
4,2	13,8358	4363	14,2721	4468	14,7189	4575	15,1764	4685	15,6449	4796
	$\Delta_v = 2353$.		$\Delta_v = 2433$.		$\Delta_v = 2515$.		$\Delta_v = 2599$.		$\Delta_v = 2686$.	

Digitized by Google

z	$\mathfrak{P}(z)$	Diff.	z	$\mathfrak{P}(z)$	Diff.	z	$\mathfrak{P}(z)$	Diff.	z	$\mathfrak{P}(z)$	Diff.
0,00	1,0000	17	0,45	1,0713	15	0,90	1,1365	14	1,35	1,1971	13
0,01	1,0017	16	0,46	1,0728	15	0,91	1,1379	14	1,36	1,1984	13
0,02	1,0033	17	0,47	1,0743	15	0,92	1,1393	13	1,37	1,1997	13
0,03	1,0050	16	0,48	1,0758	15	0,93	1,1406	14	1,38	1,2010	13
0,04	1,0066	17	0,49	1,0773	15	0,94	1,1420	14	1,39	1,2023	13
0,05	1,0083	16	0,50	1,0788	15	0,95	1,1434	14	1,40	1,2036	13
0,06	1,0099	16	0,51	1,0803	15	0,96	1,1448	14	1,41	1,2049	13
0,07	1,0115	17	0,52	1,0818	14	0,97	1,1462	13	1,42	1,2062	13
0,08	1,0132	16	0,53	1,0832	15	0,98	1,1475	14	1,43	1,2075	13
0,09	1,0148	16	0,54	1,0847	15	0,99	1,1489	14	1,44	1,2088	13
0,10	1,0164	16	0,55	1,0862	15	1,00	1,1503	14	1,45	1,2101	13
0,11	1,0180	16	0,56	1,0877	15	1,01	1,1517	14	1,46	1,2114	13
0,12	1,0196	17	0,57	1,0892	14	1,02	1,1531	13	1,47	1,2127	12
0,13	1,0213	16	0,58	1,0906	15	1,03	1,1544	14	1,48	1,2139	13
0,14	1,0229	16	0,59	1,0921	15	1,04	1,1558	14	1,49	1,2152	13
0,15	1,0245	16	0,60	1,0936	15	1,05	1,1572	14	1,50	1,2165	13
0,16	1,0261	16	0,61	1,0951	14	1,06	1,1586	13	1,51	1,2178	13
0,17	1,0277	16	0,62	1,0965	15	1,07	1,1599	14	1,52	1,2191	12
0,18	1,0293	16	0,63	1,0980	14	1,08	1,1613	13	1,53	1,2203	13
0,19	1,0309	16	0,64	1,0994	15	1,09	1,1626	14	1,54	1,2216	13
0,20	1,0325	16	0,65	1,1009	14	1,10	1,1640	14	1,55	1,2229	13
0,21	1,0341	16	0,66	1,1023	15	1,11	1,1654	13	1,56	1,2242	12
0,22	1,0357	15	0,67	1,1038	14	1,12	1,1667	13	1,57	1,2254	13
0,23	1,0372	16	0,68	1,1052	15	1,13	1,1680	14	1,58	1,2267	12
0,24	1,0388	16	0,69	1,1067	14	1,14	1,1694	13	1,59	1,2279	13
0,25	1,0404	16	0,70	1,1081	14	1,15	1,1707	13	1,60	1,2292	13
0,26	1,0420	15	0,71	1,1095	15	1,16	1,1720	14	1,61	1,2305	12
0,27	1,0435	16	0,72	1,1110	14	1,17	1,1734	13	1,62	1,2317	13
0,28	1,0451	15	0,73	1,1124	15	1,18	1,1747	14	1,63	1,2330	12
0,29	1,0466	16	0,74	1,1139	14	1,19	1,1761	13	1,64	1,2342	13
0,30	1,0482	16	0,75	1,1153	14	1,20	1,1774	13	1,65	1,2355	13
0,31	1,0498	15	0,76	1,1167	14	1,21	1,1787	13	1,66	1,2368	12
0,32	1,0513	16	0,77	1,1181	15	1,22	1,1800	14	1,67	1,2380	13
0,33	1,0529	15	0,78	1,1196	14	1,23	1,1814	13	1,68	1,2393	12
0,34	1,0544	16	0,79	1,1210	14	1,24	1,1827	13	1,69	1,2405	13
0,35	1,0560	15	0,80	1,1224	14	1,25	1,1840	13	1,70	1,2418	12
0,36	1,0575	16	0,81	1,1238	14	1,26	1,1853	13	1,71	1,2430	13
0,37	1,0591	15	0,82	1,1252	15	1,27	1,1866	14	1,72	1,2443	12
0,38	1,0606	16	0,83	1,1267	14	1,28	1,1880	13	1,73	1,2455	12
0,39	1,0622	15	0,84	1,1281	14	1,29	1,1893	13	1,74	1,2467	13
0,40	1,0637	15	0,85	1,1295	14	1,30	1,1906	13	1,75	1,2480	12
0,41	1,0652	15	0,86	1,1309	14	1,31	1,1919	13	1,76	1,2492	12
0,42	1,0667	16	0,87	1,1323	14	1,32	1,1932	13	1,77	1,2504	13
0,43	1,0683	15	0,88	1,1337	14	1,33	1,1945	13	1,78	1,2517	12
0,44	1,0698	15	0,89	1,1351	14	1,34	1,1958	13	1,79	1,2529	13
0,45	1,0713		0,90	1,1365		1,35	1,1971		1,80	1,2542	

Digitized by Google

z	$\mathfrak{J}(z)$	Diff.	z	$\mathfrak{J}(z)$	Diff.	z	$\mathfrak{J}(z)$	Diff.	z	$\mathfrak{J}(z)$	Diff.
0,00	1,0000	25	0,45	1,1052	22	0,90	1,1992	20	1,35	1,2852	18
0,01	1,0025	24	0,46	1,1074	22	0,91	1,2012	20	1,36	1,2870	18
0,02	1,0049	25	0,47	1,1096	22	0,92	1,2032	20	1,37	1,2888	19
0,03	1,0074	25	0,48	1,1118	22	0,93	1,2052	20	1,38	1,2907	18
0,04	1,0099	25	0,49	1,1140	22	0,94	1,2072	20	1,39	1,2925	18
0,05	1,0124	24	0,50	1,1162	21	0,95	1,2092	20	1,40	1,2943	18
0,06	1,0148	25	0,51	1,1183	22	0,96	1,2112	19	1,41	1,2961	18
0,07	1,0173	24	0,52	1,1205	22	0,97	1,2131	20	1,42	1,2979	18
0,08	1,0197	25	0,53	1,1227	21	0,98	1,2151	19	1,43	1,2997	19
0,09	1,0222	24	0,54	1,1248	22	0,99	1,2170	20	1,44	1,3016	18
0,10	1,0246	24	0,55	1,1270	21	1,00	1,2190	19	1,45	1,3034	18
0,11	1,0270	24	0,56	1,1291	21	1,01	1,2209	20	1,46	1,3052	18
0,12	1,0294	24	0,57	1,1312	22	1,02	1,2229	19	1,47	1,3070	18
0,13	1,0318	24	0,58	1,1334	21	1,03	1,2248	20	1,48	1,3088	18
0,14	1,0342	24	0,59	1,1355	21	1,04	1,2268	19	1,49	1,3106	18
0,15	1,0366	24	0,60	1,1376	21	1,05	1,2287	19	1,50	1,3124	18
0,16	1,0390	24	0,61	1,1397	21	1,06	1,2306	19	1,51	1,3142	17
0,17	1,0414	24	0,62	1,1418	21	1,07	1,2325	19	1,52	1,3159	18
0,18	1,0438	23	0,63	1,1439	22	1,08	1,2344	20	1,53	1,3177	18
0,19	1,0461	24	0,64	1,1461	21	1,09	1,2364	19	1,54	1,3195	18
0,20	1,0485	23	0,65	1,1482	21	1,10	1,2383	19	1,55	1,3213	18
0,21	1,0508	23	0,66	1,1503	20	1,11	1,2402	19	1,56	1,3231	17
0,22	1,0531	23	0,67	1,1523	21	1,12	1,2421	19	1,57	1,3248	18
0,23	1,0554	24	0,68	1,1544	21	1,13	1,2440	19	1,58	1,3266	17
0,24	1,0578	23	0,69	1,1565	21	1,14	1,2459	19	1,59	1,3283	18
0,25	1,0601	23	0,70	1,1586	21	1,15	1,2478	19	1,60	1,3301	18
0,26	1,0624	23	0,71	1,1607	20	1,16	1,2497	19	1,61	1,3319	17
0,27	1,0647	23	0,72	1,1627	21	1,17	1,2516	19	1,62	1,3336	18
0,28	1,0670	23	0,73	1,1648	20	1,18	1,2535	19	1,63	1,3354	17
0,29	1,0693	23	0,74	1,1668	21	1,19	1,2554	19	1,64	1,3371	18
0,30	1,0716	23	0,75	1,1689	20	1,20	1,2573	19	1,65	1,3389	18
0,31	1,0739	22	0,76	1,1709	21	1,21	1,2592	18	1,66	1,3407	17
0,32	1,0761	23	0,77	1,1730	20	1,22	1,2610	19	1,67	1,3424	18
0,33	1,0784	23	0,78	1,1750	21	1,23	1,2629	19	1,68	1,3442	17
0,34	1,0807	23	0,79	1,1771	20	1,24	1,2648	19	1,69	1,3459	18
0,35	1,0830	22	0,80	1,1791	20	1,25	1,2667	19	1,70	1,3477	17
0,36	1,0852	23	0,81	1,1811	20	1,26	1,2686	18	1,71	1,3494	17
0,37	1,0875	22	0,82	1,1831	20	1,27	1,2704	19	1,72	1,3511	18
0,38	1,0897	22	0,83	1,1851	21	1,28	1,2723	18	1,73	1,3529	17
0,39	1,0919	23	0,84	1,1872	20	1,29	1,2741	19	1,74	1,3546	17
0,40	1,0942	22	0,85	1,1892	20	1,30	1,2760	18	1,75	1,3563	17
0,41	1,0964	22	0,86	1,1912	20	1,31	1,2778	19	1,76	1,3580	17
0,42	1,0986	22	0,87	1,1932	20	1,32	1,2797	18	1,77	1,3597	18
0,43	1,1008	22	0,88	1,1952	20	1,33	1,2815	19	1,78	1,3615	17
0,44	1,1030	22	0,89	1,1972	20	1,34	1,2834	18	1,79	1,3632	17
0,45	1,1052		0,90	1,1992		1,35	1,2852		1,80	1,3649	

Digitized by Google

z	$\mathfrak{V}(z)$	Diff.	z	$\mathfrak{V}(z)$	Diff.	z	$\mathfrak{V}(z)$	Diff.	z	$\mathfrak{V}(z)$	Diff.
0,00	1,0000	25	0,45	1,0973	19	0,90	1,1741	15	1,35	1,2381	13
0,01	1,0025	25	0,46	1,0992	19	0,91	1,1756	15	1,36	1,2394	14
0,02	1,0050	24	0,47	1,1011	19	0,92	1,1771	16	1,37	1,2408	13
0,03	1,0074	25	0,48	1,1030	18	0,93	1,1787	15	1,38	1,2421	13
0,04	1,0099	24	0,49	1,1048	19	0,94	1,1802	15	1,39	1,2434	13
0,05	1,0123	24	0,50	1,1067	18	0,95	1,1817	15	1,40	1,2447	13
0,06	1,0147	24	0,51	1,1085	18	0,96	1,1832	15	1,41	1,2460	12
0,07	1,0171	23	0,52	1,1103	19	0,97	1,1847	15	1,42	1,2472	13
0,08	1,0194	24	0,53	1,1122	18	0,98	1,1862	15	1,43	1,2485	13
0,09	1,0218	23	0,54	1,1140	18	0,99	1,1877	15	1,44	1,2498	13
0,10	1,0241	23	0,55	1,1158	18	1,00	1,1892	15	1,45	1,2511	13
0,11	1,0264	23	0,56	1,1176	18	1,01	1,1907	15	1,46	1,2524	12
0,12	1,0287	23	0,57	1,1194	17	1,02	1,1922	14	1,47	1,2536	13
0,13	1,0310	23	0,58	1,1211	18	1,03	1,1936	15	1,48	1,2549	13
0,14	1,0333	23	0,59	1,1229	18	1,04	1,1951	15	1,49	1,2562	12
0,15	1,0356	22	0,60	1,1247	17	1,05	1,1966	14	1,50	1,2574	13
0,16	1,0378	22	0,61	1,1264	18	1,06	1,1980	15	1,51	1,2587	12
0,17	1,0400	22	0,62	1,1282	17	1,07	1,1995	14	1,52	1,2599	13
0,18	1,0422	22	0,63	1,1299	18	1,08	1,2009	15	1,53	1,2612	12
0,19	1,0444	22	0,64	1,1317	17	1,09	1,2024	14	1,54	1,2624	13
0,20	1,0466	22	0,65	1,1334	17	1,10	1,2038	14	1,55	1,2637	12
0,21	1,0488	22	0,66	1,1351	17	1,11	1,2052	15	1,56	1,2649	12
0,22	1,0510	21	0,67	1,1368	17	1,12	1,2067	14	1,57	1,2661	13
0,23	1,0531	22	0,68	1,1385	17	1,13	1,2081	14	1,58	1,2674	12
0,24	1,0553	21	0,69	1,1402	17	1,14	1,2095	14	1,59	1,2686	12
0,25	1,0574	21	0,70	1,1419	17	1,15	1,2109	14	1,60	1,2698	12
0,26	1,0595	21	0,71	1,1436	16	1,16	1,2123	14	1,61	1,2710	12
0,27	1,0616	21	0,72	1,1452	17	1,17	1,2137	14	1,62	1,2722	13
0,28	1,0637	20	0,73	1,1469	16	1,18	1,2151	14	1,63	1,2735	12
0,29	1,0657	21	0,74	1,1485	17	1,19	1,2165	14	1,64	1,2747	12
0,30	1,0678	20	0,75	1,1502	16	1,20	1,2179	14	1,65	1,2759	12
0,31	1,0698	21	0,76	1,1518	16	1,21	1,2193	13	1,66	1,2771	12
0,32	1,0719	20	0,77	1,1534	17	1,22	1,2206	14	1,67	1,2783	12
0,33	1,0739	20	0,78	1,1551	16	1,23	1,2220	14	1,68	1,2795	12
0,34	1,0759	20	0,79	1,1567	16	1,24	1,2234	13	1,69	1,2807	12
0,35	1,0779	20	0,80	1,1583	16	1,25	1,2247	14	1,70	1,2819	11
0,36	1,0799	20	0,81	1,1599	16	1,26	1,2261	14	1,71	1,2830	12
0,37	1,0819	19	0,82	1,1615	16	1,27	1,2275	13	1,72	1,2842	12
0,38	1,0838	20	0,83	1,1631	16	1,28	1,2288	14	1,73	1,2854	12
0,39	1,0858	20	0,84	1,1647	16	1,29	1,2302	13	1,74	1,2866	12
0,40	1,0878	19	0,85	1,1663	15	1,30	1,2315	13	1,75	1,2878	11
0,41	1,0897	19	0,86	1,1678	16	1,31	1,2328	14	1,76	1,2889	12
0,42	1,0916	19	0,87	1,1694	16	1,32	1,2342	13	1,77	1,2901	12
0,43	1,0935	19	0,88	1,1710	15	1,33	1,2355	13	1,78	1,2913	12
0,44	1,0954	19	0,89	1,1725	16	1,34	1,2368	13	1,79	1,2925	11
0,45	1,0973		0,90	1,1741		1,35	1,2381		1,80	1,2936	

Digitized by Google

z	$\mathfrak{T}(z)$	Diff.	z	$\mathfrak{T}(z)$	Diff.	z	$\mathfrak{T}(z)$	Diff.	z	$\mathfrak{T}(z)$	Diff.
0,00	1,0000	13	0,45	1,0509	10	0,90	1,0940	9	1,35	1,1316	8
0,01	1,0013	12	0,46	1,0519	10	0,91	1,0949	9	1,36	1,1324	8
0,02	1,0025	12	0,47	1,0529	11	0,92	1,0958	8	1,37	1,1332	7
0,03	1,0037	13	0,48	1,0540	10	0,93	1,0966	9	1,38	1,1339	8
0,04	1,0050	12	0,49	1,0550	10	0,94	1,0975	9	1,39	1,1347	8
0,05	1,0062	12	0,50	1,0560	10	0,95	1,0984	9	1,40	1,1355	8
0,06	1,0074	12	0,51	1,0570	10	0,96	1,0993	8	1,41	1,1363	8
0,07	1,0086	12	0,52	1,0580	11	0,97	1,1001	9	1,42	1,1371	7
0,08	1,0098	12	0,53	1,0591	10	0,98	1,1010	8	1,43	1,1378	8
0,09	1,0110	12	0,54	1,0601	10	0,99	1,1018	9	1,44	1,1386	8
0,10	1,0122	12	0,55	1,0611	10	1,00	1,1027	9	1,45	1,1394	8
0,11	1,0134	12	0,56	1,0621	10	1,01	1,1036	8	1,46	1,1402	7
0,12	1,0146	11	0,57	1,0631	9	1,02	1,1044	9	1,47	1,1409	8
0,13	1,0157	12	0,58	1,0640	10	1,03	1,1053	8	1,48	1,1417	7
0,14	1,0169	12	0,59	1,0650	10	1,04	1,1061	9	1,49	1,1424	8
0,15	1,0181	12	0,60	1,0660	10	1,05	1,1070	8	1,50	1,1432	8
0,16	1,0193	11	0,61	1,0670	9	1,06	1,1078	9	1,51	1,1440	7
0,17	1,0204	12	0,62	1,0679	10	1,07	1,1087	8	1,52	1,1447	8
0,18	1,0216	11	0,63	1,0689	9	1,08	1,1095	9	1,53	1,1455	7
0,19	1,0227	12	0,64	1,0698	10	1,09	1,1104	8	1,54	1,1462	8
0,20	1,0239	11	0,65	1,0708	10	1,10	1,1112	8	1,55	1,1470	8
0,21	1,0250	11	0,66	1,0718	9	1,11	1,1120	9	1,56	1,1478	7
0,22	1,0261	12	0,67	1,0727	10	1,12	1,1129	8	1,57	1,1485	8
0,23	1,0273	11	0,68	1,0737	9	1,13	1,1137	9	1,58	1,1493	7
0,24	1,0284	11	0,69	1,0746	10	1,14	1,1146	8	1,59	1,1500	8
0,25	1,0295	11	0,70	1,0756	9	1,15	1,1154	8	1,60	1,1508	7
0,26	1,0306	11	0,71	1,0765	10	1,16	1,1162	9	1,61	1,1515	8
0,27	1,0317	11	0,72	1,0775	9	1,17	1,1171	8	1,62	1,1523	7
0,28	1,0328	11	0,73	1,0784	10	1,18	1,1179	9	1,63	1,1530	8
0,29	1,0339	11	0,74	1,0794	9	1,19	1,1188	8	1,64	1,1538	7
0,30	1,0350	11	0,75	1,0803	9	1,20	1,1196	8	1,65	1,1545	7
0,31	1,0361	11	0,76	1,0812	9	1,21	1,1204	8	1,66	1,1552	7
0,32	1,0372	10	0,77	1,0821	10	1,22	1,1212	8	1,67	1,1559	8
0,33	1,0382	11	0,78	1,0831	9	1,23	1,1220	8	1,68	1,1567	7
0,34	1,0393	11	0,79	1,0840	9	1,24	1,1228	8	1,69	1,1574	7
0,35	1,0404	11	0,80	1,0849	9	1,25	1,1236	8	1,70	1,1581	7
0,36	1,0415	10	0,81	1,0858	9	1,26	1,1244	8	1,71	1,1588	7
0,37	1,0425	11	0,82	1,0867	10	1,27	1,1252	8	1,72	1,1595	8
0,38	1,0436	10	0,83	1,0877	9	1,28	1,1260	8	1,73	1,1603	7
0,39	1,0446	11	0,84	1,0886	9	1,29	1,1268	8	1,74	1,1610	7
0,40	1,0457	10	0,85	1,0895	9	1,30	1,1276	8	1,75	1,1617	7
0,41	1,0467	11	0,86	1,0904	9	1,31	1,1284	8	1,76	1,1624	7
0,42	1,0478	10	0,87	1,0913	9	1,32	1,1292	8	1,77	1,1631	8
0,43	1,0488	11	0,88	1,0922	9	1,33	1,1300	8	1,78	1,1639	7
0,44	1,0499	10	0,89	1,0931	9	1,34	1,1308	8	1,79	1,1646	7
0,45	1,0509		0,90	1,0940		1,35	1,1316		1,80	1,1653	

Digitized by Google

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
0	»	000	301	477	602	699	778	845	903	954	
1	000	041	079	114	146	176	204	230	255	279	22
2	301	322	342	362	380	398	415	431	447	462	15
3	477	491	505	519	531	544	556	568	580	591	11
4	602	613	623	633	643	653	663	672	681	690	9
5	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771	7
6	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839	6
7	845	851	857	863	869	875	881	886	892	898	5
8	903	908	914	919	924	929	934	940	944	949	5
9	954	959	964	968	973	978	982	987	991	996	4
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	40
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	37
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	33
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	31
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	29
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	27
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	25
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	24
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	23
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	21
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	21
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	20
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	19
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	18
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	17
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	17
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	16
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	16
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	15
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	14
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	14
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	13
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	13
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	13
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	13
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	12
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	12
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	12
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	12
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	11
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	11
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	10
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	10
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	10
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	10
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	10
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	9
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	9
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	9

Digitized by Google

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	8
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	8
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	8
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	8
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	8
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	7
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	7
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	6
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	6
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	5
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	5
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	5
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	5
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	4

Digitized by Google

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039	4
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082	4
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124	4
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166	4
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208	4
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249	4
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290	4
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330	4
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370	4
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410	4
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449	4
111	0453	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488	4
112	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527	4
113	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565	4
114	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603	4
115	0607	0611	0615	0618	0622	0626	0630	0633	0637	0641	4
116	0645	0648	0652	0656	0660	0663	0667	0671	0674	0678	4
117	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715	4
118	0719	0722	0726	0730	0734	0737	0741	0745	0748	0752	3
119	0755	0759	0763	0766	0770	0774	0777	0781	0785	0788	4
120	0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824	4
121	0828	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860	4
122	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896	3
123	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931	3
124	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966	3
125	0969	0973	0976	0980	0983	0986	0989	0993	0997	1000	4
126	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035	3
127	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069	3
128	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103	3
129	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136	3
130	1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169	4
131	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202	4
132	1206	1209	1212	1216	1219	1222	1225	1229	1232	1235	4
133	1239	1242	1245	1248	1252	1255	1258	1261	1265	1268	3
134	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300	3
135	1303	1307	1310	1313	1316	1319	1323	1326	1329	1332	3
136	1335	1339	1342	1345	1348	1351	1355	1358	1361	1364	3
137	1367	1370	1374	1377	1380	1383	1386	1389	1392	1396	3
138	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427	3
139	1430	1433	1436	1440	1443	1446	1449	1452	1455	1458	3
140	1461	1464	1467	1471	1474	1477	1480	1483	1486	1489	3
141	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520	3
142	1523	1526	1529	1532	1535	1538	1541	1544	1547	1550	3
143	1553	1556	1559	1562	1565	1569	1572	1575	1578	1581	3
144	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611	3
145	1614	1617	1620	1623	1626	1629	1632	1635	1638	1641	3
146	1644	1647	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670	3
147	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700	3
148	1703	1706	1708	1711	1714	1717	1720	1723	1726	1729	3
149	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758	3

Digitized by Google

N.	0	1	2	3	4	5	6	7				
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7				
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126					
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210					
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	72					
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7					
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443						
56	7482	7490	7497	7505	7513	752						
57	7559	7566	7574	7582	7589	75						
58	7634	7642	7649	7657	7664	7						
59	7709	7716	7723	7731	7738							
60	7782	7789	7796	7803	781							
61	7853	7860	7868	7875	78							
62	7924	7931	7938	7945	7							
63	7993	8000	8007	8014								
64	8062	8069	8075	8082								3
65	8129	8136	8142	8							2198	3
66	8195	8202	8209	8						222	2225	2
67	8261	8267	8274							2248	2251	2
68	8325	8331	8338						271	2274	2276	3
69	8388	8395	840						2297	2299	2302	2
70	8451	8457	8				2320	2322	2325	2327	3	
71	8513	8519				343	2345	2348	2350	2353	2	
72	8573	8579				2368	2370	2373	2375	2378	2	
73	8633	8639			390	2393	2395	2398	2400	2403	2	
74	8692	869			2415	2418	2420	2423	2425	2428	2	
75	8751	8		2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453	2	
76	8808		0	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477	3	
77	8865		2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502	2	
78	892		2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526	3	
79	89	31	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550	3	
80		2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574	3	
81	77	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598	3	
82	601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622	3	
83	625	2627	2629	2632	2634	2636	2639	2641	2643	2646	2	
84	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669	3	
185	2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693	2	
186	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716	2	
187	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739	3	
188	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762	3	
189	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785	3	
190	2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808	2	
191	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831	2	
192	2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853	3	
193	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876	2	
194	2878	2880	2882	2885	2887	2889	2891	2894	2896	2898	2	
195	2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920	3	
196	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942	3	
197	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964	3	
198	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986	3	
199	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	3006	3008	2	

Digitized by Google

(Suite.) — Logarithmes Tangentes

	Tang.	Cotg.	Cos.		Arc.	Sin.	Tang.	Cotg.	Cos.	
		»	0.0000	0′ 90°	1° 0′	$\bar{2}$.2419	$\bar{2}$.2419	1.7581	$\bar{1}$.9999	0′ 89°
		.5363	0000	59	1	2490	2491	7509	9999	59
		352	0000	58	2	2561	2562	7438	9999	58
		52	0000	57	3	2630	2631	7369	9999	57
			0000	56	4	2699	2700	7300	9999	56
			0000	55	5	2766	2767	7233	9999	55
			00	54 89	1 6	$\bar{2}$.2832	$\bar{2}$.2833	1.7167	$\bar{1}$.9999	54 88
				53	7	2898	2899	7101	9999	53
				52	8	2962	2963	7037	9999	52
					9	3025	3026	6974	9999	51
					10	3088	3089	6911	9999	50
					11	3150	3150	6850	9999	49
					12	$\bar{2}$.3210	$\bar{2}$.3211	1.6789	$\bar{1}$.9999	48 88
						3270	3271	6729	9999	47
						3329	3330	6670	9999	46
						3388	3389	6611	9999	45
						3445	3446	6554	9999	44
						3502	3503	6497	9999	43
					18	$\bar{2}$.3558	$\bar{2}$.3559	1.6441	$\bar{1}$.9999	42 88
					19	3613	3614	6386	9999	41
					20	3668	3669	6331	9999	40
				39	21	3722	3723	6277	9999	39
			0000	38	22	3775	3776	6224	9999	38
			0000	37	23	3828	3829	6171	9999	37
		.561	0.0000	36 89	1 24	$\bar{2}$.3880	$\bar{2}$.3881	1.6119	$\bar{1}$.9999	36 88
		1383	0000	35	25	3931	3932	6068	9999	35
	.87	1213	0000	34	26	3982	3983	6017	9999	34
	8951	1049	0000	33	27	4032	4033	5967	9999	33
9	9109	0891	0000	32	28	4082	4083	5917	9999	32
9261	9261	0739	0000	31	29	4131	4132	5868	9999	31
$\bar{3}$.9408	$\bar{3}$.9409	2.0591	0.0000	30 89	1 30	$\bar{2}$.4179	$\bar{2}$.4181	1.5819	$\bar{1}$.9999	30 88
9551	9551	0449	0000	29	31	4227	4229	5771	9998	29
9689	9689	0311	0000	28	32	4275	4276	5724	9998	28
9822	9823	0177	0000	27	33	4322	4323	5677	9998	27
$\bar{3}$.9952	$\bar{3}$.9952	2.0048	0000	26	34	4368	4370	5630	9998	26
$\bar{2}$.0078	$\bar{2}$.0078	1.9922	0000	25	35	4414	4416	5584	9998	25
$\bar{2}$.0200	$\bar{2}$.0200	1.9800	0.0000	24 89	1 36	$\bar{2}$.4459	$\bar{2}$.4461	1.5539	$\bar{1}$.9998	24 88
0319	0319	9681	0000	23	37	4504	4506	5494	9998	23
0435	0435	9565	0000	22	38	4549	4551	5449	9998	22
0548	0548	9452	0000	21	39	4593	4595	5405	9998	21
0658	0658	9342	0000	20	40	4637	4683	5362	9998	20
0765	0765	9235	0000	19	50	5050	5053	4947	9998	10
$\bar{2}$.0870	$\bar{2}$.0870	1.9130	0.0000	18 89	2 0	$\bar{2}$.5428	$\bar{2}$.5431	1.4569	$\bar{1}$.9997	0 88
0972	0972	9028	0000	17	10	5776	5779	4221	9997	50
1072	1072	8928	0000	16	20	6097	6101	3899	9996	40
1169	1170	8830	0000	15	30	6397	6401	3599	9996	30
1265	1265	8735	0000	14	40	6677	6682	3318	9995	20
1358	1359	8641	0000	13	50	6940	6945	3055	9995	10
1450	$\bar{2}$.1450	1.8550	0.0000	12 89	3 0	$\bar{2}$.7188	$\bar{2}$.7194	1.2806	$\bar{1}$.9994	0 87
1539	1540	8460	0000	11	10	7423	7429	2571	9993	50
1627	1627	8373	0000	10	20	7645	7652	2348	9993	40
1713	1713	8287	0000	9	30	7857	7865	2135	9992	30
1797	1798	8202	0.0000	8	40	8059	8067	1933	9991	20
1880	1880	8120	$\bar{1}$.9999	7	50	8251	8261	1739	9990	10
$\bar{2}$.1961	$\bar{2}$.1962	1.8038	$\bar{1}$.9999	6 89	4 0	$\bar{2}$.8436	$\bar{2}$.8446	1.1554	$\bar{1}$.9989	0 86
2041	2041	7959	9999	5	10	8613	8624	1376	9989	50
2119	2120	7880	9999	4	20	8783	8795	1205	9988	40
2196	2196	7804	9999	3	30	8946	8960	1040	9987	30
2271	2272	7728	9999	2	40	9104	9118	0882	9986	20
2346	2346	7654	9999	1	50	9256	9272	0728	9985	10
$\bar{2}$.2419	$\bar{2}$.2419	1.7581	$\bar{1}$.9999	0 89	5 0	$\bar{2}$.9403	$\bar{2}$.9420	1.0580	$\bar{1}$.9983	0 85
	Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	Arc.		Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	Arc.

Digitized by Google

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
150	1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787	3
151	1790	1793	1796	1798	1801	1804	1807	1810	1813	1816	2
152	1818	1821	1824	1827	1830	1833	1836	1838	1841	1844	3
153	1847	1850	1853	1855	1858	1861	1864	1867	1870	1872	3
154	1875	1878	1881	1884	1886	1889	1892	1895	1898	1901	2
155	1903	1906	1909	1912	1915	1917	1920	1923	1926	1928	3
156	1931	1934	1937	1940	1942	1945	1948	1951	1953	1956	3
157	1959	1962	1965	1967	1970	1973	1976	1978	1981	1984	3
158	1987	1989	1992	1995	1998	2000	2003	2006	2009	2011	3
159	2014	2017	2019	2022	2025	2028	2030	2033	2036	2038	3
160	2041	2044	2047	2049	2052	2055	2057	2060	2063	2066	2
161	2068	2071	2074	2076	2079	2082	2084	2087	2090	2092	3
162	2095	2098	2101	2103	2106	2109	2111	2114	2117	2119	3
163	2122	2125	2127	2130	2133	2135	2138	2140	2143	2146	2
164	2148	2151	2154	2156	2159	2162	2164	2167	2170	2172	3
165	2175	2177	2180	2183	2185	2188	2191	2193	2196	2198	3
166	2201	2204	2206	2209	2212	2214	2217	2219	2222	2225	2
167	2227	2230	2232	2235	2238	2240	2243	2245	2248	2251	2
168	2253	2256	2258	2261	2263	2266	2269	2271	2274	2276	3
169	2279	2281	2284	2287	2289	2292	2294	2297	2299	2302	2
170	2304	2307	2310	2312	2315	2317	2320	2322	2325	2327	3
171	2330	2333	2335	2338	2340	2343	2345	2348	2350	2353	2
172	2355	2358	2360	2363	2365	2368	2370	2373	2375	2378	2
173	2380	2383	2385	2388	2390	2393	2395	2398	2400	2403	2
174	2405	2408	2410	2413	2415	2418	2420	2423	2425	2428	2
175	2430	2433	2435	2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453	2
176	2455	2458	2460	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477	3
177	2480	2482	2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502	2
178	2504	2507	2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526	3
179	2529	2531	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550	3
180	2553	2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574	3
181	2577	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598	3
182	2601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622	3
183	2625	2627	2629	2632	2634	2636	2639	2641	2643	2646	2
184	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669	3
185	2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693	2
186	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716	2
187	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739	3
188	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762	3
189	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785	3
190	2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808	2
191	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831	2
192	2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853	3
193	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876	2
194	2878	2880	2882	2885	2887	2889	2891	2894	2896	2898	2
195	2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920	3
196	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942	3
197	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964	3
198	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986	3
199	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	3006	3008	2

Digitized by Google

Arc.	Sin.	Tang.	Cotg.	Cos.		Arc.	Sin.	Tang.	Cotg.	Cos.	
0° 0′	»	»	»	0.0000	0′ 90°	1° 0′	$\bar{2}$.2419	$\bar{2}$.2419	1.7581	$\bar{1}$.9999	0′ 89°
1	$\bar{4}$.4637	$\bar{4}$.4637	3.5363	0000	59	1	2490	2491	7509	9999	59
2	7648	7648	2352	0000	58	2	2561	2562	7438	9999	58
3	$\bar{4}$.9408	$\bar{4}$.9408	3.0592	0000	57	3	2630	2631	7369	9999	57
4	3.0658	$\bar{3}$.0658	2.9342	0000	56	4	2699	2700	7300	9999	56
5	1627	1627	8373	0000	55	5	2766	2767	7233	9999	55
0 6	$\bar{3}$.2419	$\bar{3}$.2419	2.7581	0.0000	54 89	1 6	$\bar{2}$.2832	$\bar{2}$.2833	1.7167	$\bar{1}$.9999	54 88
7	3088	3088	6912	0000	53	7	2898	2899	7101	9999	53
8	3668	3668	6332	0000	52	8	2962	2963	7037	9999	52
9	4180	4180	5820	0000	51	9	3025	3026	6974	9999	51
10	4637	4637	5363	0000	50	10	3088	3089	6911	9999	50
11	5051	5051	4949	0000	49	11	3150	3150	6850	9999	49
0 12	$\bar{3}$.5429	$\bar{3}$.5429	2.4571	0.0000	48 89	1 12	$\bar{2}$.3210	$\bar{2}$.3211	1.6789	$\bar{1}$.9999	48 88
13	5777	5777	4223	0000	47	13	3270	3271	6729	9999	47
14	6099	6099	3901	0000	46	14	3329	3330	6670	9999	46
15	6398	6398	3602	0000	45	15	3388	3389	6611	9999	45
16	6678	6678	3322	0000	44	16	3445	3446	6554	9999	44
17	6942	6942	3058	0000	43	17	3502	3503	6497	9999	43
0 18	$\bar{3}$.7190	$\bar{3}$.7190	2.2810	0.0000	42 89	1 18	$\bar{2}$.3558	$\bar{2}$.3559	1.6441	$\bar{1}$.9999	42 88
19	7425	7425	2575	0000	41	19	3613	3614	6386	9999	41
20	7648	7648	2352	0000	40	20	3668	3669	6331	9999	40
21	7859	7860	2140	0000	39	21	3722	3723	6277	9999	39
22	8061	8062	1938	0000	38	22	3775	3776	6224	9999	38
23	8255	8255	1745	0000	37	23	3828	3829	6171	9999	37
0 24	$\bar{3}$.8439	$\bar{3}$.8439	2.1561	0.0000	36 89	1 24	$\bar{2}$.3880	$\bar{2}$.3881	1.6119	$\bar{1}$.9999	36 88
25	8617	8617	1383	0000	35	25	3931	3932	6068	9999	35
26	8787	8787	1213	0000	34	26	3982	3983	6017	9999	34
27	8951	8951	1049	0000	33	27	4032	4033	5967	9999	33
28	9109	9109	0891	0000	32	28	4082	4083	5917	9999	32
29	9261	9261	0739	0000	31	29	4131	4132	5868	9999	31
0 30	$\bar{3}$.9408	$\bar{3}$.9409	2.0591	0.0000	30 89	1 30	$\bar{2}$.4179	$\bar{2}$.4181	1.5819	$\bar{1}$.9999	30 88
31	9551	9551	0449	0000	29	31	4227	4229	5771	9998	29
32	9689	9689	0311	0000	28	32	4275	4276	5724	9998	28
33	9822	9823	0177	0000	27	33	4322	4323	5677	9998	27
34	$\bar{3}$.9952	$\bar{3}$.9952	2.0048	0000	26	34	4368	4370	5630	9998	26
35	$\bar{2}$.0078	$\bar{2}$.0078	1.9922	0000	25	35	4414	4416	5584	9998	25
0 36	$\bar{2}$.0200	$\bar{2}$.0200	1.9800	0.0000	24 89	1 36	$\bar{2}$.4459	$\bar{2}$.4461	1.5539	$\bar{1}$.9998	24 88
37	0319	0319	9681	0000	23	37	4504	4506	5494	9998	23
38	0435	0435	9565	0000	22	38	4549	4551	5449	9998	22
39	0548	0548	9452	0000	21	39	4593	4595	5405	9998	21
40	0658	0658	9342	0000	20	40	4637	4683	5362	9998	20
41	0765	0765	9235	0000	19	50	5050	5053	4947	9998	10
0 42	$\bar{2}$.0870	$\bar{2}$.0870	1.9130	0.0000	18 89	2 0	$\bar{2}$.5428	$\bar{2}$.5431	1.4569	$\bar{1}$.9997	0 88
43	0972	0972	9028	0000	17	10	5776	5779	4221	9997	50
44	1072	1072	8928	0000	16	20	6097	6101	3899	9996	40
45	1169	1170	8830	0000	15	30	6397	6401	3599	9996	30
46	1265	1265	8735	0000	14	40	6677	6682	3318	9995	20
47	1358	1359	8641	0000	13	50	6940	6945	3055	9995	10
0 48	$\bar{2}$.1450	$\bar{2}$.1450	1.8550	0.0000	12 89	3 0	$\bar{2}$.7188	$\bar{2}$.7194	1.2806	$\bar{1}$.9994	0 87
49	1539	1540	8460	0000	11	10	7423	7429	2571	9993	50
50	1627	1627	8373	0000	10	20	7645	7652	2348	9993	40
51	1713	1713	8287	0000	9	30	7857	7865	2135	9992	30
52	1797	1798	8202	0.0000	8	40	8059	8067	1933	9991	20
53	1880	1880	8120	$\bar{1}$.9999	7	50	8251	8261	1739	9990	10
0 54	$\bar{2}$.1961	$\bar{2}$.1962	1.8038	$\bar{1}$.9999	6 89	4 0	$\bar{2}$.8436	$\bar{2}$.8446	1.1554	$\bar{1}$.9989	0 86
55	2041	2041	7959	9999	5	10	8613	8624	1376	9989	50
56	2119	2120	7880	9999	4	20	8783	8795	1205	9988	40
57	2196	2196	7804	9999	3	30	8946	8960	1040	9987	30
58	2271	2272	7728	9999	2	40	9104	9118	0882	9986	20
59	2346	2346	7654	9999	1	50	9256	9272	0728	9985	10
1 0 ° ′	$\bar{2}$.2419	$\bar{2}$.2419	1.7581	$\bar{1}$.9999	0 89 ′ °	5 0 ° ′	$\bar{2}$.9403	$\bar{2}$.9420	1.0580	$\bar{1}$.9983	0 85 ′ °
	Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	Arc.		Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	Arc.

Digitized by Google

Arc.	Sin.	d	Tg.	d	Ctg.	Cos.		Arc.	Sin.	d	Tg.	d	Ctg.	Cos.	
	$\bar{2}$.		$\bar{2}$.		$\bar{1}$.	$\bar{1}$.			$\bar{1}$.		$\bar{1}$.		0.	$\bar{1}$.	
5° 0′	9403	142	9420	143	0580	9983	0′ 85°	15° 0′	4130	47	4281	50	5719	9849	0′ 75°
10	9545	137	9563	138	0437	9982	50	10	4177	46	4331	50	5669	9846	50
20	9682	134	9701	135	0299	9981	40	20	4223	46	4381	49	5619	9843	40
30	9816	129	9836	130	0164	9980	30	30	4269	45	4430	49	5570	9839	30
40	9945	125	9966	127	0034	9979	20	40	4314	45	4479	48	5521	9836	20
50	0070	122	0093	123	9907	9977	10	50	4359	44	4527	48	5473	9832	10
6 0	0192	119	0216	120	9784	9976	0 84	16 0	4403	44	4575	47	5425	9828	0 74
10	0311	115	0336	117	9664	9975	50	10	4447	44	4622	47	5378	9825	50
20	0426	113	0453	114	9547	9973	40	20	4491	44	4669	47	5331	9821	40
30	0539	109	0567	111	9433	9972	30	30	4533	42	4716	47	5284	9817	30
40	0648	107	0678	108	9322	9971	20	40	4576	43	4762	46	5238	9814	20
50	0755	104	0786	105	9214	9969	10	50	4618	42	4808	46	5192	9810	10
7 0	0859	102	0891	104	9109	9968	0 83	17 0	4659	41	4853	45	5147	9806	0 73
10	0961	99	0995	101	9005	9966	50	10	4700	41	4898	45	5102	9802	50
20	1060	97	1096	98	8904	9964	40	20	4741	41	4943	45	5057	9798	40
30	1157	95	1194	97	8806	9963	30	30	4781	40	4987	44	5013	9794	30
40	1252	93	1291	94	8709	9961	20	40	4821	40	5031	44	4969	9790	20
50	1345	91	1385	93	8615	9959	10	50	4861	39	5075	44	4925	9786	10
8 0	1436	89	1478	91	8522	9958	0 82	18 0	4900	39	5118	43	4882	9782	0 72
10	1525	87	1569	89	8431	9956	50	10	4939	38	5161	43	4839	9778	50
20	1612	85	1658	87	8342	9954	40	20	4977	38	5203	42	4797	9774	40
30	1697	84	1745	86	8255	9952	30	30	5015	37	5245	42	4755	9770	30
40	1781	82	1831	84	8169	9950	20	40	5052	38	5287	42	4713	9765	20
50	1863	80	1915	82	8085	9948	10	50	5090	36	5329	42	4671	9761	10
9 0	1943	79	1997	81	8003	9946	0 81	19 0	5126	37	5370	41	4630	9757	0 71
10	2022	78	2078	80	7922	9944	50	10	5163	36	5411	41	4589	9752	50
20	2100	76	2158	78	7842	9942	40	20	5199	36	5451	40	4549	9748	40
30	2176	75	2236	77	7764	9940	30	30	5235	35	5491	40	4509	9743	30
40	2251	73	2313	76	7687	9938	20	40	5270	36	5531	40	4469	9739	20
50	2324	73	2389	74	7611	9936	10	50	5306	35	5571	40	4429	9734	10
10 0	2397	71	2463	73	7537	9934	0 80	20 0	5341	34	5611	40	4389	9730	0 70
10	2468	70	2536	73	7464	9931	50	10	5375	34	5650	39	4350	9725	50
20	2538	68	2609	71	7391	9929	40	20	5409	34	5689	39	4311	9721	40
30	2606	68	2680	70	7320	9927	30	30	5443	34	5727	38	4273	9716	30
40	2674	66	2750	69	7250	9924	20	40	5477	34	5766	39	4234	9711	20
50	2740	66	2819	68	7181	9922	10	50	5510	33	5804	38	4196	9706	10
11 0	2806	64	2887	66	7113	9919	0 79	21 0	5543	33	5842	38	4158	9702	0 69
10	2870	64	2953	67	7047	9917	50	10	5576	33	5879	37	4121	9697	50
20	2934	63	3020	65	6980	9914	40	20	5609	33	5917	38	4083	9692	40
30	2997	61	3085	64	6915	9912	30	30	5641	32	5954	37	4046	9687	30
40	3058	61	3149	63	6851	9909	20	40	5673	32	5991	37	4009	9682	20
50	3119	60	3212	63	6788	9907	10	50	5704	31	6028	37	3972	9677	10
12 0	3179	59	3275	61	6725	9904	0 78	22 0	5736	32	6064	36	3936	9672	0 68
10	3238	58	3336	61	6664	9901	50	10	5767	31	6100	36	3900	9667	50
20	3296	57	3397	61	6603	9899	40	20	5798	31	6136	36	3864	9661	40
30	3353	57	3458	59	6542	9896	30	30	5828	30	6172	36	3828	9656	30
40	3410	56	3517	59	6483	9893	20	40	5859	31	6208	36	3792	9651	20
50	3466	55	3576	58	6424	9890	10	50	5889	30	6243	35	3757	9646	10
13 0	3521	54	3634	57	6366	9887	0 77	23 0	5919	29	6279	36	3721	9640	0 67
10	3575	54	3691	57	6309	9884	50	10	5948	30	6314	35	3686	9635	50
20	3629	53	3748	56	6252	9881	40	20	5978	29	6348	34	3652	9629	40
30	3682	52	3804	55	6196	9878	30	30	6007	29	6383	35	3617	9624	30
40	3734	52	3859	55	6141	9875	20	40	6036	29	6417	34	3583	9618	20
50	3786	51	3914	54	6086	9872	10	50	6065	28	6452	35	3548	9613	10
14 0	3837	50	3968	53	6032	9869	0 76	24 0	6093	28	6486	34	3514	9607	0 66
10	3887	50	4021	53	5979	9866	50	10	6121	28	6520	34	3480	9602	50
20	3937	49	4074	53	5926	9863	40	20	6149	28	6553	33	3447	9596	40
30	3986	49	4127	51	5873	9859	30	30	6177	28	6587	34	3413	9590	30
40	4035	48	4178	52	5822	9856	20	40	6205	27	6620	33	3380	9584	20
50	4083	47	4230	51	5770	9853	10	50	6232	27	6654	34	3346	9579	10
15 0	4130		4281		5719	9849	0′ 75°	25 0	6259		6687	33	3313	9573	0′ 65°
° ′	$\bar{1}$.		$\bar{1}$.		0.	$\bar{1}$.		° ′	$\bar{1}$.		$\bar{1}$.		0.	$\bar{1}$.	
	Cos.	d	Ctg.	d	Tg.	Sin.	Arc.		Cos.	d	Ctg.	d	Tg.	Sin.	Arc.

Digitized by Google

Arc.	Sin.	d	Tg.	d	Ctg.	d	Cos.		Arc.	Sin.	d	Tg.	d	Ctg.	d	Cos.	
	I.		I.		o.		I.			I.		I.		o.		I.	
25° 0′	6259	27	6687	33	3313	6	9573	0′ 65°	35° 0′	7586	18	8452	27	1548	9	9134	0′ 55°
10	6286	27	6720	32	3280	6	9567	50	10	7604	18	8479	27	1521	9	9125	50
20	6313	27	6752	33	3248	6	9561	40	20	7622	18	8506	27	1494	9	9116	40
30	6340	26	6785	32	3215	6	9555	30	30	7640	17	8533	26	1467	9	9107	30
40	6366	26	6817	32	3183	6	9549	20	40	7657	18	8559	27	1441	9	9098	20
50	6392	26	6850	33	3150	6	9543	10	50	7675	17	8586	27	1414	9	9089	10
26 0	6418	26	6882	32	3118	7	9537	0 64	36 0	7692	18	8613	26	1387	10	9080	0 54
10	6444	26	6914	32	3086	6	9530	50	10	7710	17	8639	27	1361	9	9070	50
20	6470	25	6946	31	3054	6	9524	40	20	7727	17	8666	26	1334	9	9061	40
30	6495	26	6977	32	3023	6	9518	30	30	7744	17	8692	26	1308	10	9052	30
40	6521	25	7009	31	2991	7	9512	20	40	7761	17	8718	27	1282	9	9042	20
50	6546	24	7040	32	2960	6	9505	10	50	7778	17	8745	26	1255	10	9033	10
27 0	6570	25	7072	31	2928	7	9499	0 63	37 0	7795	16	8771	26	1229	9	9023	0 53
10	6595	25	7103	31	2897	6	9492	50	10	7811	17	8797	27	1203	10	9014	50
20	6620	24	7134	31	2866	7	9486	40	20	7828	16	8824	26	1176	9	9004	40
30	6644	24	7165	31	2835	6	9479	30	30	7844	17	8850	26	1150	10	8995	30
40	6668	24	7196	31	2804	7	9473	20	40	7861	16	8876	26	1124	10	8985	20
50	6692	24	7226	30	2774	7	9466	10	50	7877	16	8902	26	1098	10	8975	10
28 0	6716	24	7257	31	2743	6	9459	0 62	38 0	7893	16	8928	26	1072	10	8965	0 52
10	6740	23	7287	30	2713	7	9453	50	10	7910	16	8954	26	1046	10	8955	50
20	6763	24	7317	30	2683	7	9446	40	20	7926	15	8980	26	1020	10	8945	40
30	6787	23	7348	31	2652	7	9439	30	30	7941	16	9006	26	0994	10	8935	30
40	6810	23	7378	30	2622	7	9432	20	40	7957	16	9032	26	0968	10	8925	20
50	6833	23	7408	30	2592	7	9425	10	50	7973	16	9058	26	0942	10	8915	10
29 0	6856	22	7438	29	2562	7	9418	0 61	39 0	7989	15	9084	26	0916	10	8905	0 51
10	6878	23	7467	30	2533	7	9411	50	10	8004	16	9110	25	0890	11	8895	50
20	6901	22	7497	29	2503	7	9404	40	20	8020	15	9135	26	0865	10	8884	40
30	6923	23	7526	30	2474	7	9397	30	30	8035	15	9161	26	0839	10	8874	30
40	6946	22	7556	29	2444	7	9390	20	40	8050	16	9187	26	0813	11	8864	20
50	6968	22	7585	29	2415	8	9383	10	50	8066	15	9212	25	0788	10	8853	10
30 0	6990	22	7614	30	2386	7	9375	0 60	40 0	8081	15	9238	26	0762	11	8843	0 50
10	7012	21	7644	29	2356	7	9368	50	10	8096	15	9264	25	0736	11	8832	50
20	7033	22	7673	28	2327	8	9361	40	20	8111	14	9289	26	0711	11	8821	40
30	7055	21	7701	29	2299	7	9353	30	30	8125	15	9315	26	0685	10	8810	30
40	7076	21	7730	29	2270	8	9346	20	40	8140	15	9341	25	0659	11	8800	20
50	7097	21	7759	29	2241	7	9338	10	50	8155	14	9366	26	0634	11	8789	10
31 0	7118	21	7788	28	2212	8	9331	0 59	41 0	8169	15	9392	25	0608	11	8778	0 49
10	7139	21	7816	29	2184	8	9323	50	10	8184	14	9417	26	0583	11	8767	50
20	7160	21	7845	28	2155	7	9315	40	20	8198	14	9443	25	0557	11	8756	40
30	7181	20	7873	29	2127	8	9308	30	30	8213	15	9468	25	0532	12	8745	30
40	7201	21	7902	28	2098	8	9300	20	40	8227	14	9494	26	0506	11	8733	20
50	7222	20	7930	28	2070	8	9292	10	50	8241	14	9519	25	0481	11	8722	10
32 0	7242	20	7958	28	2042	8	9284	0 58	42 0	8255	14	9544	26	0456	12	8711	0 48
10	7262	20	7986	28	2014	8	9276	50	10	8269	14	9570	25	0430	11	8699	50
20	7282	20	8014	28	1986	8	9268	40	20	8283	14	9595	25	0405	12	8688	40
30	7302	20	8042	28	1958	8	9260	30	30	8297	14	9621	26	0379	11	8676	30
40	7322	20	8070	27	1930	8	9252	20	40	8311	13	9646	25	0354	12	8665	20
50	7342	19	8097	28	1903	8	9244	10	50	8324	14	9671	26	0329	12	8653	10
33 0	7361	19	8125	28	1875	8	9236	0 57	43 0	8338	13	9697	25	0303	12	8641	0 47
10	7380	20	8153	27	1847	9	9228	50	10	8351	14	9722	25	0278	11	8629	50
20	7400	19	8180	28	1820	8	9219	40	20	8365	13	9747	25	0253	12	8618	40
30	7419	19	8208	27	1792	8	9211	30	30	8378	13	9772	26	0228	12	8606	30
40	7438	19	8235	28	1765	9	9203	20	40	8391	14	9798	25	0202	12	8594	20
50	7457	19	8263	27	1737	8	9194	10	50	8405	13	9823	25	0177	13	8582	10
34 0	7476	18	8290	27	1710	9	9186	0 56	44 0	8418	13	9848	26	0152	12	8569	0 46
10	7494	19	8317	27	1683	8	9177	50	10	8431	13	9874	25	0126	12	8557	50
20	7513	18	8344	27	1656	9	9169	40	20	8444	13	9899	25	0101	13	8545	40
30	7531	19	8371	27	1629	9	9160	30	30	8457	13	9924	25	0076	12	8532	30
40	7550	18	8398	27	1602	9	9151	20	40	8469	12	9949	25	0051	13	8520	20
50	7568	18	8425	27	1575	9	9142	10	50	8482	13	9975	26	0025	13	8507	10
35 0	7586		8452		1548		9134	0 55	45 0	8495	13	*000	25	0000	12	8495	0 45
° ′	I.		I.		o.		I.	′ °	° ′	I.		I.		o.		I.	′ °
	Cos.	d	Ctg.	d	Tg.	d	Sin.	Arc.		Cos.	d	Ctg.	d	Tg.	d	Sin.	Arc.

Digitized by Google

Arc.	Sinus.	Cos.	Tang.	Cotg.	
0° 0	0,00000	1,00000	0,00000	Infinie	60
5	0,00145	1,00000	0,00145	687,5489	55
10	0,00291	1,00000	0,00291	343,7737	50
15	0,00436	0,99999	0,00436	229,1817	45
20	0,00582	0,99998	0,00582	171,8854	40
25	0,00727	0,99997	0,00727	137,5075	35
30	0,00873	0,99996	0,00873	114,5887	30
35	0,01018	0,99995	0,01018	98,2179	25
40	0,01164	0,99993	0,01164	85,9398	20
45	0,01309	0,99991	0,01309	76,3900	15
50	0,01454	0,99989	0,01455	68,7501	10
55	0,01600	0,99987	0,01600	62,4992	5
60	0,01745	0,99985	0,01746	57,2900	0 89°
1° 0	0,01745	0,99985	0,01746	57,2900	60
5	0,01891	0,99982	0,01891	52,8821	55
10	0,02036	0,99979	0,02037	49,1039	50
15	0,02181	0,99976	0,02182	45,8294	45
20	0,02327	0,99973	0,02328	42,9641	40
25	0,02472	0,99969	0,02473	40,4358	35
30	0,02618	0,99966	0,02619	38,1885	30
35	0,02763	0,99962	0,02764	36,1776	25
40	0,02908	0,99958	0,02910	34,3678	20
45	0,03054	0,99953	0,03055	32,7303	15
50	0,03199	0,99949	0,03201	31,2416	10
55	0,03345	0,99944	0,03346	29,8823	5
60	0,03490	0,99939	0,03492	28,6363	0 88°
2° 0	0,03490	0,99939	0,03492	28,6363	60
5	0,03635	0,99934	0,03638	27,4899	55
10	0,03781	0,99929	0,03783	26,4316	50
15	0,03926	0,99923	0,03929	25,4517	45
20	0,04071	0,99917	0,04075	24,5418	40
25	0,04217	0,99911	0,04220	23,6945	35
30	0,04362	0,99905	0,04366	22,9038	30
35	0,04507	0,99898	0,04512	22,1640	25
40	0,04653	0,99892	0,04658	21,4704	20
45	0,04798	0,99885	0,04803	20,8188	15
50	0,04943	0,99878	0,04949	20,2056	10
55	0,05088	0,99871	0,05095	19,6273	5
60	0,05234	0,99863	0,05241	19,0811	0 87°
3° 0	0,05234	0,99863	0,05241	19,0811	60
5	0,05379	0,99855	0,05387	18,5645	55
10	0,05524	0,99847	0,05533	18,0750	50
15	0,05669	0,99839	0,05678	17,6106	45
20	0,05815	0,99831	0,05824	17,1693	40
25	0,05960	0,99822	0,05970	16,7496	35
30	0,06105	0,99814	0,06116	16,3499	30
35	0,06250	0,99805	0,06262	15,9687	25
40	0,06395	0,99795	0,06408	15,6048	20
45	0,06540	0,99786	0,06554	15,2571	15
50	0,06685	0,99776	0,06700	14,9244	10
55	0,06831	0,99766	0,06846	14,6059	5
60	0,06976	0,99756	0,06993	14,3007	0 86°

Arc.	Sinus.	Cos.	Tang.	Cotg.	
4° 0	0,06976	0,99756	0,06993	14,3007	60
5	0,07121	0,99746	0,07139	14,0079	55
10	0,07266	0,99736	0,07285	13,7267	50
15	0,07411	0,99725	0,07431	13,4566	45
20	0,07556	0,99714	0,07578	13,1969	40
25	0,07701	0,99703	0,07724	12,9469	35
30	0,07846	0,99692	0,07870	12,7062	30
35	0,07991	0,99680	0,08017	12,4742	25
40	0,08136	0,99668	0,08163	12,2505	20
45	0,08281	0,99657	0,08309	12,0346	15
50	0,08426	0,99644	0,08456	11,8262	10
55	0,08571	0,99632	0,08602	11,6248	5
60	0,08716	0,99619	0,08749	11,4301	0 85°
5° 0	0,08716	0,99619	0,08749	11,4301	60
5	0,08860	0,99607	0,08895	11,2417	55
10	0,09005	0,99594	0,09042	11,0594	50
15	0,09150	0,99580	0,09189	10,8829	45
20	0,09295	0,99567	0,09335	10,7119	40
25	0,09440	0,99553	0,09482	10,5462	35
30	0,09585	0,99540	0,09629	10,3854	30
35	0,09729	0,99526	0,09776	10,2294	25
40	0,09874	0,99511	0,09923	10,0780	20
45	0,10019	0,99497	0,10069	9,9310	15
50	0,10164	0,99482	0,10216	9,7882	10
55	0,10308	0,99467	0,10363	9,6494	5
60	0,10453	0,99452	0,10510	9,5144	0 84°
6° 0	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	60
5	0,10597	0,99437	0,10658	9,38307	55
10	0,10742	0,99421	0,10805	9,25530	50
15	0,10887	0,99406	0,10952	9,13093	45
20	0,11031	0,99390	0,11099	9,00983	40
25	0,11176	0,99374	0,11246	8,89185	35
30	0,11320	0,99357	0,11394	8,77689	30
35	0,11465	0,99341	0,11541	8,66482	25
40	0,11609	0,99324	0,11688	8,55555	20
45	0,11754	0,99307	0,11836	8,44896	15
50	0,11898	0,99290	0,11983	8,34496	10
55	0,12043	0,99272	0,12131	8,24345	5
60	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	0 83°
7° 0	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	60
5	0,12331	0,99237	0,12426	8,04756	55
10	0,12476	0,99219	0,12574	7,95302	50
15	0,12620	0,99200	0,12722	7,86004	45
20	0,12764	0,99182	0,12869	7,77035	40
25	0,12908	0,99163	0,13017	7,68208	35
30	0,13053	0,99144	0,13165	7,59575	30
35	0,13197	0,99125	0,13313	7,51132	25
40	0,13341	0,99106	0,13461	7,42871	20
45	0,13485	0,99087	0,13609	7,34786	15
50	0,13629	0,99067	0,13758	7,26873	10
55	0,13773	0,99047	0,13906	7,19125	5
60	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	0 82°

	Cos.	Sinus.	Cotg.	Tang.	Arc.

Digitized by Google

Arc.	Sinus.	Cos.	Tang.	Cotg.	
8° 0	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	60
5	0,14061	0,99006	0,14202	7,41105	55
10	0,14205	0,98986	0,14351	6,96823	50
15	0,14349	0,98965	0,14499	6,89688	45
20	0,14493	0,98944	0,14648	6,82694	40
25	0,14637	0,98923	0,14796	6,75838	35
30	0,14781	0,98902	0,14945	6,69116	30
35	0,14925	0,98880	0,15094	6,62523	25
40	0,15069	0,98858	0,15243	6,56055	20
45	0,15212	0,98836	0,15391	6,49710	15
50	0,15356	0,98814	0,15540	6,43484	10
55	0,15500	0,98791	0,15689	6,37374	5
60	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	0 81°
9° 0	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	60
5	0,15787	0,98746	0,15988	6,25486	55
10	0,15931	0,98723	0,16137	6,19703	50
15	0,16074	0,98700	0,16286	6,14023	45
20	0,16218	0,98676	0,16435	6,08444	40
25	0,16361	0,98652	0,16585	6,02962	35
30	0,16505	0,98629	0,16734	5,97576	30
35	0,16648	0,98604	0,16884	5,92283	25
40	0,16792	0,98580	0,17033	5,87080	20
45	0,16935	0,98556	0,17183	5,81966	15
50	0,17078	0,98531	0,17333	5,76937	10
55	0,17222	0,98506	0,17483	5,71992	5
60	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	0 80°
10° 0	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	60
5	0,17508	0,98455	0,17683	5,62344	55
10	0,17651	0,98430	0,17933	5,57638	50
15	0,17794	0,98404	0,18083	5,53007	45
20	0,17937	0,98378	0,18233	5,48451	40
25	0,18081	0,98352	0,18383	5,43966	35
30	0,18224	0,98325	0,18534	5,39552	30
35	0,18367	0,98299	0,18684	5,25206	25
40	0,18510	0,98272	0,18835	5,30928	20
45	0,18652	0,98245	0,18986	5,26715	15
50	0,18795	0,98218	0,19136	5,22566	10
55	0,18938	0,98190	0,19287	5,18480	5
60	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	0 79°
11° 0	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	60
5	0,19224	0,98135	0,19589	5,10490	55
10	0,19366	0,98107	0,19740	5,06584	50
15	0,19509	0,98079	0,19891	5,02734	45
20	0,19652	0,98050	0,20042	4,98940	40
25	0,19794	0,98021	0,20194	4,95201	35
30	0,19937	0,97992	0,20345	4,91516	30
35	0,20079	0,97963	0,20497	4,87882	25
40	0,20222	0,97934	0,20648	4,84300	20
45	0,20364	0,97905	0,20800	4,80769	15
50	0,20507	0,97875	0,20952	4,77286	10
55	0,20649	0,97845	0,21104	4,73851	5
60	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	0 78°

Arc.	Sinus.	Cos.	Tang.	Cotg.	
12° 0	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	60
5	0,20933	0,97784	0,21408	4,67121	55
10	0,21076	0,97754	0,21560	4,63825	50
15	0,21218	0,97723	0,21712	4,60572	45
20	0,21360	0,97692	0,21864	4,57363	40
25	0,21502	0,97661	0,22017	4,54196	35
30	0,21644	0,97630	0,22169	4,51071	30
35	0,21786	0,97598	0,22322	4,47986	25
40	0,21928	0,97566	0,22475	4,44942	20
45	0,22070	0,97534	0,22628	4,41936	15
50	0,22212	0,97502	0,22781	4,38969	10
55	0,22353	0,97470	0,22934	4,36040	5
60	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	0 77°
13° 0	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	60
5	0,22637	0,97404	0,23240	4,30291	55
10	0,22778	0,97371	0,23393	4,27471	50
15	0,22920	0,97338	0,23547	4,24685	45
20	0,23062	0,97304	0,23700	4,21933	40
25	0,23203	0,97271	0,23854	4,19215	35
30	0,23345	0,97237	0,24008	4,16530	30
35	0,23486	0,97203	0,24162	4,13877	25
40	0,23627	0,97169	0,24316	4,11256	20
45	0,23769	0,97134	0,24470	4,08666	15
50	0,23910	0,97100	0,24624	4,06107	10
55	0,24051	0,97065	0,24778	4,03578	5
60	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	0 76°
14° 0	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	60
5	0,24333	0,96994	0,25087	3,98607	55
10	0,24474	0,96959	0,25242	3,96165	50
15	0,24615	0,96923	0,25397	3,93751	45
20	0,24756	0,96887	0,25552	3,91364	40
25	0,24897	0,96851	0,25707	3,89004	35
30	0,25038	0,96815	0,25862	3,86671	30
35	0,25179	0,96778	0,26017	3,84364	25
40	0,25320	0,96742	0,26172	3,82083	20
45	0,25460	0,96705	0,26328	3,79827	15
50	0,25601	0,96667	0,26483	3,77595	10
55	0,25741	0,96630	0,26639	3,75388	5
60	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	0 75°
15° 0	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	60
5	0,26022	0,96555	0,26951	3,71046	55
10	0,26163	0,96517	0,27107	3,68909	50
15	0,26303	0,96479	0,27263	3,66796	45
20	0,26443	0,96440	0,27419	3,64705	40
25	0,26584	0,96402	0,27576	3,62636	35
30	0,26724	0,96363	0,27732	3,60588	30
35	0,26864	0,96324	0,27889	3,58562	25
40	0,27004	0,96285	0,28046	3,56557	20
45	0,27144	0,96246	0,28203	3,54573	15
50	0,27284	0,96206	0,28360	3,52609	10
55	0,27424	0,96166	0,28513	3,50666	5
60	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	0 74°

	Cos.	Sinus.	Cotg.	Tang.	Arc.		Cos.	Sinus.	Cotg.	Tang.	Arc.

Digitized by Google

Arc.	Sinus.	Cos.	Tang.	Cotg.	
16° 0	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	60
5	0,27704	0,96086	0,28832	3,46837	55
10	0,27843	0,96046	0,28990	3,44951	50
15	0,27983	0,96005	0,29147	3,43084	45
20	0,28123	0,95964	0,29305	3,41236	40
25	0,28262	0,95923	0,29463	3,39406	35
30	0,28402	0,95882	0,29621	3,37594	30
35	0,28541	0,95841	0,29780	3,35800	25
40	0,28680	0,95799	0,29938	3,34023	20
45	0,28820	0,95757	0,30097	3,32264	15
50	0,28959	0,95715	0,30255	3,30521	10
55	0,29098	0,95673	0,30414	3,28795	5
60	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	0 73°
17° 0	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	60
5	0,29376	0,95588	0,30732	3,25392	55
10	0,29515	0,95545	0,30891	3,23714	50
15	0,29654	0,95502	0,31051	3,22053	45
20	0,29793	0,95459	0,31210	3,20406	40
25	0,29932	0,95415	0,31370	3,18775	35
30	0,30071	0,95372	0,31530	3,17159	30
35	0,30209	0,95328	0,31690	3,15558	25
40	0,30348	0,95284	0,31850	3,13972	20
45	0,30486	0,95240	0,32010	3,12400	15
50	0,30625	0,95195	0,32171	3,10842	10
55	0,30763	0,95150	0,32331	3,09298	5
60	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	0 72°
18° 0	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	60
5	0,31040	0,95061	0,32653	3,06252	55
10	0,31178	0,95015	0,32814	3,04749	50
15	0,31316	0,94970	0,32975	3,03260	45
20	0,31454	0,94924	0,33136	3,01783	40
25	0,31592	0,94878	0,33298	3,00319	35
30	0,31730	0,94832	0,33460	2,98869	30
35	0,31868	0,94786	0,33621	2,97430	25
40	0,32006	0,94740	0,33783	2,96004	20
45	0,32144	0,94693	0,33945	2,94590	15
50	0,32282	0,94646	0,34108	2,93189	10
55	0,32419	0,94599	0,34270	2,91799	5
60	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	0 71°
19° 0	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	60
5	0,32694	0,04504	0,34596	2,89055	55
10	0,32832	0,94457	0,34758	2,87700	50
15	0,32969	0,94409	0,34922	2,86356	45
20	0,33106	0,94361	0,35085	2,85023	40
25	0,33244	0,94313	0,35248	2,83702	35
30	0,33381	0,94264	0,35412	2,82391	30
35	0,33518	0,94215	0,35576	2,81091	25
40	0,33655	0,94167	0,35740	2,79802	20
45	0,33792	0,94118	0,35904	2,78523	15
50	0,33929	0,94068	0,36068	2,77254	10
55	0,34065	0,94019	0,36232	2,75996	5
60	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	0 70°

Arc.	Sinus.	Cos.	Tang.	Cotg.	
20° 0	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	60
5	0,34339	0,93919	0,36562	2,73509	55
10	0,34475	0,93869	0,36727	2,72281	50
15	0,34612	0,93819	0,36892	2,71062	45
20	0,34748	0,93769	0,37057	2,69853	40
25	0,34884	0,93718	0,37223	2,68653	35
30	0,35021	0,93667	0,37388	2,67462	30
35	0,35157	0,93616	0,37554	2,66281	25
40	0,35293	0,93565	0,37720	2,65109	20
45	0,35429	0,93514	0,37887	2,63945	15
50	0,35565	0,93462	0,38053	2,62791	10
55	0,35701	0,93410	0,38220	2,61646	5
60	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	0 69°
21° 0	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	60
5	0,35973	0,93306	0,38553	2,59381	55
10	0,36108	0,93253	0,38721	2,58261	50
15	0,36244	0,93201	0,38888	2,57150	45
20	0,36379	0,93148	0,39055	2,56046	40
25	0,36515	0,93095	0,39223	2,54952	35
30	0,36650	0,93042	0,39391	2,53865	30
35	0,36785	0,92988	0,39559	2,52786	25
40	0,36921	0,92935	0,39727	2,51715	20
45	0,37056	0,92881	0,39896	2,50652	15
50	0,37191	0,92827	0,40065	2,49597	10
55	0,37326	0,92773	0,40234	2,48549	5
60	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	0 68°
22° 0	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	60
5	0,37595	0,92664	0,40572	2,46476	55
10	0,37730	0,92609	0,40741	2,45451	50
15	0,37865	0,92554	0,40911	2,44433	45
20	0,37999	0,92499	0,41081	2,43422	40
25	0,38134	0,92444	0,41251	2,42418	35
30	0,38268	0,92388	0,41421	2,41422	30
35	0,38403	0,92332	0,41592	2,40432	25
40	0,38537	0,92276	0,41763	2,39449	20
45	0,38671	0,92220	0,41933	2,38473	15
50	0,38805	0,92164	0,42105	2,37504	10
55	0,38939	0,92107	0,42276	2,36541	5
60	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	0 67°
23° 0	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	60
5	0,39207	0,91994	0,42619	2,34636	55
10	0,39341	0,91936	0,42791	2,33693	50
15	0,39474	0,91879	0,42963	2,32756	45
20	0,39608	0,91822	0,43136	2,31826	40
25	0,39741	0,91764	0,43308	2,30902	35
30	0,39875	0,91706	0,43481	2,29984	30
35	0,40008	0,91648	0,43654	2,29073	25
40	0,40141	0,91590	0,43828	2,28167	20
45	0,40275	0,91531	0,44001	2,27267	15
50	0,40408	0,91472	0,44175	2,26374	10
55	0,40541	0,91414	0,44349	2,25486	5
60	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	0 66°

	Cos.	Sinus.	Cotg.	Tang.	Arc.

Digitized by Google

Arc.	Sinus.	Cos.	Tang.	Cotg.	
24° 0	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	60
5	0,40806	0,91295	0,44697	2,23727	55
10	0,40939	0,91236	0,44872	2,22857	50
15	0,41072	0,91176	0,45047	2,21992	45
20	0,41205	0,91116	0,45222	2,21132	40
25	0,41337	0,91056	0,45397	2,20278	35
30	0,41469	0,90996	0,45573	2,19430	30
35	0,41602	0,90936	0,45748	2,18587	25
40	0,41734	0,90875	0,45924	2,17749	20
45	0,41866	0,90814	0,46101	2,16917	15
50	0,41998	0,90753	0,46277	2,16090	10
55	0,42130	0,90692	0,46454	2,15268	5
60	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	0 65°
25° 0	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	60
5	0,42394	0,90569	0,46808	2,13639	55
10	0,42525	0,90507	0,46985	2,12832	50
15	0,42657	0,90446	0,47163	2,12030	45
20	0,42788	0,90383	0,47341	2,11233	40
25	0,42920	0,90321	0,47519	2,10441	35
30	0,43051	0,90259	0,47698	2,09654	30
35	0,43182	0,90196	0,47876	2,08872	25
40	0,43313	0,90133	0,48055	2,08094	20
45	0,43445	0,90070	0,48234	2,07321	15
50	0,43575	0,90007	0,48414	2,06553	10
55	0,43706	0,89943	0,48593	2,05790	5
60	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	0 64°
26° 0	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	60
5	0,43968	0,89816	0,48953	2,04276	55
10	0,44098	0,89752	0,49134	2,03526	50
15	0,44229	0,89687	0,49315	2,02780	45
20	0,44359	0,89623	0,49495	2,02039	40
25	0,44490	0,89558	0,49677	2,01302	35
30	0,44620	0,89493	0,49858	2,00569	30
35	0,44750	0,89428	0,50040	1,99841	25
40	0,44880	0,89363	0,50222	1,99116	20
45	0,45010	0,89298	0,50404	1,98396	15
50	0,45140	0,89232	0,50587	1,97680	10
55	0,45269	0,89167	0,50769	1,96969	5
60	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	0 63°
27° 0	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	60
5	0,45529	0,89035	0,51136	1,95557	55
10	0,45658	0,88968	0,51319	1,94858	50
15	0,45787	0,88902	0,51503	1,94162	45
20	0,45917	0,88835	0,51688	1,93470	40
25	0,46046	0,88768	0,51872	1,92782	35
30	0,46175	0,88701	0,52057	1,92098	30
35	0,46304	0,88634	0,52242	1,92418	25
40	0,46433	0,88566	0,52427	1,90741	20
45	0,46561	0,88499	0,52613	1,90069	15
50	0,46690	0,88431	0,52798	1,89400	10
55	0,46819	0,88363	0,52985	1,88734	5
60	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	0 62°

	Cos.	Sinus.	Cotg.	Tang.	Arc.

Arc.	Sinus.	Cos.	Tang.	Cotg.	
28° 0	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	60
5	0,47076	0 88226	0,53258	1,87415	55
10	0,47204	0,88158	0,53545	1,86760	50
15	0,47332	0,88089	0,53732	1,86109	45
20	0,47460	0,88020	0,53920	1,85462	40
25	0,47588	0,87951	0,54107	1,84818	35
30	0,47716	0,87882	0,54296	1,84177	30
35	0,47844	0,87812	0,54484	1,83540	25
40	0,47971	0,87743	0,54673	1,82906	20
45	0,48099	0,87673	0,54862	1,82276	15
50	0,48226	0,87603	0,55051	1,81649	10
55	0,48354	0,87532	0,55241	1,81025	5
60	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	0 61°
29° 0	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	60
5	0,48608	0,87391	0,55621	1,79788	55
10	0,48735	0,87321	0,55812	1,79174	50
15	0,48862	0,87250	0,56003	1,78563	45
20	0,48989	0,87178	0,56194	1,77955	40
25	0,49116	0,87107	0,56385	1,77351	35
30	0,49242	0,87036	0,56577	1,76749	30
35	0,49369	0,86964	0,56770	1,76151	25
40	0,49495	0,86892	0,56962	1,75556	20
45	0,49621	0,86820	0,57155	1,74964	15
50	0,49748	0,86748	0,57348	1,74375	10
55	0,49874	0,86675	0,57541	1,73788	5
60	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	0 60°
30° 0	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
5	0,50126	0,86530	0,57929	1,72625	55
10	0,50252	0,86457	0,58124	1,72047	50
15	0,50377	0,86384	0,58318	1,71473	45
20	0,50503	0,86310	0,58513	1,70901	40
25	0,50628	0,86237	0,58709	1,70332	35
30	0,50754	0,86163	0,58904	1,69766	30
35	0,50879	0,86089	0,59101	1,69203	25
40	0,51004	0,86015	0,59297	1,68643	20
45	0,51129	0,85941	0,59494	1,68085	15
50	0,51254	0,85866	0,59691	1,67530	10
55	0,51379	0,85792	0,59888	1,66978	5
60	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	0 59°
31° 0	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	60
5	0,51628	0,85642	0,60284	1,65881	55
10	0,51753	0,85567	0,60483	1,65337	50
15	0,51877	0,85491	0,60681	1,64795	45
20	0,52002	0,85416	0,60881	1,64256	40
25	0,52126	0,85340	0,61080	1,63719	35
30	0,52250	0,85264	0,61280	1,63185	30
35	0,52374	0,85188	0,61480	1,62654	25
40	0,52498	0,85112	0,61681	1,62125	20
45	0,52622	0,85035	0,61882	1,61598	15
50	0,52745	0,84959	0,62083	1,61074	10
55	0,52869	0,84882	0,62285	1,60553	5
60	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	0 58°

	Cos.	Sinus.	Cotg.	Tang.	Arc.

Digitized by Google

Arc.	Sinus.	Cos.	Tang.	Cotg.	
32° 0	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	60
5	0,53115	0,84728	0,62689	1,59517	55
10	0,53238	0,84650	0,62892	1,59002	50
15	0,53361	0,84573	0,63095	1,58490	45
20	0,53484	0,84495	0,63299	1,57981	40
25	0,53607	0,84417	0,63503	1,57474	35
30	0,53730	0,84339	0,63707	1,56969	30
35	0,53853	0,84261	0,63912	1,56466	25
40	0,53975	0,84182	0,64117	1,55966	20
45	0,54097	0,84104	0,64322	1,55467	15
50	0,54220	0,84025	0,64528	1,54972	10
55	0,54342	0,83946	0,64734	1,54478	5
60	0,54464	0,83867	0,64941	1,53986	0 57°
33° 0	0,54464	0,83867	0,64941	1,53986	60
5	0,54586	0,83788	0,65148	1,53497	55
10	0,54708	0,83708	0,65355	1,53010	50
15	0,54829	0,83629	0,65563	1,52525	45
20	0,54951	0,83549	0,65771	1,52043	40
25	0,55072	0,83469	0,65980	1,51562	35
30	0,55194	0,83389	0,66189	1,51084	30
35	0,55315	0,83308	0,66398	1,50607	25
40	0,55436	0,83228	0,66608	1,50133	20
45	0,55557	0,83147	0,66818	1,49661	15
50	0,55678	0,83066	0,67028	1,49190	10
55	0,55799	0,82985	0,67239	1,48722	5
60	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	0 56°
34° 0	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	60
5	0,56040	0,82822	0,67663	1,47792	55
10	0,56160	0,82741	0,67875	1,47330	50
15	0,56280	0,82659	0,68088	1,46870	45
20	0,56401	0,82577	0,68301	1,46411	40
25	0,56521	0,82495	0,68514	1,45955	35
30	0,56641	0,82413	0,68728	1,45501	30
35	0,56760	0,82330	0,68942	1,45048	25
40	0,56880	0,82248	0,69157	1,44598	20
45	0,57000	0,82165	0,69372	1,44149	15
50	0,57119	0,82082	0,69588	1,43703	10
55	0,57238	0,81999	0,69804	1,43258	5
60	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	0 55°
35° 0	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	60
5	0,57477	0,81832	0,70238	1,42374	55
10	0,57596	0,81748	0,70455	1,41934	50
15	0,57715	0,81664	0,70673	1,41497	45
20	0,57833	0,81580	0,70891	1,41061	40
25	0,57952	0,81496	0,71110	1,40627	35
30	0,58070	0,81412	0,71329	1,40195	30
35	0,58189	0,81327	0,71549	1,39764	25
40	0,58307	0,81242	0,71769	1,39336	20
45	0,58425	0,81157	0,71990	1,38909	15
50	0,58543	0,81072	0,72211	1,38484	10
55	0,58661	0,80987	0,72432	1,38060	5
60	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	0 54°

Arc.	Sinus.	Cos.	Tang.	Cotg.	
36° 0	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	60
5	0,58896	0,80816	0,72877	1,37218	55
10	0,59014	0,80730	0,73100	1,36800	50
15	0,59131	0,80644	0,73323	1,36383	45
20	0,59248	0,80558	0,73547	1,35968	40
25	0,59365	0,80472	0,73771	1,35554	35
30	0,59482	0,80386	0,73996	1,35142	30
35	0,59599	0,80299	0,74221	1,34732	25
40	0,59716	0,80212	0,74447	1,34323	20
45	0,59832	0,80125	0,74674	1,33916	15
50	0,59949	0,80038	0,74900	1,33511	10
55	0,60065	0,79951	0,75128	1,33107	5
60	0,60181	0,79864	0,75355	1,32704	0 53°
37° 0	0,60181	0,79864	0,75355	1,32704	60
5	0,60298	0,79776	0,75584	1,32304	55
10	0,60414	0,79688	0,75812	1,31904	50
15	0,60529	0,79600	0,76042	1,31507	45
20	0,60645	0,79512	0,76272	1,31110	40
25	0,60761	0,79424	0,76502	1,30716	35
30	0,60876	0,79335	0,76733	1,30323	30
35	0,60991	0,79247	0,76964	1,29931	25
40	0,61107	0,79158	0,77196	1,29541	20
45	0,61222	0,79069	0,77428	1,29152	15
50	0,61337	0,78980	0,77661	1,28764	10
55	0,61451	0,78891	0,77895	1,28379	5
60	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	0 52°
38° 0	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	60
5	0,61681	0,78711	0,78363	1,27611	55
10	0,61795	0,78622	0,78598	1,27230	50
15	0,61909	0,78532	0,78834	1,26849	45
20	0,62024	0,78442	0,79070	1,26471	40
25	0,62138	0,78351	0,79306	1,26093	35
30	0,62251	0,78261	0,79544	1,25717	30
35	0,62365	0,78170	0,79781	1,25343	25
40	0,62479	0,78079	0,80020	1,24969	20
45	0,62592	0,77988	0,80258	1,24597	15
50	0,62706	0,77897	0,80498	1,24227	10
55	0,62819	0,77806	0,80738	1,23858	5
60	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	0 51°
39° 0	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	60
5	0,63045	0,77623	0,81220	1,23123	55
10	0,63158	0,77531	0,81461	1,22758	50
15	0,63271	0,77439	0,81703	1,22394	45
20	0,63383	0,77347	0,81946	1,22031	40
25	0,63496	0,77255	0,82190	1,21670	35
30	0,63608	0,77162	0,82434	1,21310	30
35	0,63720	0,77070	0,82678	1,20951	25
40	0,63832	0,76977	0,82923	1,20593	20
45	0,63944	0,76884	0,83169	1,20237	15
50	0,64056	0,76791	0,83415	1,19882	10
55	0,64167	0,76698	0,83662	1,19528	5
60	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	0 50°

	Cos.	Sinus.	Cotg.	Tang.	Arc.

Digitized by Google

Arc.	Sinus.	Cos.	Tang.	Cotg.	
40° 0	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	60
5	0,64390	0,76511	0,84158	1,18824	55
10	0,64501	0,76417	0,84407	1,18474	50
15	0,64612	0,76323	0,84656	1,18125	45
20	0,64723	0,76229	0,84906	1,17777	40
25	0,64834	0,76135	0,85157	1,17430	35
30	0,64945	0,76041	0,85408	1,17085	30
35	0,65055	0,75946	0,85660	1,16741	25
40	0,65166	0,75851	0,85912	1,16398	20
45	0,65276	0,75756	0,86166	1,16056	15
50	0,65386	0,75661	0,86419	1,15715	10
55	0,65496	0,75566	0,86674	1,15375	5
60	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	0 49°
41° 0	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	60
5	0,65716	0,75375	0,87184	1,14699	55
10	0,65825	0,75280	0,87441	1,14363	50
15	0,65935	0,75184	0,87698	1,14028	45
20	0,66044	0,75088	0,87955	1,13694	40
25	0,66153	0,74992	0,88214	1,13361	35
30	0,66262	0,74896	0,88473	1,13029	30
35	0,66371	0,74799	0,88732	1,12699	25
40	0,66480	0,74703	0,88992	1,12369	20
45	0,66588	0,74606	0,89253	1,12041	15
50	0,66697	0,74509	0,89515	1,11713	10
55	0,66805	0,74412	0,89777	1,11387	5
60	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	0 48°
42° 0	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	60
5	0,67021	0,74217	0,90304	1,10737	55
10	0,67129	0,74120	0,90569	1,10414	50
15	0,67237	0,74022	0,90834	1,10091	45
20	0,67344	0,73924	0,91099	1,09770	40
25	0,67452	0,73826	0,91366	1,09450	35
30	0,67559	0,73728	0,91633	1,09131	30
35	0,67666	0,73629	0,91901	1,08813	25
40	0,67773	0,73531	0,92170	1,08496	20
45	0,67880	0,73432	0,92439	1,08179	15
50	0,67987	0,73333	0,92709	1,07864	10
55	0,68093	0,73234	0,92980	1,07550	5
60	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	0 47°

	Cos.	Sinus.	Cotg.	Tang.	Arc.

Arc.	Sinus.	Cos.	Tang.	Cotg.	
43° 0	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	60
5	0,68306	0,73036	0,93524	1,06925	55
10	0,68412	0,72937	0,93797	1,06613	50
15	0,68518	0,72837	0,94071	1,06303	45
20	0,68624	0,72737	0,94345	1,05994	40
25	0,68730	0,72637	0,94620	1,05685	35
30	0,68835	0,72537	0,94896	1,05378	30
35	0,68941	0,72437	0,95173	1,05072	25
40	0,69046	0,72337	0,95451	1,04766	20
45	0,69151	0,72236	0,95729	1,04461	15
50	0,69256	0,72136	0,96008	1,04158	10
55	0,69361	0,72035	0,96288	1,03855	5
60	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	0 46°
44° 0	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	60
5	0,69570	0,71833	0,96850	1,03252	55
10	0,69675	0,71732	0,97133	1,02952	50
15	0,69779	0,71630	0,97416	1,02653	45
20	0,69883	0,71529	0,97700	1,02355	40
25	0,69987	0,71427	0,97984	1,02057	35
30	0,70091	0,71325	0,98270	1,01761	30
35	0,70195	0,71223	0,98556	1,01465	25
40	0,70298	0,71121	0,98843	1,01170	20
45	0,70401	0,71019	0,99131	1,00876	15
50	0,70505	0,70916	0,99420	1,00583	10
55	0,70608	0,70813	0,99710	1,00291	5
60	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	0 45°

	Cos.	Sinus.	Cotg.	Tang.	Arc.

Digitized by Google

Table XIX. Nombres les plus usuels et leurs logarithmes.

	Nombres.		Logarithmes.
Rapport de la circonférence au diamètre π	$=3,14159$		0,49715
$\frac{180^\circ}{\pi}$	$=57,2958$		1,75812
Base des logarithmes naturels ..... e	$=2,71828$		0,43429
$M = \text{Log}\, e$	$=0,43429$		I,63778
$\frac{1}{M} = \frac{1}{\text{Log}\, e}$	$=2,30259$		0,36222
Accélération de la gravité à St.-Pétersbourg	32,216	pieds	1,50807
	ou 9,8192	mètres	0,99208
Poids spécifique du fer fondu	7,2		0,85733
» » de l'acier fondu	7,85		0,89487
» » du fer	7,7		0,88649
» » du plomb	11,35		1,05500
» » du bronze	8,6		0,93450
» » du cuivre	8,9		0,94939
» » du zinc fondu	6,9		0,83885
» » de l'étain	7,3		0,86332
» » du mercure	13,6		1,13354
Poids d'un pied cube d'eau	69,147	livres	1,83977
» d'un pouce cube d'eau	0,04002	livre	2,60228
» d'un mètre cube d'air sous la pression barométrique de 0,75 m., à la température de 15° C. et à moitié saturé de vapeurs ..... Π_1	$=1,206$	kilogramme	0,08135
Sagène	2,1336	mètres	0,32911
Pied	0,30479	mètre	I,48400
Pouce	0,02540	mètre	2,40483
Poude	16,380	kilogramme	1,21431
Livre	0,4095	kilogramme	I,61225
Zolotnik	4,2656	grammes	0,62998
Livre : pied^2	4,4082	k : m^2	0,64426
Poude : pocue^2	2,539	k : c^2	0,40466
Livre-pied	0,1248	kilogrammo-mètre	I,09621
Poude-pied	4,9925	kilogrammo-mètres	0,69832
Livre anglaise	0,4536	kilogramme	I,65667
Tonne anglaise	1016,0	kilogrammes	4,00689
Pied prussien	0,31385	mètre	I,49672
Pouce prussien	0,02615	mètre	2,41747
Livre prussienne	0,50000	kilogramme	I,69897

Digitized by Google

I. Cylindre droit à base circulaire dont la masse est M, la hauteur h et le rayon de la base r.

1. Centre de gravité. Il est au milieu de l'axe de figure.

2. Moment d'inertie:

a) par rapport à l'axe de figure

$$A = \tfrac{1}{2} M r^2,$$

b) par rapport à l'axe équatorial passant par le centre de gravité

$$B = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right).$$

II. Cône droit à base circulaire dont la masse est M, la hauteur h et le rayon de la base r.

1. Centre de gravité. Il est sur l'axe de figure, aux $\frac{1}{4} h$ du sommet.

2. Moment d'inertie:

a) par rapport à l'axe de figure

$$A = \tfrac{3}{10} M r^2,$$

b) par rapport à l'axe équatorial passant par le centre de gravité

$$B = \tfrac{3}{20} M\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

III. Cône tronqué à bases circulaires dont la masse est M, la hauteur h et les rayons des bases r_1 et r_2.

1. Centre de gravité. Il est sur l'axe de figure et sa distance à la base du rayon r_1 est égale à

$$\frac{r_1^2 + 2 r_1 r_2 + 3 r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \cdot \frac{h}{4}.$$

2. Moment d'inertie:

a) par rapport à l'axe de figure

$$A = \tfrac{3}{10} M \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3},$$

b. par rapport à l'axe équatorial passant par le centre de gravité

$$B = \tfrac{3}{20} M\left\{\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{h^2}{(r_1 - r_2)^2}\left[16 \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} - 15\left(\frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1^3 - r_2^3}\right)^2\right]\right\}.$$

Digitized by Google

IV. Sphère dont la masse est M et le rayon r.

1. Centre de gravité. Il est au centre de figure.

2. Moment d'inertie par rapport à un diamètre quelconque

$$A = \tfrac{2}{5} Mr^2.$$

V. Demi-sphère dont la masse est M et le rayon r.

1. Centre de gravité. Il est sur l'axe de figure aux $\frac{3}{8} r$ du centre de figure.

2. Moment d'inertie:

a) par rapport à l'axe de figure

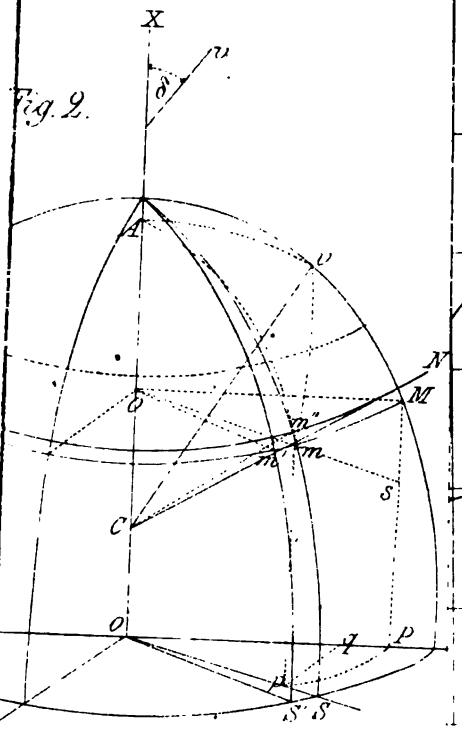
$$A = \tfrac{2}{5} Mr^2,$$

b) par rapport à l'axe équatorial passant par le centre de gravité

$$B = \tfrac{83}{320} Mr^2.$$

Digitized by Google

Fig. 2.



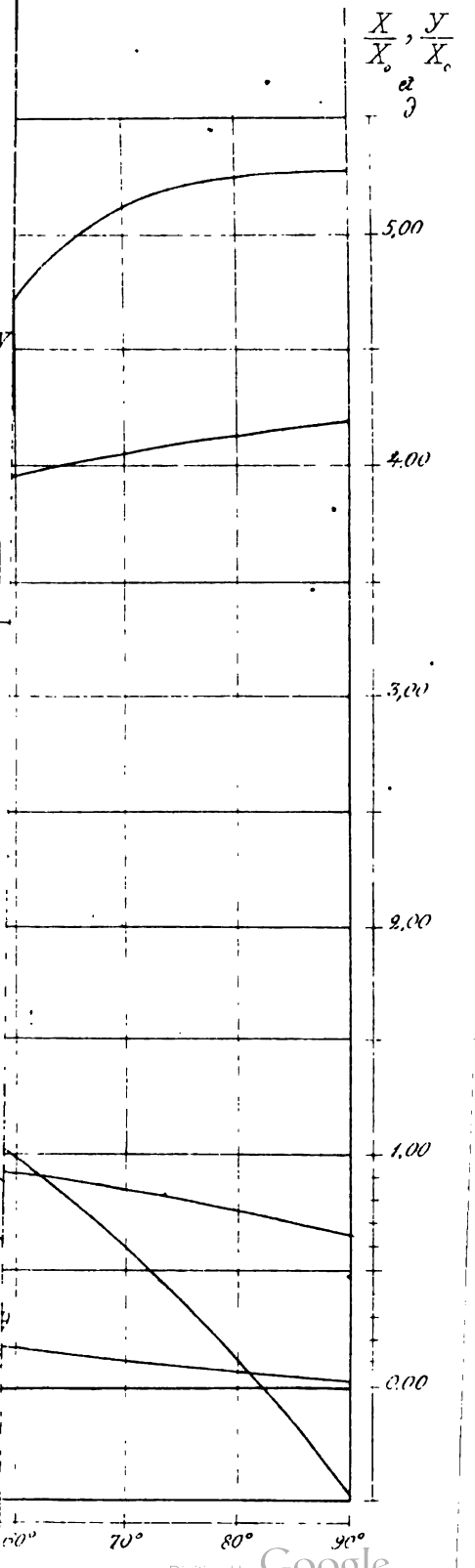
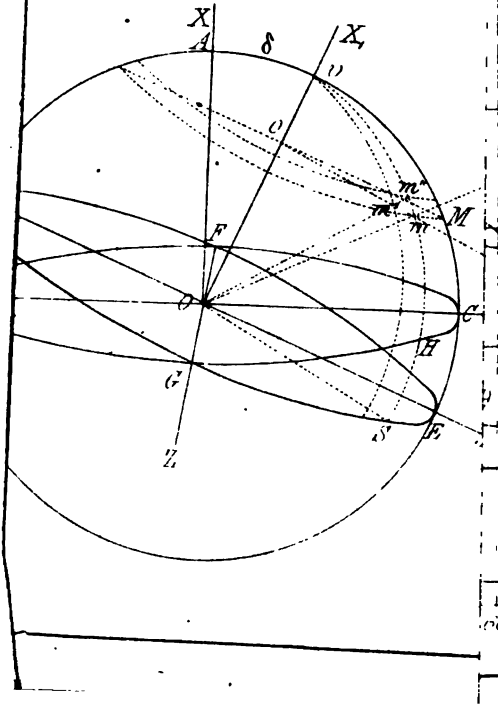


Fig. 4



Digitized by Google

Digitized by Google

ées par
rre de
lance de
es.

e section transversale du projectile et

ure 8 aux projectiles oblongs
ch de 1868 et 1869.

6.

Fig 7.

(A)

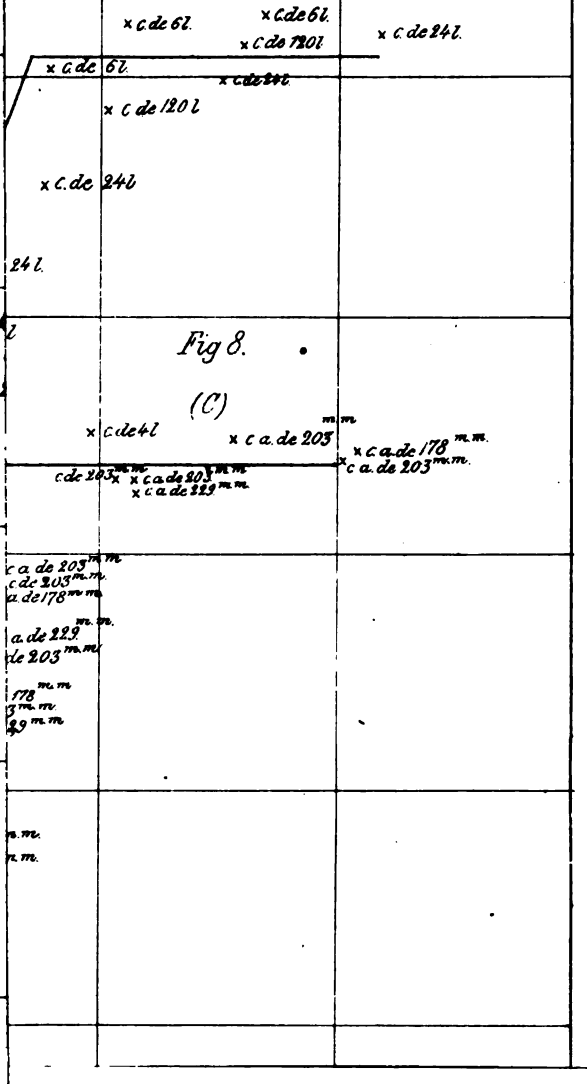


Fig 8.

(C)

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 9.

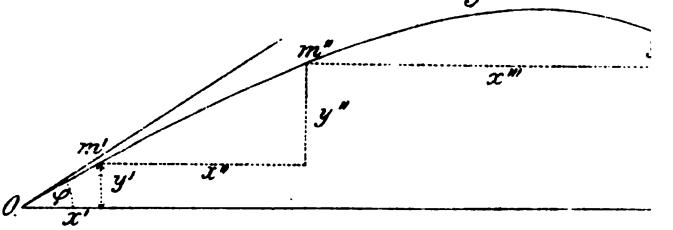
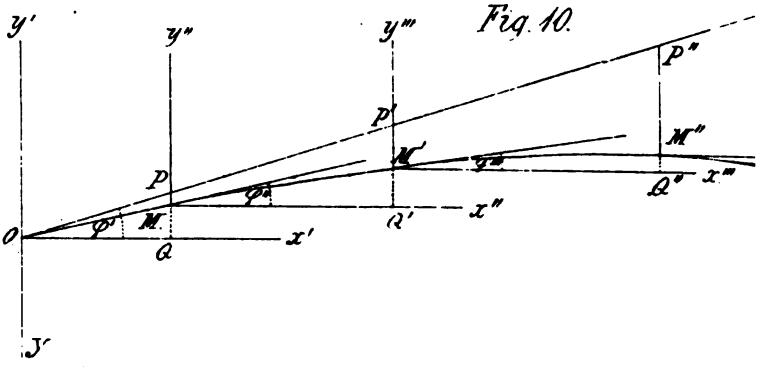
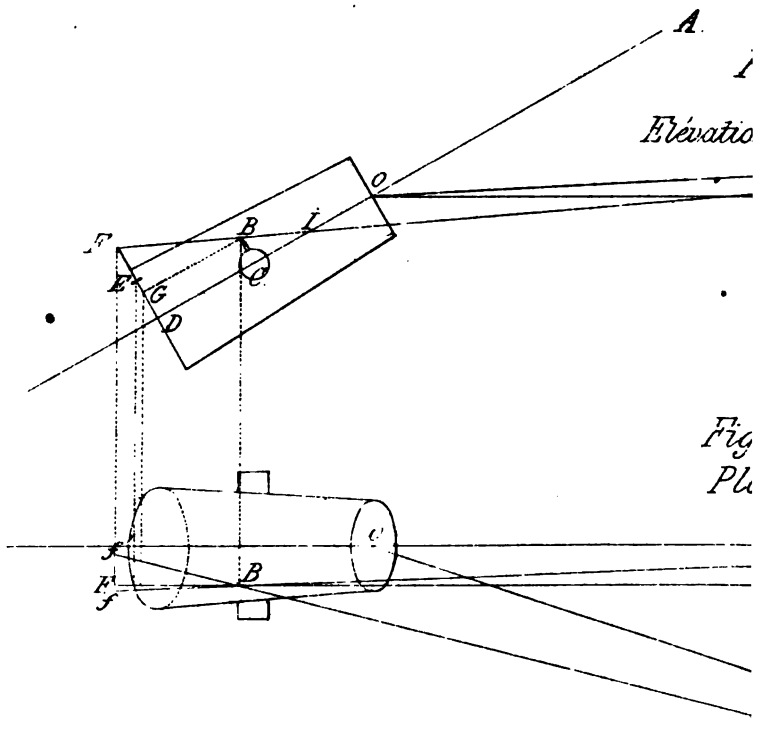


Fig. 10.





Digitized by Google

Fig. 16.

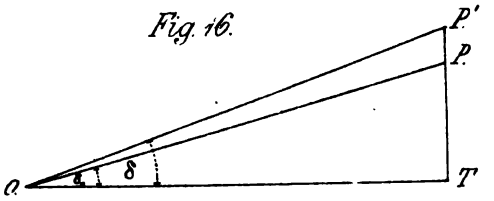


Fig. 17.

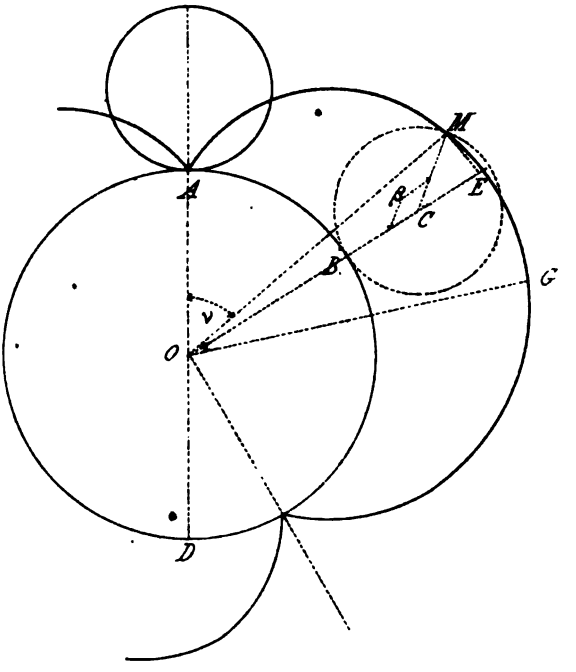


Fig. 18.

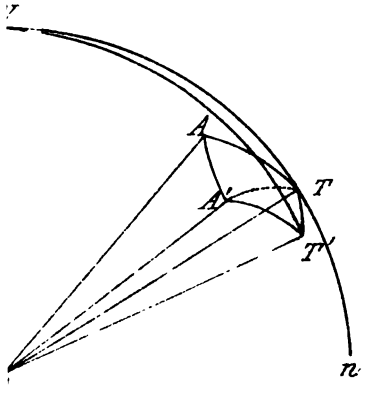
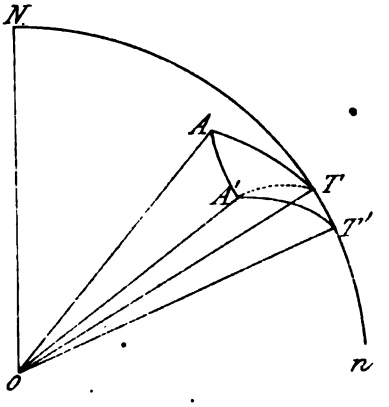


Fig. 18 bis.



Digitized by Google

Fig. 19.

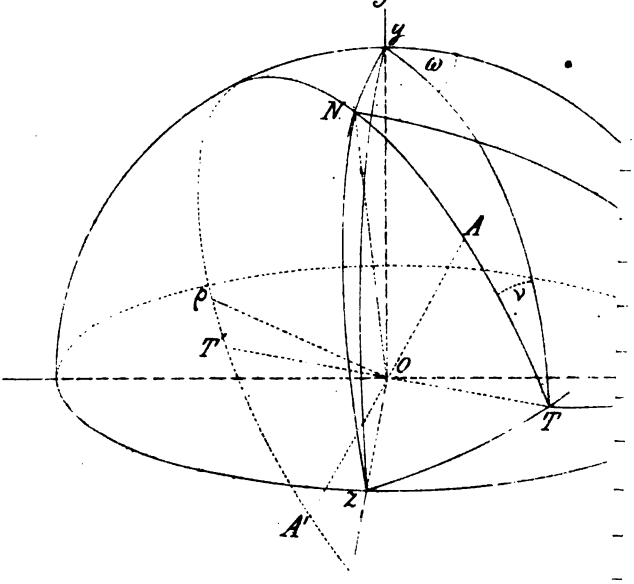
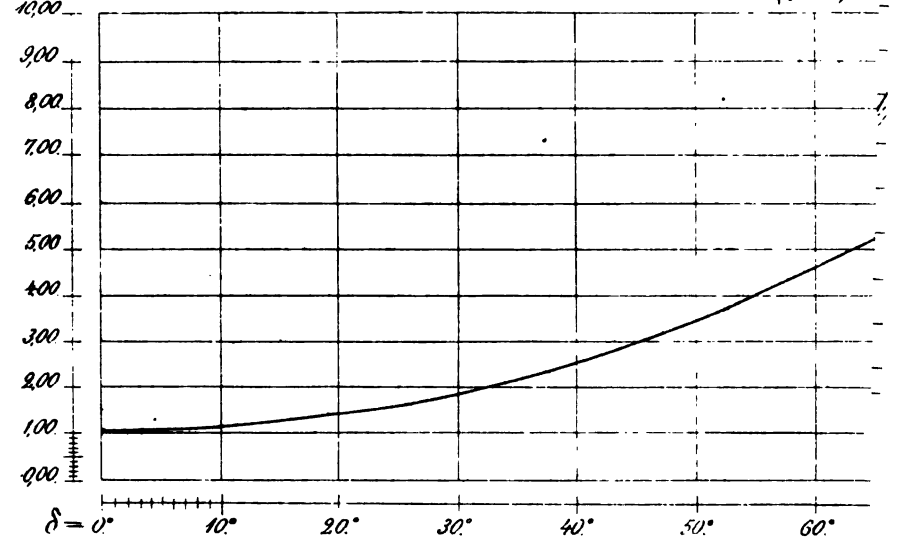


Fig. 20.

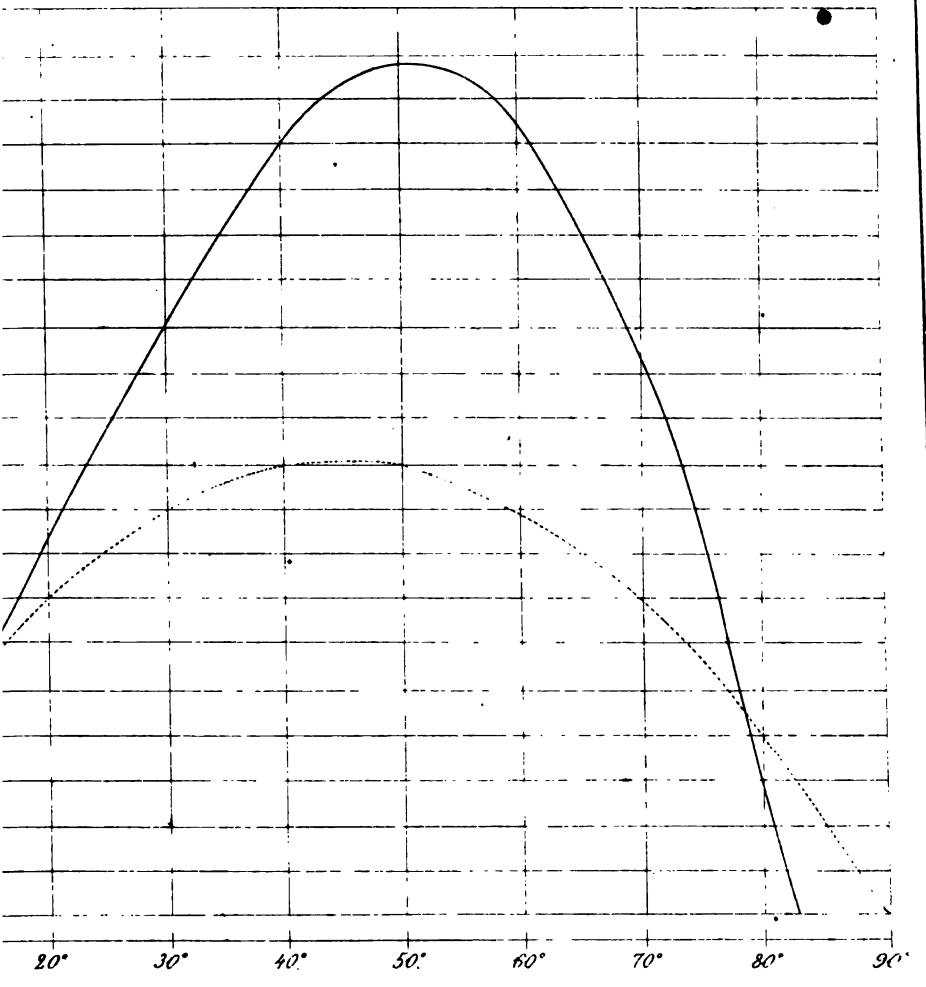
Courbe des valeurs de $\frac{\cos(P,T')}{\cos(P,A')}$



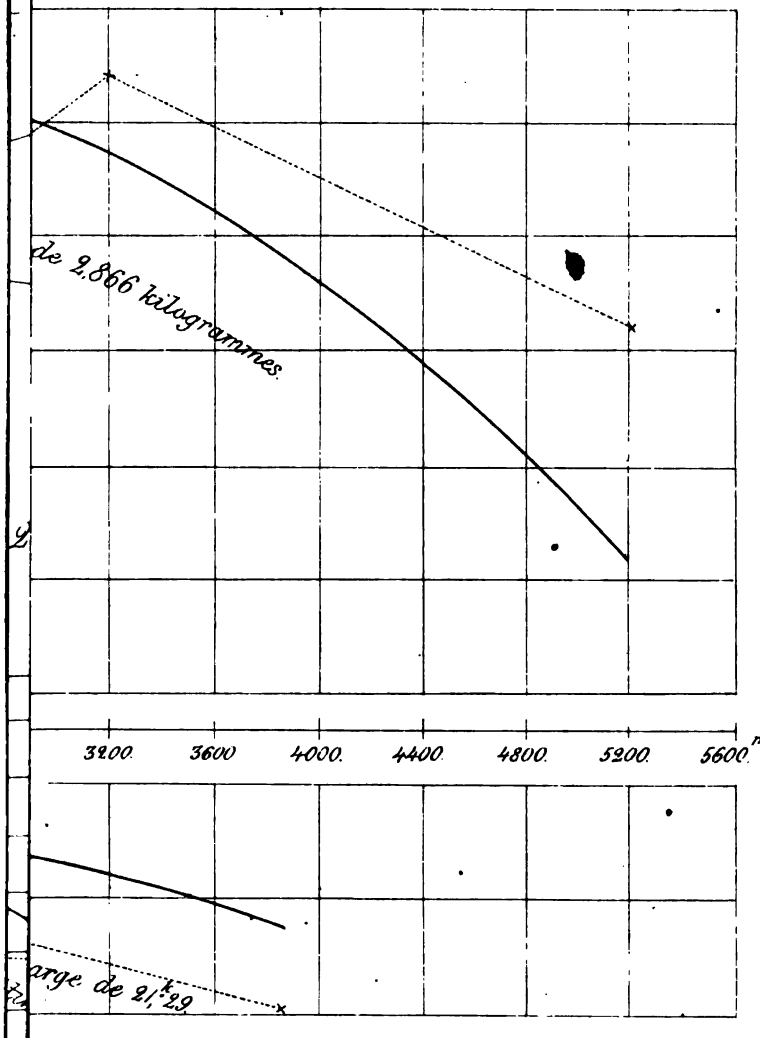
Digitized by Google

Fig. 21.

Courbe des valeurs de $\frac{\sin.\ (\rho, T')}{\cos\ (\rho, A')}$



Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ENGINEERING LIBRARY

UF825
M314
TIMOSHENKO

UF 825 .M314 C.1
Traite de ballistique exterieur
Stanford University Libraries
3 6105 030 411 198

DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004

Digitized by Google

Digitized by Google